

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.157-174

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:539.3

**Континуальная модель перидинамики для задач хрупкого разрушения****Ю. Н. Дерюгин, Д. А. Шишканов***ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», (г. Саранск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В статье проводится исследование нелокального метода перидинамики, который позволяет моделировать хрупкое разрушение твердого тела без использования пространственных производных. Основное уравнение движения частицы с заданным объемом записывается в интегральном виде. В статье рассматривается модель, сочетающая в себе ключевые особенности механики сплошной среды и нелокального метода. Для задания сил межчастичного взаимодействия использовалась зависимость тензора напряжений Коши от тензора градиента скорости деформаций. Такая формулировка корректно описывает поведение материала при разрушении и позволяет избавиться от ограничений, свойственных простым моделям на основе связи и на основе обычного состояния. В качестве критерия разрушения используется максимальное значение напряжения при растяжении, которое задает процесс зарождения и эволюцию повреждений. Для тестирования реализованной модели использовались задачи в двумерной постановке. На примере упругой задачи об одноосном растяжении тонкого стержня показана сходимость численного решения при уменьшении горизонта взаимодействия и увеличении числа частиц. Вторая задача демонстрирует возможности реализованной модели описывать зарождение и эволюцию трещины при одноосной нагрузке на пластину с начальным горизонтальным дефектом.

**Ключевые слова:** перидинамика, нелокальное взаимодействие, горизонт взаимодействия, связь, критерий разрушения, тензор градиента деформаций

**Для цитирования:** Дерюгин Ю. Н., Шишканов Д. А. Континуальная модель перидинамики для задач хрупкого разрушения // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 157–174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.157-174>

*Об авторах:*

**Дерюгин Юрий Николаевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Шишканов Дмитрий Алексеевич**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

© Ю. Н. Дерюгин, Д. А. Шишканов



MSC2020 74B05 74R10

# Continuum Model of Peridynamics for Brittle Fracture Problems

Yu. N. Deryugin, D. A. Shishkanov

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** The article investigates the nonlocal method of peridynamics, which makes it possible to simulate the brittle fracture of a solid body without using spatial derivatives. The basic motion equation of a particle with a given volume is written in integral form. A model combining the key features of continuum mechanics and of the nonlocal method is considered. To determine the forces of pair interaction, the dependence of the Cauchy stress tensor on the rate-of-strain tensor was used. This formulation correctly describes the behavior of the material during damage and allows to get rid of the limitations inherent to simple bond-based model and ordinary state-based model. The maximum value of the tensile stress is used as a criterion of fracture, which describes the process of nucleation and evolution of damage. To test the implemented model, tasks in a two-dimensional formulation were used. Using the example of the elastic problem about uniaxial tension of a thin rod, the convergence of the numerical solution is shown with a decrease of interaction horizon and an increase of particles number. The second task demonstrates the capabilities of the implemented model to describe the nucleation and evolution of a crack under uniaxial load on a plate with an initial horizontal defect.

**Keywords:** peridynamic, nonlocal interactions, interaction horizon, bond, fracture criterion, strain gradient tensor

**For citation:** Yu. N. Deryugin, D. A. Shishkanov. Continuum Model of Peridynamics for Brittle Fracture Problems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:2(2024), 157–174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.157-174>

*About the authors:*

**Yuriy N. Deryugin**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Dmitry A. Shishkanov**, Postgraduate Student of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

## 1. Введение

Статья является продолжением исследования метода перидинамики [1–2] – альтернативного подхода для решения задач механики твердых тел. Формулировка перидинамики построена на использовании интегральных уравнений, избегая пространственных производных [3]. Область континуума задается в виде системы взаимодействующих между собой частиц с заданным объемом. Взаимодействие частиц осуществляется посредством связи в пределах замкнутого горизонта – масштаба длины  $\delta$ .

Non-ordinary state-based (NOSB) модель перидинамики [4] является обобщением подходов, рассмотренных в [1]. Она использует формулировку классической теории и перидинамики, которая позволяет избавиться от ограничений, свойственных моделям bond-based (BB) и ordinary state-based (OSB) [1–2]. Зависимость вектора силы частицы от тензоров деформаций и напряжений позволяет задавать любое направление действия силы, что гораздо более реалистично для моделирования континуума.

В нелокальной теории точность вычисления тензоров зависит от расстояния между частицами  $\Delta x$  и горизонта взаимодействия  $\delta$ . Согласно теории сходимости [5], уравнения перидинамики превращаются в уравнения механики сплошной среды (МСС) при уменьшении  $\delta$ . Предельные численные решения этих уравнений также будут совпадать при увеличении числа частиц дискретной модели и измельчении сетки в МСС. В задачах разрушения для получения корректного результата моделирования при минимально возможных вычислительных затратах рекомендуется использовать  $\delta \approx 3\Delta x$  [6].

