DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977.5

Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса

И. В. Лутошкин, А. Г. Чекмарев

ФГБОУ ВО Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация)

Аннотация. Проводится анализ существующих подходов к разработке программных решений, предназначенных для решения задач оптимального управления, делается вывод о необходимости развития специализированных численных программных комплексов. В качестве численного метода решения задач оптимального управления предлагается метод параметризации, позволяющий на основе единого подхода решать задачи оптимального управления с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания. В рамках метода описывается схема представления управляющего воздействия в виде обобщенного сплайна с подвижными узлами и последующего сведения исходной задачи оптимального управления с запаздыванием/без запаздывания к задаче нелинейного программирования относительно параметров сплайна и временных узлов. Для поставленной задачи нелинейного программирования представлены алгоритмы вычисления производных первого и второго порядка целевой функции. Представленные алгоритмы позволяют вычислять производные на основе решения задач Коши для прямой и сопряженной систем. Этот подход отличается от стандартного способа вычисления на основе разностной аппроксимации и позволяет существенно сократить общий объем вычислений. Исходя из специфики метода параметризации, предлагается концепция разработки программного комплекса, выводятся основные положения разработки. Так, в программном комплексе предлагается независимость реализации методов решения задач нелинейного программирования и дискретных схем решения задач Коши; единый (не зависящий от типа задачи оптимального управления) подход к параметризации управления. Также приводятся результаты вычислительных экспериментов, проведенных методом параметризации. Результаты подтверждают эффективность применения единого подхода к решению задач оптимального управления с точечным запаздыванием, распределенным запаздыванием, без запаздывания.

Ключевые слова: оптимальное управление, запаздывание, метод параметризации, нелинейное программирование, программный комплекс

Для цитирования: Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 260–279. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.260-279

Об авторах:
Лутошкин Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4108-7646, lutoshkiniv@ulsu.ru

Чекмарев Артем Геннадьевич, аспирант кафедры цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), ORCID: http://orcid.org/0009-0006-5376-9421, armind@mail.ru

Original article

MSC2020 49M37

Development of a parameterization method for solving optimal control problems and development of a software package concept

I. V. Lutoshkin, A. G. Chekmarev

Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. An analysis of existing approaches to the development of software solutions designed to solve optimal control problems is carried out, and a conclusion is drawn about the need to develop specialized numerical software systems. As a numerical method for solving optimal control problems, a parameterization method is proposed, which allows, on the basis of a unified approach, to solve optimal control problems with point or distributed delay and without delay as well. The method describes a scheme for representing a control action in the form of a generalized spline with moving nodes and subsequent reduction of the original optimal control problem with or without delay to a nonlinear programming problem with respect to the spline parameters and temporary nodes. For stated nonlinear programming problem, algorithms for calculating the first and second order derivatives of the objective function are presented. These algorithms make it possible to calculate derivatives based on solving Cauchy problems for direct and adjoint systems. This approach differs from the standard method of calculation based on difference approximation and can significantly reduce the overall amount of calculations. Based on the specifics of the parameterization method, a concept for developing a software package is proposed, and the main provisions of the development are derived. Thus, the software package offers independence in the implementation of methods for solving nonlinear programming problems and discrete schemes for solving Cauchy problems. It also offers a unified (independent of the type of optimal control problem) approach to control parameterization. The results of computational experiments carried out using the parameterization method are also presented. These results confirm the effectiveness of using a unified approach while solving of optimal control problems with point delay, distributed delay, and with no delay.

Keywords: optimal control, delay, parameterization method, nonlinear programming, software package

For citation: *I. V. Lutoshkin, A. G. Chekmarev.* Development of a parameterization method for solving optimal control problems and development of a software package concept. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:3(2024), 260–279. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.260-279

About the authors:

Igor V. Lutoshkin, Ph.D. in Phys. and Math., Head of the Department of Digital Economics, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy Str., Ulyanovsk 432017, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4108-7646, lutoshkiniv@ulsu.ru

Artem G. Chekmarev, Postgraduate Student, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy Str., Ulyanovsk 432017, Russia), ORCID: http://orcid.org/0009-0006-5376-9421, armind@mail.ru

1. Введение

Задачи моделирования управляемых нелинейных динамических систем возникают в разных областях науки, техники и технологии: машиностроении, робототехнике, авиации, химической промышленности, медицине, экономике и др. Для поддержки технологии моделирования таких систем разработано немало программных инструментов, предлагающих необходимое лингвистическое, информационное и алгоритмическое обеспечение. Наиболее известными и широко применяемыми пакетами программ общего назначения являются Mathlab, Maple, GNU Octave, Mathematica, Scilab, SCADE Suite, OpenModelica, Julia и др.

Часть пакетов (Mathlab, Maple, GNU Octave, Mathematica, Julia) базируется на специализированных высокоуровневых мультипарадигменных интерпретируемых «полных» языках программирования, ориентированных на математические вычисления. На практике при использовании указанных пакетов чаще всего применяются сочетания процедурной, структурной и функциональной парадигм программирования. Другие пакеты (OpenModelica) реализуют декларативные компилируемые объектно-ориентированные языки, поддерживающие прежде всего компонентно-ориентированную парадигму проектирования. Такие пакеты ориентированы на имитацию: исполнение модели в модельной среде. Для имитационного моделирования и анализа динамических систем также применяются инструменты компонентно-ориентированного визуального программирования (Mathlab+Simulink, OpenModelica OMEdit, SCADE Suite), где модели представляются в формализме иерархии функциональных блоков и связей между ними. Альтернативный подход заключается в расширении существующих языков общего назначения специализированными библиотеками, примером может служить Python с библиотеками SciPy, NumPy и др.