Исследование, проведенное в данной работе, заключается в реализации и тестировании NOSB модели перидинамики на примере двумерных задач упругости и разрушения. В качестве критерия разрушения используется максимальное значение напряжения при растяжении [7].

## 2. Метод перидинамики

Теория перидинамики была введена Силингом [3] как способ решения задач механики твердого тела без использования пространственных производных, основываясь на интегральных уравнениях. Твердое тело представляется в виде системы взаимодействующих между собой частиц с заданными массой —  $m_i$ , плотностью —  $\rho_i$ , начальными координатами —  $\vec{r}_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$ . Каждая дискретная частица  $\vec{r}_i$  взаимодействует с другими частицами  $\vec{r}_k$  на конечном расстоянии  $\vec{\xi}_i = \vec{r}_k - \vec{r}_i$  посредством связи в пределах замкнутого горизонта —  $\delta$ . Движение деформируемой среды описывается векторами относительных смещений  $\vec{\eta}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$  и векторами относительных положений  $\vec{Y}_i = \vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i$ .

Уравнение движения частицы  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  задается в виде

$$\rho_i \ddot{\vec{u}}(\vec{r}_i, t) = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k - \vec{u}_i, \vec{r}_k - \vec{r}_i) dV_{\vec{r}_k} + \vec{b}(\vec{r}_i, t), \quad (2.1)$$

где  $\vec{b}$  — граничные условия.

Выделяют две основные формулировки перидинамики — на основе связи (bond-based) [3, 8] и на основе состояний (state-based) [4, 9]. Модель на основе состояний в свою очередь подразделяется на ordinary state-based (OSB) и NOSB. NOSB модель обобщает рассмотренные ранее PMB и LPS модели [1, 2]. Более подробно теория перидинамики представлена в [10, 11].

## 3. NOSB модель

Рассматриваемая модель основана на вычислении вектора силы каждой частицы в связи [7, 12, 13]. Описание модели начинается с задания энергии деформирования, как и в МСС. Для упругих деформаций:

$$W_i = \frac{\lambda_i}{2} \sum_k E_{kk}^i E_{kk}^i + G_i \sum_{m,l} E_{ml} E_{ml}, \quad (3.1)$$

где  $\lambda_i = K_i - \frac{2}{3}G_i$  — коэффициенты Ламэ;  $K_i$  — объемный модуль упругости;  $G_i$  — модуль сдвига;  $E_i$  — упругий тензор деформаций Грина:

$$E_i = \frac{1}{2} (F_i^T F_i - I), \quad (3.2)$$

где  $F_i^T F_i$  — упругий тензор деформаций Коши-Грина;  $I$  — единичная матрица;  $F_i$  — тензор градиента деформаций:

$$F_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) (\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i) \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}, \quad (3.3)$$

где  $\omega(|\vec{\xi}_i|)$  — функция влияния в виде кубического сплайна 3.5;  $K_i$  — шаровой тензор деформаций:

$$K_i = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) (\vec{\xi}_i \otimes \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}, \quad (3.4)$$

$$\omega(|\vec{\xi}_i|) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3, & d \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3, & \frac{1}{2} < d \leq 1, \\ 0, & d > 1, \end{cases} \quad d = \frac{|\vec{\xi}_i|}{\delta}, \quad (3.5)$$

Тензор напряжений для системы координат начального состояния (второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа) определяется по закону Гука 3.6. Симметричный тензор напряжений в деформированном состоянии (тензор напряжений Коши) записывается в виде 3.7.

$$S_i = \frac{\partial W_i}{\partial E_i} = \lambda_i \text{Tr}(E_i) g_{kl} + 2G_i E_i, \quad (3.6)$$

где  $g_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$  — дельта-функция,

$$\sigma_i = F_i \left( \frac{1}{\det(F_i)} S_i \right) F_i^T. \quad (3.7)$$

Вычисление  $\sigma_i$  относительно начальной конфигурации (3.2), (3.6), (3.7) используется для описания малых упругих деформаций [13]. Преобразование напряжения из начальной конфигурации в деформируемую конфигурацию некорректно описывает поведение материала при хрупком разрушении. В данной работе для описания кинематики частицы используется тензор градиента скорости деформаций [14]. Тензор напряжений Коши записывается в виде (3.11).