При моделировании управляемых динамических систем, требующих оптимизации, формулируются проблемы в терминах задач теории оптимального управления (ЗОУ) (например, [1–4]). На практике нелинейность и высокая размерность ограничивают возможность получения аналитического решения таких задач, поэтому применяются специальные численные методы, среди которых наиболее часто используемыми в инструментах численного решения ЗОУ являются т. н. «прямые» методы, основанные на преобразовании ЗОУ в конечномерную задачу нелинейного программирования (НП) [5]. Прямые методы не требуют предварительных аналитических решений и относительно просты в использовании, но их реализация сталкивается с рядом вычислительных проблем [6], в связи с чем подобные инструменты изначально не были интегрированы в пакеты общего назначения.

Для моделирования динамических систем, формулируемых в терминах ЗОУ, создан ряд методов и специализированных инструментов численного решения ЗОУ, реализованных как приложения, библиотеки или дополнения к существующим пакетам общего назначения: CasADi, PSOPT, PROPT, GPOPS, ICLOCS2, ACADO, acados, GPOPS-II, CGPOPS, GEKKO, MEOPT, OPTCON и др. ([7–10]). Большая часть существующих инструментов решения задач оптимального управления (ОУ) либо являются библиотеками (например, CGPOPS), либо реализуют eDSL (например, GEKKO, PROPT) и базируются на полных языках общего назначения (Python, Matlab, Modelica), наследуя синтаксические решения и парадигмы, что требует от пользователя соответствующих знаний и значительно повышает уровень входа. Кроме этого, постоянно увеличивающая количественная сложность состава пакетов программ общего назначения приводит к усложнению процесса обучения.

Таким образом, создание простых, удобных и эффективных предметно-ориентированных инструментов является актуальной задачей. Для решения этой задачи можно использовать метод параметризации [11–12]. Разрабатываемый метод относится к классу прямых методов, в котором управляющая функция представляется в виде обобщенного сплайна с подвижными узлами. Такая параметризация порождает задачу нелинейного программирования, в которой параметры сплайна являются переменными. При этом структура управления определяется пользователем модели и не зависит от формы задачи ОУ, а также вида уравнений, описывающих динамику. Это позволяет использовать единый подход к решению задач ОУ различной формы. Принципиальное отличие метода параметризации от других прямых методов состоит в способе вычисления производных в задаче нелинейного программирования, это делается на основе использования сопряженных переменных. Такой подход позволяет существенно сократить количество вычислений по сравнению с разностной аппроксимацией производных в задаче нелинейного программирования. При этом методы решения задачи нелинейного программирования не связаны с методами решения задач Коши. Такая независимость позволяет относительно просто строить расширяемую модульную архитектуру методов. Таким образом, реализуется единый концептуальный подход к решению задач ОУ достаточно общего вида.

2. Метод параметризации для решения задач оптимального управления

2.1. Задача оптимального управления без запаздывания

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0; \tag{2.1}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \tag{2.2}$$

$$J = g(x(T)) \to \min. \tag{2.3}$$

Здесь $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^r$, $t_0 \leq t \leq T$. Функции $f(x,u)$, $g(z)$, $z \in \Re^n$, непрерывно дифференцируемы.

Введем разбиение отрезка $[t_0; T]$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N \equiv T; \tag{2.4}$$

и на каждом отрезке разбиения определим структуру управления:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mu = 1, \ldots, r. \tag{2.5}$$

Здесь $v_\mu^k \in R^d$.

Введем вектор параметров $w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \ldots, w_{r,d}^k)$. Если в задачу Коши (2.1) подставить управление (2.4), (2.5), то получаемое решение будет зависеть от введенных параметров:

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k.$$

Функция $z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k)$ определяется на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$ интегральными соотношениями:

$$z(t, v^1) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(z(s; v^1), u^1(s; v^1))ds, \quad t_0 \le t < t_1;$$

$$z(t; w^1, \ldots, w^k, v^{k+1}) = z(t_k; w^1, \ldots, v^k) \ + \int\limits_{t_k}^{t} f(z(s; w^1, \ldots, v^{k+1}), u^{k+1}(s; v^{k+1}))ds,$$
$$t_k \le t < t_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Определим функцию

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N) = g(z(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N)). \tag{2.6}$$

В этом случае вместо исходной задачи ОУ (2.1)-(2.3) получаем замещающую ее задачу НП:

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N) \to \min \quad \text{при ограничениях}$$
$$W = \{w^k : \ w_0^{k-1} \le w_0^k, \ u^k(t; v^k) \in U, \ w_{0,0}^{k-1} \le t \le w_{0,0}^k,$$
$$k = 1, ..., N; \quad w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \le T^*\}. \tag{2.7}$$

Здесь T^* – известная фиксированная величина.

Для эффективного решения задачи НП (2.7) требуется применение методов, использующих производные целевой функции $\varphi(w^1, \ldots, w^N)$. Так как зависимость φ от переменных $(w^1, \ldots, w^N)$ задана опосредованно, вычисление производной представляет собой отдельную проблему.

Формально производную целевой функции можно записать в виде:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial w_{\mu,\alpha}^k} = \frac{\partial g(z(T; \ldots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \ldots, v^N)}{\partial w_{\mu,\alpha}^k}.$$

Введем вариации траектории

$$y^{j\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; v^1, \ldots, v^k)}{\partial w_{\mu,\alpha}^j}, \qquad t_{k-1} \le t \le t_k, \qquad 1 \le j \le k \le N. \tag{2.8}$$

Они удовлетворяют задачам Коши: для параметров $w_{0,0}^k = t_k$ $(1 \le k \le N-1)$ это [11]

$$\begin{cases} \dot{y}^{k00} = \dfrac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}, \quad t_k \le t \le T, \\ y^{k00}(t_k) = f(x(t_k), u^k(t_k; v^k)) - f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1})); \end{cases} \tag{2.9}$$

для вариаций относительно $v_{\mu,\alpha}^k$ $(1 \le \mu \le r, \ 1 \le \alpha \le d, \ 1 \le k \le N)$ это

$$\begin{cases} \dot{y}^{k\mu\alpha} = \dfrac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha} + \theta(t_k - t) \quad \dfrac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \dfrac{\partial u_\mu^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k}, \\ \qquad\qquad t_{k-1} \le t \le T, \\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Здесь функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Вариация по конечному времени T конечна:

$$y^{N00}(T) = f(x(T), u(T)). \tag{2.11}$$

Таким образом, вычисление сомножителя $\dfrac{\partial z(T; w^1, \ldots, v^N)}{\partial w^k_{\mu,\alpha}}$ эквивалентно решению соответствующей задачи: (2.9), (2.10), (2.11). Следовательно, вычисление градиента целевой функции может быть сведено к решению ряда задач Коши, количество которых совпадает с количеством переменных $(w^1, \ldots, w^N)$. Однако, за счет использования сопряженных переменных объем вычислений удается существенно сократить.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина и сопряженную систему:

$$H(p, x, u) = \langle p, f(x, u) \rangle;$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\left.\dfrac{\partial H(p(t), x, u(t))}{\partial x}\right|_{x=x(t)}, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ p(T) = \left.\dfrac{\partial g(z)}{\partial z}\right|_{z=x(T)}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Т е о р е м а 2.1 ([11]). *Пусть функции f, g, входящие в постановку задачи* (2.1)–(2.3)*, непрерывно дифференцируемы по фазовым и управляющим переменным, тогда для первых производных функции φ по параметрам управления верны формулы:*

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial t_k} = H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - H(p(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial T} = H(p(T), x(T), u(T));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} dt.$$

Таким образом, теорема 2.1 дает алгоритм вычисления градиента целевой функции задачи НП (2.7) на основе решения двух задач Коши (2.1), (2.12).

Для вычисления производных второго порядка с помощью сопряженных функций p определим матричные импульсы [13]:

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial f(x, u(t))}{\partial x} \Psi(t) - \Psi(t) \frac{\partial f(x, u(t))}{\partial x} - \left.\frac{\partial^2 H(p(t), x, u(t))}{\partial x^2}\right|_{x=x(t)}, 0 \leq t \leq T; \tag{2.13}$$

с конечными условиями

$$\Psi(T) = \left.\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}\right|_{z=x(T)}. \tag{2.14}$$

Т е о р е м а 2.2 ([13]). *Пусть функции f, g, входящие в постановку задачи (2.1)–(2.3), дважды непрерывно дифференцируемы по фазовым переменным, кроме того функция f дважды непрерывно дифференцируема по управляющим переменным u_i, $i = 1, \ldots, r$, тогда для вторых производных функции φ по параметрам управления верны формулы:*

$(v^j_{\mu,\alpha},\ v^k_{\nu,\beta};\ j \le k)$

$$\frac{\partial^2 \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial v^j_{\mu,\alpha} \partial v^k_{\nu,\beta}} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{\partial u^k_\nu(t; v^k)}{\partial v^k_{\nu,\beta}} \left(\left\langle \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_\nu \partial x}, y^{j\mu\alpha}(t) \right\rangle + \right.\right.$$
$$\left. + \left[\Psi(t) y^{j\mu\alpha}(t)\right]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\nu} \right) + \delta_{jk} \left[\frac{\partial u^k_\nu(t; v^k)}{\partial v^k_{\nu,\beta}} \frac{\partial u^k_\mu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} \times \right.$$
$$\times \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_\nu \partial u_\mu} + \frac{\partial u^k_\mu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} \left\langle \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_\mu \partial x}, y^{k\nu\beta}(t) \right\rangle +$$
$$+ \frac{\partial u^k_\mu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} \left[\Psi(t) y^{k\nu\beta}(t)\right]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\mu} + \delta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 u^k_\nu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha} \partial v^k_{\nu,\beta}} \times$$
$$\left.\left. \times \frac{\partial H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_\nu} \right] \right\} dt; \quad (2.15)$$

$(v^j_{\mu\alpha},\ t_k;\ j \le k)$

$$\frac{\partial^2 \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial v^j_{\mu,\alpha} \partial t_k} = \left[\frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x} \right]^T y^{j\mu\alpha}(t_k) + \left[\Psi(t_k) y^{j\mu\alpha}(t_k)\right]^T \times$$
$$\times y^{k00}(t_k) + \delta_{jk} \frac{\partial u^k_\mu(t_k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial u_\mu}; \quad (2.16)$$

$(t_j,\ v^k_{\nu\beta};\ j < k)$

$$\frac{\partial^2 \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial t_j \partial v^k_{\nu,\beta}} = -\delta_{j(k-1)} \frac{\partial H(p(t_{k-1}), x(t_{k-1}), u^k(t_{k-1}; v^k))}{\partial u_\nu} +$$
$$+ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial u^k_\nu(t; v^k)}{\partial v^k_{\nu,\beta}} \left[\left\langle \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_\nu \partial x}, y^{j00}(t) \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left[\Psi(t) y^{j00}(t)\right]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\nu} \right] dt; \quad (2.17)$$

$(t_j,\ t_k)$

$$\frac{\partial^2\varphi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial t_j \partial t_k} = \Bigg\langle \frac{\partial H(p(t_k),x(t_k),u^k(t_k;v^k))}{\partial x} - \\ - \frac{H(p^l(t_k),x(t_k),u^{k+1}(t_k;v^{k+1}))}{\partial x} + \Psi(t_k)y^{k00}(t_k), y^{j00}(t_k)\Bigg\rangle + \\ + \delta_{jk}\Bigg\{ - \Bigg\langle \frac{\partial H(p(t_k),x(t_k),u^{k+1}(t_k;v^{k+1}))}{\partial x}, y^{k00}(t_k)\Bigg\rangle + \\ + \Bigg\langle \frac{\partial H(p(t_k),x(t_k),u^k(t_k;v^k))}{\partial x}, \frac{\partial u^k(t_k;v^k)}{\partial t}\Bigg\rangle - \\ - \Bigg\langle \frac{\partial H(p(t_k),x(t_k),u^{k+1}(t_k;v^{k+1}))}{\partial x}, \frac{\partial u^{k+1}(t_k;v^{k+1})}{\partial t}\Bigg\rangle\Bigg\}. \quad (2.18)$$

Теорема 2.2 дает алгоритм вычисления матрицы Гессе целевой функции в задаче НП (2.7), что позволяет применять методы второго порядка в задаче (2.7).