Тензор градиента скорости деформаций задается в виде:

$$L_i = \dot{F}_i F_i^{-1}, \quad (3.8)$$

где  $\dot{F}_i$  — производная тензора градиента деформаций по времени:

$$\dot{F}_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) \dot{Y}_i \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}. \quad (3.9)$$

Симметричная часть тензора градиента скорости описывает скорость тензора деформаций:

$$d_i = \frac{1}{2} (L_i + L_i^T). \quad (3.10)$$

Тензор напряжений Коши обновляется на каждом временном шаге:

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + \Delta\sigma_i, \quad (3.11)$$

где  $\Delta\sigma_i$  — тензор приращения напряжений 3.12.

Тензор приращения напряжений  $\Delta\sigma_i$  (3.12) получается в зависимости от тензора приращения деформаций  $\Delta E_i$  (3.13).

$$\Delta\sigma_i = \lambda_i Tr(\Delta E_i) g_{kl} + 2G_i \Delta E_i \quad (3.12)$$

$$\Delta E_i = d_i \cdot \Delta t \quad (3.13)$$

Подставляя (3.8) и (3.10) в (3.13), получаем (3.14) — зависимость  $\Delta E_i$  от тензора приращения градиента деформаций  $\Delta F_i$  (3.15).

$$\Delta E_i = \frac{1}{2} (\Delta F_i F_i^{-1} + F_i^{-T} \Delta F_i^T), \quad (3.14)$$

$$\Delta F_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) \Delta \vec{Y}_i \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}, \quad (3.15)$$

где  $\Delta \vec{Y}_i = \Delta \vec{u}_k - \Delta \vec{u}_i$  — приращение относительного положения частицы  $i$ ,  $\Delta \vec{u}_i = \Delta \vec{u}_i^{n+1} - \Delta \vec{u}_i^n$  — приращение смещения частицы  $i$ .

Вектор силы  $\vec{T}_i$  для каждой частицы в связи задается в виде:

$$\vec{T}_i = \omega(|\vec{\xi}_i|) P_i K_i^{-1} \vec{\xi}_i, \quad (3.16)$$

где  $P_i$  — первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа:

$$\vec{P}_i = J \sigma_i F_i^{-T}, \quad J = \det(F_i). \quad (3.17)$$

Тогда сила парного взаимодействия в связи  $\vec{f}_i$  для (2.1) вычисляется как

$$\vec{f}_i = \omega(|\vec{\xi}_i|) P_i K_i^{-1} \vec{\xi}_i - \omega(|\vec{\xi}_k|) P_k K_k^{-1} \vec{\xi}_k, \quad (3.18)$$

где  $i$  и  $k$  — индексы данной частицы  $\vec{r}_i$  и частицы  $\vec{r}_k$  из множества соседей  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  соответственно.

### 4. Объемы дискретных частиц

При численном интегрировании, уравнения движения (2.1) аппроксимируются дискретными объемами частиц в области  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ :

$$\rho_i \vec{u}_i^n = \sum_{k \in \mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k^n - \vec{u}_i^n, \vec{r}_k^0 - \vec{r}_i^0) \Delta V_k + \vec{b}_i^n \tag{4.1}$$

В (4.1) суммирование идет по частицам, представленным на рисунке 4.1a. В МСС область интегрирования сплошная, как показано на рисунке 4.1b. Для улучшения аппроксимации в данной работе используется корректировка объемов частиц, описанная в справочниках по перидинамике [10, 11]:

$$\Delta V_k = k(\vec{\xi}_i) \cdot \Delta x^3, \tag{4.2}$$

где  $k(\vec{\xi}_i)$  — линейная корректирующая функция:

$$k(\vec{\xi}_i) = \begin{cases} \frac{\delta + \frac{\Delta x}{2} - |\vec{\xi}_i|}{\Delta x}, & \delta - \frac{\Delta x}{2} \leq |\vec{\xi}_i| \leq \delta, \\ 1, & |\vec{\xi}_i| \leq \delta - \frac{\Delta x}{2}, \\ 0, & |\vec{\xi}_i| > \delta, \end{cases} \tag{4.3}$$