2.2. Задача оптимального управления с точечным запаздыванием

Рассмотрим задачу ОУ с постоянным запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)); \quad (2.19)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T; \quad (2.20)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \le t \le t_0; \quad (2.21)$$

$$J = g(x(T)) \to \min. \quad (2.22)$$

Здесь $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^r$ при $t_0 \le t \le T$, $f : \Re^{1+2n+r} \to \Re^n$, $g : \Re^n \to \Re$, $\psi : \Re \to \Re^n$.

Если в задачу Коши (2.19), (2.21) подставить параметризованное управление (2.4)–(2.5), то получим решение

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \le t < t_k.$$

Функция $z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k)$ определяется на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$ соотношениями:

$$z(t; w^1, \ldots, w^{k-1}, v^k) = \psi(t), \quad t_0 - h \le t \le t_0;$$

$$z(t; w^1, \ldots, w^{k-1}, v^k) = \psi(t_0) + \\ \int_{t_0}^{t} f\left(s, z(s; w^1, \ldots, w^{k-1}, v^k), z(s-h; w^1, \ldots, w^{k-1}, v^k), u^k(s; v^k)\right) ds, \\ t_{k-1} \le t \le t_k, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Аналогично (2.6) можно определить функцию φ:

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N) = g(z(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N)).$$

Таким образом, задача ОУ (2.19)-(2.22) формально аппроксимируется задачей НП (2.7). Вычисление производных целевой функции задачи (2.7) может быть основано на решении задач Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина и систему уравнений для сопряженных переменных:

$$H(t,p,x,\xi,u) = \langle p, f(t,x,\xi,u)\rangle\,;$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = & -\left.\dfrac{\partial H(p(t),x,\xi,u(t))}{\partial x}\right|_{x=x(t),\xi=x(t-h)} \\ & -\left.\dfrac{\partial H(p(t+h),x,\xi,u(t+h))}{\partial \xi}\theta(T-h-t)\right|_{x=x(t+h),\xi=x(t)}; \end{cases}$$

$$p(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x(T)}.$$

Т е о р е м а 2.3 ([14])**.** *Пусть функции f, g, входящие в постановку задачи* (2.19)–(2.22)*, непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче* (2.7) *по параметрам верны формулы:*

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial t_k} = H(t_k,p(t_k),x(t_k),x(t_k-h),u^k(t_k,v^k)) -$$
$$H(t_k,p(t_k),x(t_k),x(t_k-h),u^{k+1}(t_k,v^{k+1}));$$

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial T} = H(T,p(T),x(T),x(T-h),u^N(T,v^N));$$

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau,p(\tau),x(\tau),x(\tau-h),u(\tau))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(\tau,v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}}d\tau.$$

Теорема 2.3 позволяет построить алгоритм вычисления градиента целевой функции в задаче НП (2.7), аппроксимирующей задачу ОУ с точечным запаздыванием (2.19)-(2.22). Это открывает возможность применения методов первого порядка к задаче (2.7).

2.3. Задача оптимального управления с распределенным запаздыванием

Рассмотрим задачу ОУ с распределенным запаздыванием в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \psi\left(t, x(t), u(t), \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} f(t,s,x(s),u(s))ds\right), \\ x(t_0) = x^0; \end{cases} \tag{2.23}$$

$$u(t) \in U,\ t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.24}$$

$$J = g(x(T)) \to \min \tag{2.25}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, U замкнуто в R^r. Функции $\psi : R^{1+n+r+m} \to R^n$, $f : R^{2+n+r} \to R^m$, $g : R^n \to R$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы.

Если в задачу Коши (2.23) подставить параметризованное управление (2.4)–(2.5), то полученное решение зависит от параметров управления:

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \le t < t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Функция $z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k)$ определяется на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$ соотношениями:

$$z(t; v^1, \ldots, t_{k-1}, v^k) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg(\psi(\tau, z(\tau; v^1, \ldots, t_{k-1}, v^k), u^k(\tau, v^k),$$
$$\int\limits_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s; v^1, \ldots, t_{k-1}, v^k), u(s)) ds \Bigg) d\tau, \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k.$$

Таким образом, можно определить функцию

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N) = g(z(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N)).$$

В приведенных обозначениях задача ОУ (2.23)–(2.25) формально аппроксимируется задачей НП (2.7). Для применения методов первого порядка к задаче (2.7) необходимо вычисление первых производных функции $\varphi(w^1, \ldots, w^N)$. Поскольку данная функция задана опосредованно, то вычисление производных нетривиально.

Для решения этой проблемы введем

$$q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad h(t, s, x, u) = \frac{\partial f(t, s, x, u)}{\partial t}.$$

Определим функцию

$$H(t, x, q, u, p_x, p_q) = \langle p_x(t), \psi(t, x, u, q) \rangle + \langle p_q(t), f(t, t, x, u) \rangle +$$
$$+ \int\limits_{t}^{T} \langle p_q(s), h(s, t, x, u) \rangle \, ds;$$

и сопряженную систему

$$\dot{p}_x(t) = -\left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} \right]^T p_x(t) -$$
$$- \left[\frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(t) - \int\limits_{t}^{T} \left[\frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(s) ds;$$

$$\dot{p}_q(t) = -\left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right]^T p_x(t);$$

$$p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}; \quad p_q(T) = 0.$$

Теорема 2.4 ([12, 14]). *Пусть функции f, g, ψ, входящие в постановку задачи* (2.23)–(2.25)*, непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче* (2.7) *верны формулы:*

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial t_k} = H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k-0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - $$
$$- H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k+0), p_x(t_k), p_q(t_k));$$
$$\frac{\partial\varphi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial T} = H(T, x(T), q(T), u(T), p_x(T), p_q(T));$$
$$\frac{\partial\varphi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), q(\tau), u(\tau), p_x(\tau), p_q(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(\tau, v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} d\tau.$$

Теорема 2.4 позволяет построить алгоритм вычисления производных в задаче НП (2.7), аппроксимирующей задачу ОУ с распределенным запаздыванием (2.23)–(2.25).

Таким образом, Теоремы 2.1-2.4 позволяют сформировать единый подход к численному решению задач ОУ с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания. Реализация алгоритмов, реализующих метод параметризации для задач ОУ как с запаздыванием, так и без запаздывания, может быть концептуально решена в рамках единого программного комплекса.

3. Концепция программного комплекса

Единый концептуальный подход, предлагаемый в методе параметризации, определяет основные положения, описывающие структуру программного комплекса и соответствующий набор функций. Отметим, что существующие инструменты решения ЗОУ не учитывают функциональную разницу между ролью разработчика (исследователя) модели и ролью пользователя модели. Причины этого заключаются в том, что актуальные методы решения ЗОУ требуют достаточно высокого уровня входа не только от разработчика модели, но и от пользователя модели. Более того, математическое представление модели и методы решения тесно интегрированы, оказывая взаимное влияние друг на друга.

Применение метода параметризации позволяет разделить роли разработчика (исследователя) модели и пользователя модели. Разработчик модели выбирает математический вид задачи ОУ: со связями в виде ОДУ без запаздывания; с точечным запаздыванием в фазовых и/или управляющих переменных; с распределенным запаздыванием в фазовых и/или управляющих переменных. Также к функциям роли разработчика относятся: ввод уравнений модели; ввод промежуточных и терминальных ограничений; индентификация параметров модели; ввод целевого функционала задачи в терминальной форме; ввод частных производных функций, входящих в исходную постановку задачи ОУ. Роль пользователя модели относится к процессу решения задачи ОУ, в ходе решения пользователь может: менять параметрическое представление управляющих функций; менять значение параметров модели; выбирать сценарий решения задачи НП, порожденной методом параметризации; обрабатывать отчеты, полученные при решении задачи. Ниже приведен общий алгоритм действий пользователей программного комплекса: разработчика модели, пользователя модели.

Общий алгоритм действий пользователей программного комплекса:

S1. Ввести структурные параметры задачи: размерность фазовой переменной, размерность управляющей переменной.
S2. Если задача ОУ без запаздывания, то переход к S3, иначе к S4.
S3. Ввести: параметры задачи; дифференциальные уравнения; частные производные функций, описывающих ОДУ; целевой функционал. Переход к S7.
S4. Если запаздывание точечное, то переход к S5, иначе S6.
S5. Ввести: лаг запаздывания; параметры задачи; дифференциальные уравнения с запаздыванием; частные производные функций, описывающих ДУ; целевой функционал. Переход к S7.
S6. Ввести: параметры задачи; дифференциальные уравнения; частные производные функций, описывающих ИДУ; целевой функционал.
S7. Ввести: размерность структуры параметризации управления; параметрическое представление управления.
S8. Создать сценарий решения задачи НП; настроить параметры отчета. Запустить выполнение сценария.
S9. Проанализировать отчет. Если решение удовлетворяет пользователя, то переход к S10, иначе переход к S7.
S10. Задача решена.

В приведенном алгоритме пункты S1-S6 относятся к действиям разработчика модели, пункты S7-S10 к действиям пользователя модели.

В методе параметризации переменные задачи НП, аппроксимирующей исходную задачу ОУ, не связаны с дискретной схемой решения задач Коши. Это позволяет в рамках программного комплекса применять независимые библиотеки решения задач НП и решения задач Коши. Следовательно, появляется возможность строить различные сценарии решения задач НП, применять методы условной и безусловной оптимизации, не опираясь на дискретные схемы решения задач Коши. В свою очередь, независимо можно применять различные дискретные схемы решения задач Коши, не связывая их с задачей НП, т. к. они не влияют на структуру и вид задачи НП.

В рамках программного комплекса реализуется несколько подходов к реализации алгоритма вычисления производных целевой функции: на основе решения задач Коши для прямой и сопряженной систем (требуется реализация методов решения задач Коши для систем с точечным запаздыванием, распределенным запаздыванием, без запаздывания) и последующего численного интегрирования; аппроксимация на основе конечных разностей; комбинация разностного дифференцирования и решения задач Коши для прямой и сопряженной систем.

В методе параметризации управляющая функция представляется в виде обобщенного сплайна. Структура управления определяется пользователем модели и не зависит от формы задачи ОУ, а также вида уравнений, описывающих динамику. Таким образом, в рамках программного комплекса реализуется единый подход к параметрическому представлению управляющих функций.

Можно определить основные характеристики программного комплекса:

– выделение роли разработчика модели и роли пользователя модели;

– независимость модуля для решения задачи НП и модуля решения задач Коши;

– расширяемая модульная архитектура, позволяющая добавлять новые модули решения НП и модули решения задач Коши в виде библиотек;

– единый модуль параметрического представления управления;

– единый концептуальный подход к решению задач ОУ с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания.