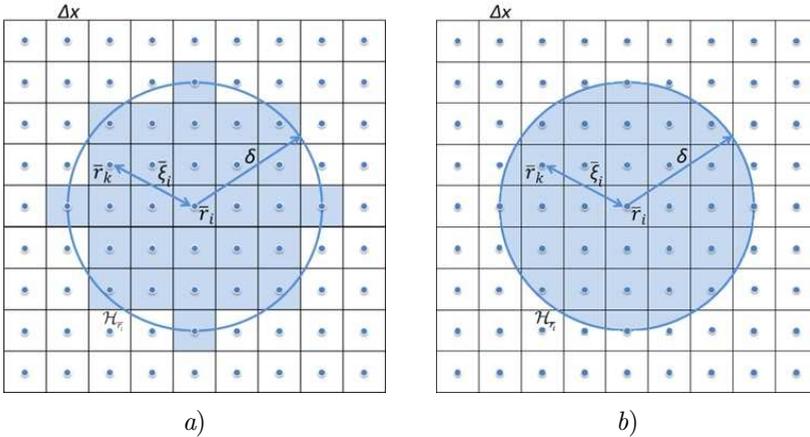


Рис. 4.1. Объемы дискретных частиц в  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ : a) — перидинамика; b) — МСС

Fig 4.1. Discret particles volumes in  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ : a) — peridynamics; b) — continuum mechanics

### 5. Повреждение и критерий разрушения

Локальное повреждение (5.1) задается в зависимости от числа разорванных связей каждой частицы в пределах ее горизонта взаимодействия и принимает значения в диапазоне  $0 \leq \phi_i \leq 1$ , где 0 означает, что материал целый, а 1 означает заверченный

разрыв связей частицы со всеми частицами, с которыми она изначально взаимодействовала [7]:

$$\phi_i = 1 - \frac{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}}{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} dV_{\vec{r}_k}}, \quad (5.1)$$

где  $\mu$  — скалярная функция положения материальной точки, которая принимает значения 1 или 0, определяется формулой

$$\mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) = \begin{cases} 1, & \sigma_{ij}^I < f_t \quad \forall 0 \leq t' \leq t \\ 0, & \sigma_{ij}^I \geq f_t \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $f_t$  — критическое значение напряжения связи, пока предполагается константой;  $\sigma_{ij}^I$  — максимальное главное напряжение (5.4), полученное из тензора:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j), \quad (5.3)$$

где  $j$  — индекс частицы из  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ .

$$\sigma_{ij}^I = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{11} + \sigma_{ij}^{22}) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ij}^{11} - \sigma_{ij}^{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{ij}^{12})^2}, \quad (5.4)$$

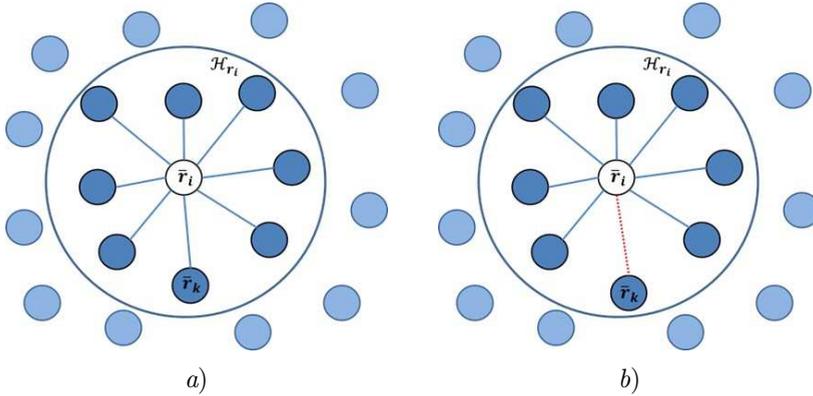
где  $\sigma_{ij}^{11}, \sigma_{ij}^{22}, \sigma_{ij}^{12}$  — компоненты тензора  $\sigma_{ij}$ .

Частица  $\vec{r}_i$  внутри  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  взаимодействует со всеми своими соседями  $\vec{r}_k$  до момента разрыва связи, как показано на рисунке 5.1a. Вектор сил двух взаимодействующих частиц в связи вычисляется в зависимости от градиента деформаций, который является функцией относительных смещений. При достижении максимальным главным напряжением  $\sigma_{ij}^I$  критического значения напряжения  $f_t$ , взаимодействие прекращается, как показано на рисунке 5.1b. После этого тензор градиента деформаций вычисляется без учета разорванной связи.

## 6. Тестовые расчеты

Перидинамика относится к числу нелокальных методов с масштабом длины  $\delta$ . Точность вычисления тензоров зависит от способа дискретизации области континуума и от выбора горизонта взаимодействия. Согласно теории сходимости [5], уравнения перидинамики превращаются в уравнения МСС при уменьшении  $\delta$ , а также при увеличении числа частиц дискретной модели и измельчении сетки в МСС. В задачах разрушения для получения корректного результата моделирования при минимально возможных вычислительных затратах рекомендуется использовать  $\delta \approx 3\Delta x$  [6].