4. Вычислительные эксперименты

П р и м е р 4.1. В [15] рассмотрена задача с особым оптимальным управлением:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = 3x_2, \quad \dot{x}_2 = 2u, \quad x_1(0) = -7, \quad x_2(0) = 3, \\ |u(t)| \leqslant 1, \\ J(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min .\end{gathered} \tag{4.1}$$

Для задачи (4.1) в классе непрерывных управлений существует оптимальное $u^*(t)$ $(J(u^*(\cdot)) = 0)$:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < 1; \\ t-2, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Задача (4.1) решалась методом параметризации в [13], для этого она трансформировалась к виду:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = 3x_2, \quad \dot{x}_2 = 2u, \quad \dot{x}_3 = \Big([u-1]^+\Big)^2 + \Big([-u-1]^+\Big)^2; \\ x_1(0) = -7, \quad x_2(0) = 3, \quad x_3(0) = 0, \quad x_3(2) = 0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Управление рассматривалось в классе непрерывных кусочно-линейных функций

$$u(t) = \begin{cases} v_{11} + v_{12}t, & 0 \leq t < \tau; \\ v_{21} + v_{22}t, & \tau \leq t \leq 2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Таким образом решалась задача НП относительно коэффициентов $(v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$ и момента переключения τ. Соответственно, введен функционал

$$J(u, c_1, c_2) = x_1^2(2) + x_2^2(2) + c_1 x_3(2) + c_2(v_{11} + v_{12}\tau - v_{21} - v_{22}\tau)^2. \tag{4.4}$$

Здесь c_1, c_2 – коэффициенты штрафа.

Задача безусловной минимизации (4.2)–(4.4) решалась методами: градиентным методом (проекции градиента, МПГ), методом Дэвидона-Флэтчера-Пауэлла (ДФП), методом Ньютона (МН). В качестве начального приближения принималось: $v_{11} = -0.5$, $v_{12} = 0$, $v_{21} = 0.5$, $v_{22} = 0$, $\tau = 1$, параметры штрафа $c_1 = c_2 = 100$. Значение функционала при этом приближении $J(u, 100, 100) = 173$. Все задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования $0,1$.

При применении МПГ, ДФП, МН использовались следущие условия окончания итерационного процесса: если норма градиента меньше 10^{-10}; если приращение аргумента меньше 10^{-10}; если достигается предельное количество итераций (для МПГ и ДФП 1000, для МН 15). Итерационный процесс останавливался, когда выполнялся хотя бы один из критериев.

При решении методом МПГ после 20 итераций было получено решение: $J(u) = 0,36$. После этого, уменьшение значения функционала на каждой итерации было менее одного процента. После 210 итераций процесс был остановлен. При решении методом ДФП после 18 итераций процесс был остановлен, было получено решение: $J(u) = 0,14637$. При решении методом МН процесс был остановлен после 8 итераций, было получено решение: $J(u) = 1,73 \cdot 10^{-11}$. Все решения приведены в таблице 4.1, в последней строке указаны коэффициенты оптимального управления задачи (4.1).

Таблица 4.1. Параметры оптимального решения при различных методах НП

Table 4.1. Parameters of the optimal solution for various NP methods

метод	v_{11}	v_{12}	τ	v_{21}	v_{22}	$J(u)$
МПГ	$-1,06139$	$0,24723$	$1,57807$	$-0,04631$	$-0,39538$	$0,20703$
ДФП	$-1,05512$	$0,24724$	$1,99360$	$-0,04631$	$-0,26435$	$0,14637$
МН	$-1,00000$	$1,3 \times 10^{-4}$	$1,00048$	$-2,00096$	$1,00060$	$1,7 \times 10^{-11}$
точное решение	-1	0	1	-2	1	0

Из Таблицы 4.1 можно сделать вывод, что наилучшее решение по значению функционала получается при решении методом Ньютона, наихудшее методом проекции градиента. Если сравнить максимальное отклонение получаемого управления от оптимального $u^*(t)$, то ситуация аналогична: для МПГ – $0,837$, ДФП – $0,575$, МН – $0,0002$. Таким образом, метод параметризации является работоспособным при применении различных методов НП; при использовании производных второго порядка получается гораздо лучшее приближение.

П р и м е р 4.2. Рассмотрим тестовую задачу, приведенную в [14] (h – лаг запаздывания):

$$\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_1(t) - u_1(t) + u_2(t);\\ &\dot{x_2} = (2x_1(t) - 2u_1(t-h) + 4u_2(t-h) - u_1(t))^2\\ &\qquad +(x_1(t) - u_1(t-h) + 2u_2(t-h) - u_2(t))^2;\\ &x_1(0) = -h + h^2,\ x_2(0) = 0,\ u_1(t) = 3 + 4t,\ u_2(t) = 1 + t,\ t \in [-h; 0);\\ &x_2(1) \to \min . \end{aligned} \tag{4.5}$$

В задаче ОУ (4.5) вырождается принцип максимума Понтрягина, целевой функционал ограничен снизу нулем. Задача (4.5) решалась методом параметризации в классе кусочно-линейных и кусочно-квадратичных управлений с одним и двумя моментами переключений. Лаг запаздывания h варьировался. Полученная задача НП решалась градиентным методом и методом Ньютона последовательно. Производные первого порядка вычислялись на основе формул, приведенных в Теореме 2.3, матрица Гессе вычислялась на основе разностной аппроксимации градиентами, построенными по формулам, приведенным в Теореме 2.3. Результаты экспериментов представлены в таблице 4.2.

Первый столбец Таблицы 4.2 описывает вид параметризации, второй столбец модельные лаги запаздывания системы. Основные данные таблицы – значения функционала решаемой задачи ОУ, они приведены при трёх шагах интегрирования (0, 01; 0, 005;

$0,001$). Задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка, интегралы методом Симпсона.

Задача НП решалась методом скорейшего спуска (МСС) и методом Ньютона (МН) последовательно. В сценарии такая процедура запускалась пятикратно. При применении МСС, МН использовались следущие условия окончания итерационного процесса: если норма градиента меньше 10^{-10}; если приращение аргумента меньше 10^{-10}; если достигается предельное количество итераций (для МСС 100, для МН 15). Итерационный процесс останавливался, когда выполнялся хотя бы один из критериев. При фиксированной параметризации управления и фиксированном лаге запаздывания использовалось одинаковое начальное приближение перед запуском сценария для разных шагов интегрирования. При усложнении параметризации управления начальное приближение выбиралось исходя из решения, полученного в более простой параметризации.

Таблица 4.2. Значение функционала в задаче (4.5)

Table 4.2. The meaning of the functionality in the problem (4.5)

Параметризация управления	h	Δt		
		0,01	0,005	0,001
линейное управление с одним моментом переключения	$0,1$	$3,0594 \cdot 10^{-7}$	$2,8670 \cdot 10^{-7}$	$2,7797 \cdot 10^{-7}$
	$0,3$	$6,8041 \cdot 10^{-5}$	$6,7493 \cdot 10^{-5}$	$6,7307 \cdot 10^{-5}$
	$0,5$	$8,4106 \cdot 10^{-4}$	$8,6700 \cdot 10^{-4}$	$8,3637 \cdot 10^{-4}$
линейное управление с двумя моментами переключения	$0,1$	$2,5100 \cdot 10^{-8}$	$1,9245 \cdot 10^{-8}$	$1,7526 \cdot 10^{-8}$
	$0,3$	$4,4043 \cdot 10^{-6}$	$4,2653 \cdot 10^{-6}$	$4,2200 \cdot 10^{-6}$
	$0,5$	$5,4889 \cdot 10^{-5}$	$5,4278 \cdot 10^{-5}$	$5,4051 \cdot 10^{-5}$
квадратичное управление с одним моментом переключения	$0,1$	$1,2023 \cdot 10^{-9}$	$7,7235 \cdot 10^{-11}$	$1,4670 \cdot 10^{-13}$
	$0,3$	$3,7005 \cdot 10^{-9}$	$2,3301 \cdot 10^{-10}$	$3,7583 \cdot 10^{-13}$
	$0,5$	$6,1816 \cdot 10^{-9}$	$3,9196 \cdot 10^{-10}$	$4,4879 \cdot 10^{-12}$

В этом примере аналитическое решение неизвестно, качество решения определяется целевым функционалом, ограниченным снизу нулем. Анализ данных в Таблице 4.2 показывает, что процесс решения задачи ОУ методом параметризации является устойчивым: с усложнением структуры параметризации управления улучшается решение задачи. Наилучшее решение получается при кусочно квадратичной параметризации управляющих функций. При этом шаг интегрирования слабже влияет на качество решения. Усложнение структуры параметризации прекращается тогда, когда достигается необходимая точность, что определяется пользователем модели.

П р и м е р 4.3.

Рассмотрим тестовую задачу ОУ с распределенным запаздыванием из [12]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + \int\limits_0^t (tu(s) + x_1(s) + 1 - s - t)\exp\{s(t-s)\}ds, \\ \dot{x}_2(t) = \left(tx_1(t) - u(t) - t^2 + t + 1\right)^2, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_2(1) \to \inf. \end{cases} \tag{4.6}$$

Оптимальное решение задачи: $u^*(t) = t\exp\{t^2\} + 1$, $x_1^*(t) = \exp\{t^2\} - 1 + t$, $x_2^*(t) \equiv 0$; целевой функционал равен нулю.

Задача (4.6) решалась методом параметризации в классе кусочно-линейных управлений и кусочно-квадратичных управлений с одним и двумя моментами переключений. Все задачи НП решались методом Ньютона, матрица вторых производных вычислялась на основе градиентов разностными аппроксимациями. Градиенты вычислялись по формулам, представленным в Теореме 2.4. При применении метода Ньютона использовались следующие условия окончания итерационного процесса: если норма градиента меньше 10^{-10}; если приращение аргумента меньше 10^{-10}; если достигается предельное количество итераций 15. Итерационный процесс останавливался, когда выполнялся хотя бы один из критериев. При фиксированной параметризации управления использовалось одинаковое начальное приближение в задаче НП для разных шагов интегрирования. При усложнении параметризации управления начальное приближение выбиралось исходя из решения, полученного в более простой параметризации. Результаты решения приведены в Таблице 4.3.

Первый столбец Таблицы 4.3 описывает вид параметризации; столбец Δt – шаг интегрирования задач Коши (интегрирование выполнялось методом Рунге-Кутты 2-го порядка); столбец J содержит значения целевого функционала в задаче (4.6); $\Delta u = \max\limits_{k \in K} |u^*(t_k) - u(t_k)|$; $\Delta x_1 = \max\limits_{k \in K} |x_1^*(t_k) - x_1(t_k)|$.

Таблица 4.3. Значение функционала в задаче (4.6)

Table 4.3. The meaning of the functionality in the problem (4.6)

Параметризация управления	Δt	J	Δu	Δx_1
линейное управление с одним моментом переключения	0,005	0,002652	0,164	0,0068
	0,01	0,002663	0,164	0,0068
	0,05	0,002705	0,163	0,0067
линейное управление с двумя моментами переключения	0,005	0,000502	0,070	0,0023
	0,01	0,000507	0,070	0,0020
	0,05	0,000525	0,070	0,0019

Параметризация управления	Δt	J	Δu	Δx_1
квадратичное управление с одним моментом переключения	0,005	0,000063	0,025	0,0007
	0,01	0,000064	0,026	0,0006
	0,05	0,000075	0,032	0,0013
квадратичное управление с двумя моментами переключения	0,005	0,000019	0,016	0,0004
	0,01	0,000011	0,008	0,0005
	0,05	0,000023	0,010	0,0022

Анализируя данные таблицы 4.3, можно отметить, что процесс решения методом параметризации является устойчивым: численное решение сходится к оптимальному с усложнением структуры параметризации; влияние шага интегрирования менее значительно. Выбор приемлемой точности решения задачи ОУ определяется пользователем модели.