Для тестирования нелокального метода использовались простая задача на исследование упругих свойств материала и задача разрушения хрупкого материала.



**Рис. 5.1.** Схема взаимодействующих частиц: а) — нет разорванных связей; б) — есть разорванная связь

**Fig 5.1.** Scheme of interacting particles: а) — there are no broken bonds; б) — there is a broken bond

## 7. Одноосное растяжение тонкого стержня в 2D-постановке

Тонкий стержень подвергается растяжению с левого конца при фиксированном правом. Начальная постановка задачи и аналитическое решение взяты из [13]. Используются безразмерные величины.

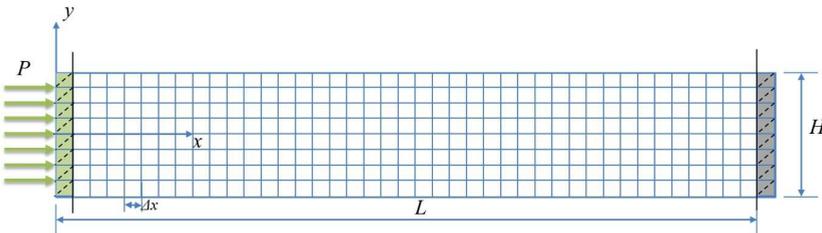
Геометрия задачи:  $0 < x < L$ ,  $-\frac{H}{2} < y < \frac{H}{2}$ ,  $L = 100$ ,  $H = 10$ .

Свойства материала: модуль Юнга  $E = 100$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0$ , плотность  $\rho = 1$ .

Граничные условия

$$w_x(x = 0, t) = 0.0001, w_x(x = L, t) = 0. \quad (7.1)$$

применяются для одного слоя частиц с каждого конца стержня как показано на рисунке 7.1. К левому концу прикладывается постоянное давление  $P = -1$ .



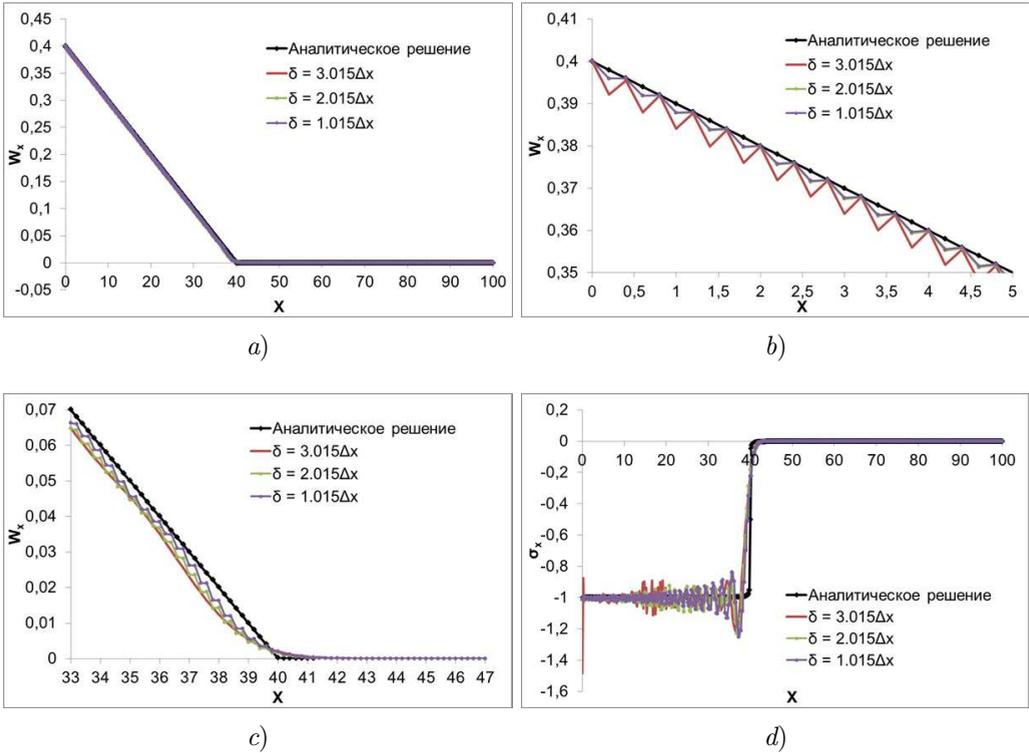
**Рис. 7.1.** Геометрия задачи и граничные условия  
**Fig 7.1.** Problem geometry and boundary conditions

Данная задача рассматривается при условии плоского напряжения. Результаты численного моделирования сравниваются с аналитическим решением из [13].

В расчетах исследуется сходимость реализованной модели для различных значений числа частиц и горизонта взаимодействия. Используются графики смещения и напря-

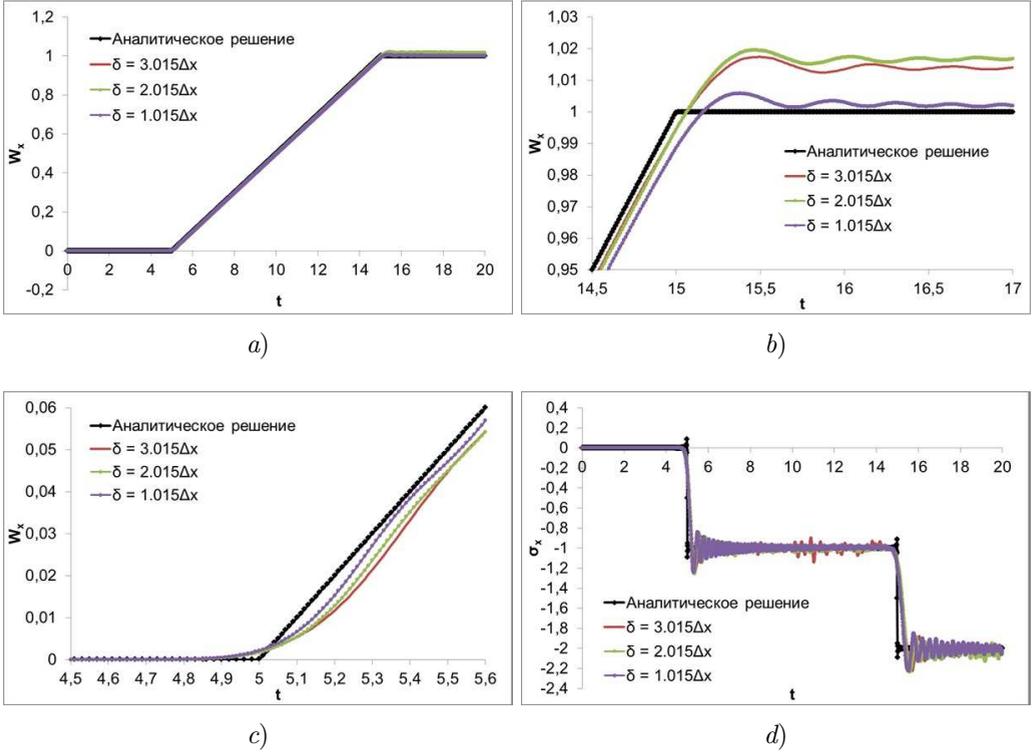
жения вдоль оси  $Ox$  на начальный момент времени (рис. 7.2, 7.5), смещения и напряжения частицы в сечении  $x = L/2$  на всем временном интервале (рис. 7.3, 7.6), а также диаграммы среднеквадратичного отклонения смещения от аналитического решения (рис. 7.4, 7.7).

В первой части расчетов варьируется горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015 \Delta x$ ,  $\delta = 2.015 \Delta x$ ,  $\delta = 1.015 \Delta x$  при фиксированном числе частиц  $N = 25551$  ( $\Delta x = 0.2$ ). Сходимость достигается при уменьшении горизонта взаимодействия (Рис. 7.5 – 7.7).