5. Заключение

В работе предлагается концепция построения программного комплекса для численного решения задач ОУ. Концепция строится на особенностях развиваемого авторами метода параметризации. Специфика метода позволяет в рамках единого подхода решать задачи ОУ с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания. В работе приведены результаты численных экспериментов с различными типами задач ОУ, в которых подтверждается эффективность предлагаемого подхода к созданию программного комплекса.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00542 (URL: https://rscf.ru/project/24-28-00542/).

Список литературы

1. Федосеев С. А., Горбунов Д. Л. Алгоритм оптимального управления замкнутой системой рынка труда на заданном временном интервале // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24. № 1. С. 96–105. DOI: https://doi.org/10.14529/ctcr240109

2. Корсун О. Н., Стуловский А. В. Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019.Т. 58, № 2. С. 75–89.

3. Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. вып. 2. С. 264–273. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273

4. Eichmeir P., Nachbagauer K., Laub T., Sherif K., Steiner W. Time-optimal control of dynamic systems regarding final constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16. no. 3. 12 p. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4049334

5. Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on numerical methods for solving optimal control problems // IEEJ Journal of Industry Applications. J-STAGE. 2016. Vol. 5, no. 2. pp. 154–166. DOI: https://doi.org/10.1541/ieejjia.5.154

6. Горнов А. Ю. Классификация проблем, возникающих при численном решении задач оптимального управления // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № S1. С. 17–26.

7. Rodrigues H. S., Monteiro M. T. T., Torres D. F. M. Optimal control and numerical software: an overview // Syst. Theory Perspect. Appl. Dev. 2014. pp. 93–110.

8. Ozana S., Docekal T., Nemcik J., Krupa F., Mozaryn J. A comparative survey of software computational tools in the field of optimal control // 23rd International Conference on Process Control (PC). 2021. DOI: https://doi.org/10.1109/PC52310.2021.9447510

9. Rao A. V. Trajectory optimization: a survey // Optimization and optimal control in automotive systems. Cham. Springer. 2014. pp. 3–21. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-05371-4_1

10. Сороковиков П. С., Горнов А. Ю. Пакет программ MEOPT для решения невыпуклых задач параметрической идентификации // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2022. № 2. С. 53–60. DOI: https://doi.org/10.38028/ESI.2022.26.2.005

11. Горбунов В. К. Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19, № 2. С. 292–303.

12. Лутошкин И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации // Известия Иркутского государственного университета. Сер. «Математика». 2011. Т. 4, № 1. С. 44–56.

13. Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67–84.

14. Лутошкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа : монография. Ульяновск: УлГУ, 2024. 188 с.

15. Антоник В. Г., Срочко В. А. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 4. С. 564–572.

Поступила 01.06.2024; доработана после рецензирования 10.07.2024; принята к публикации 28.08.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. S. A. Fedoseev, D. L. Gorbunov, "An algorithm for optimal control of a closed labor market system at a given time interval", *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, **24**:1 (2024), 96–105. DOI: https://doi.org/10.14529/ctcr240109 (In Russ.).
2. O. N. Korsun, A. V. Stulovskii, "Direct method for forming the optimal open loop control of aerial vehicles", *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **58**:2 (2019), 229–243.
3. I. V. Lutoshkin, M. S. Rybina, "Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease", *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, **23**:2 (2023), 264–273. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273 (In Russ.).
4. P. Eichmeir, K. Nachbagauer, T. Laub, K. Sherif, W. Steiner, "Time-optimal control of dynamic systems regarding final constraints", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **16**:3 (2021), 12. DOI: https://doi.org/10.1115/1.404933476.
5. F. Biral, E. Bertolazzi, P. Bosetti, "Notes on numerical methods for solving optimal control problems", *IEEJ Journal of Industry Applications. J-STAGE*, **5**:2 (2016), 154–166. DOI: https://doi.org/10.1541/ieejjia.5.154.
6. A. Y. Gornov, "Classification of problems arising in numerical studies of the optimal control problems", *Computational Technologies*, **13**:S1 (2008), 17–26 (In Russ.).
7. H. S. Rodrigues, M. T. T. Monteiro, D. F. M. Torres, "Optimal control and numerical software: an overview", *Syst. Theory Perspect. Appl. Dev.*, 2014, 93–110.
8. S. Ozana, T. Docekal, J. Nemcik, F. Krupa, J. Mozaryn, "A comparative survey of software computational tools in the field of optimal control", *23rd International Conference on Process Control (PC)*, 2021. DOI: https://doi.org/10.1109/PC52310.2021.9447510.
9. A. V. Rao, "Trajectory optimization: a survey", *Optimization and optimal control in automotive systems*, 2014, 3–21. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-05371-4_1.
10. P. S. Sorokovikov, A. Yu. Gornov, "MEOPT software package for solving non-convex problems of parametric identification", *Information and Mathematical Technologies in Science and Management*, 2022, no. 2, 53–60. DOI: https://doi.org/10.38028/ESI.2022.26.2.005 (In Russ.).
11. V. K. Gorbunov, "[Parameterization method for optimal control problems]", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **19**:2 (1979), 292–303 (In Russ.).
12. I. V. Lutoshkin, "The parameterization method for optimizing the systems which have integro-differential equations", *Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics*, **4**:1 (2011), 44–56 (In Russ.).

13. V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, "Development and experience of using the parameterization method in singular problems of dynamic optimization", *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **43**:5 (2004), 725–742.

14. I. V. Lutoshkin, *Dynamic models of economic systems and methods of their analysis*, UlSU Publ., Ulyanovsk, 2024 (In Russ.), 188 p.

15. V. G. Antonik, V. A. Srochko, "The projection method in linear-quadratic problems of optimal control jour computational mathematics and mathematical physics", **38**:4 (1998), 564–572 (In Russ.).

Submitted 01.06.2024; Revised 10.07.2024; Accepted 28.08.2024

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.