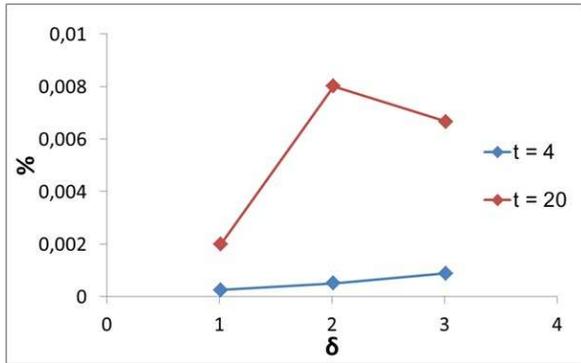


**Рис. 7.2.** Смещение (a, b, c) и напряжение (d) вдоль оси  $Ox$  в момент времени  $t = 4$  для различных  $\delta$ .

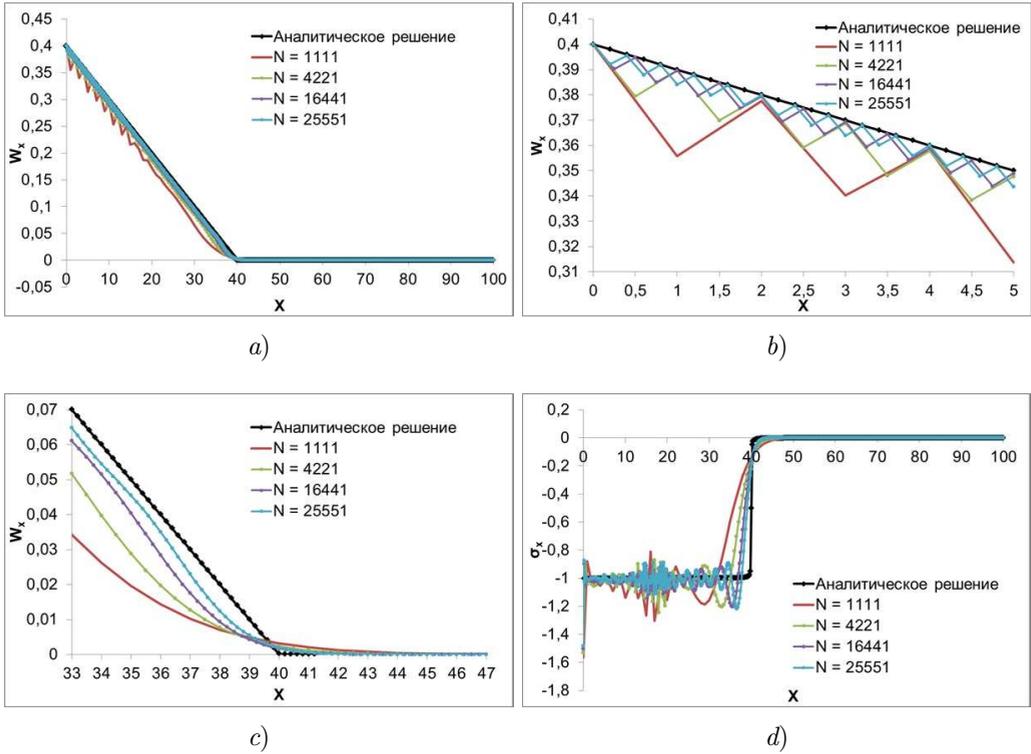
**Fig 7.2** Displacement (a, b, c) and stress (d) along the  $Ox$  axis at time  $t = 4$  for different  $\delta$



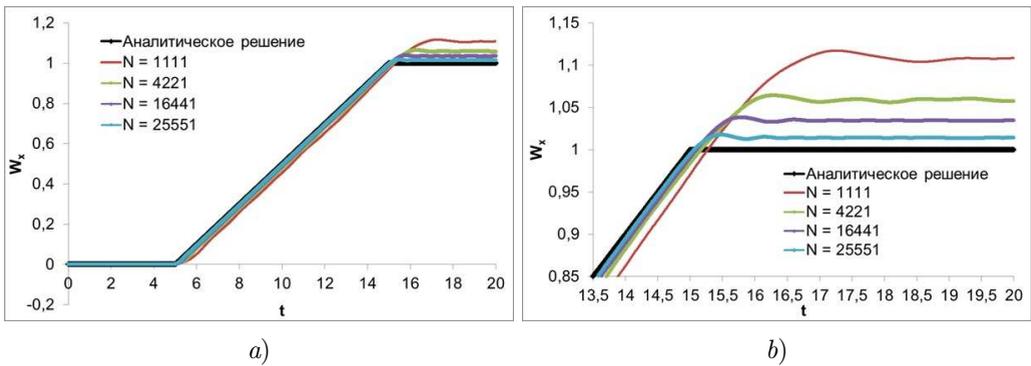
**Рис. 7.3.** Зависимость смещения (a, b, c) и напряжения (d) частицы в сечении  $x = L/2$  от времени для различных  $\delta$   
**Fig 7.3.** The dependence of the displacement (a, b, c) and stress (d) of the particle in the cross section  $x = L/2$  on time for different  $\delta$

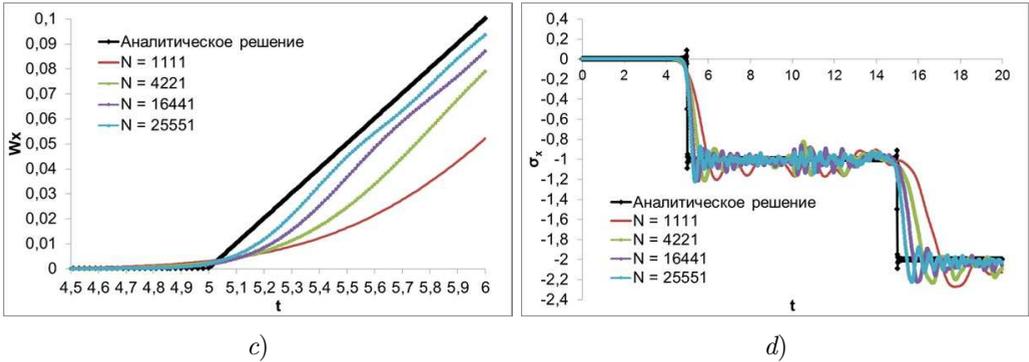


**Рис. 7.4.** График среднеквадратичного отклонения смещения частиц от эталона на времена для различных  $\delta$ :  
 1 —  $\delta = 1.015\Delta x$ , 2 —  $\delta = 2.015\Delta x$ , 3 —  $\delta = 3.015\Delta x$   
**Fig 7.4.** Mean-square deviation graph of particle displacement from analytical solution for times for different  $\delta$ :  
 1 —  $\delta = 1.015\Delta x$ , 2 —  $\delta = 2.015\Delta x$ , 3 —  $\delta = 3.015\Delta x$

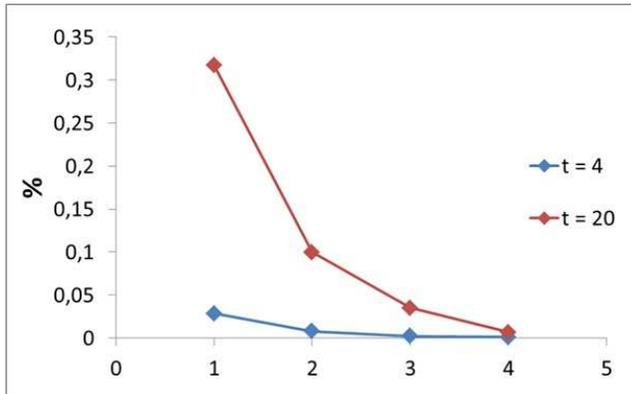


**Рис. 7.5.** Смещение (*a, b, c*) и напряжение (*d*) вдоль оси  $Ox$  в момент времени  $t = 4$  для различного числа частиц  
**Fig 7.5.** Displacement (*a, b, c*) and stress (*d*) along the  $Ox$  axis at time  $t = 4$  for different particles number





**Рис. 7.6.** Зависимость смещения ( $a, b, c$ ) и напряжения ( $d$ ) частицы в сечении  $x = L/2$  от времени для различного числа частиц.  
**Fig 7.6** The dependence of the displacement ( $a, b, c$ ) and stress ( $d$ ) of the particle in the cross section  $x = L/2$  on time for different particles number

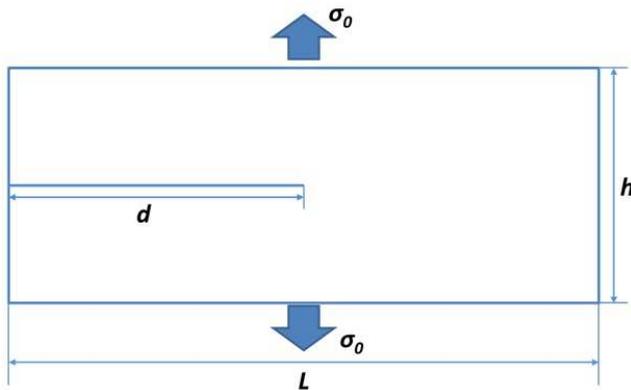


**Рис. 7.7.** График среднеквадратичного отклонения смещения частиц от эталона на времена для различного числа частиц:  
 1 -  $N = 1111$ , 2 -  $N = 4223$ , 3 -  $N = 16441$ , 4 -  $N = 25551$   
**Fig 7.7.** Mean-square deviation graph of particle displacement from analytical solution for times for different particles number:  
 1 -  $N = 1111$ , 2 -  $N = 4223$ , 3 -  $N = 16441$ , 4 -  $N = 25551$

Во второй части расчетов варьируется число частиц  $N = 1111$  ( $\Delta x = 1$ ),  $N = 4221$  ( $\Delta x = 0.5$ ),  $N = 16441$  ( $\Delta x = 0.25$ ),  $N = 25551$  ( $\Delta x = 0.2$ ) при фиксированном значении  $\delta = 3.015\Delta x$ . Сходимость наблюдается при увеличении числа частиц.

## 8. Разрушение пластины с горизонтальной трещиной при одноосной нагрузке

Прямоугольная пластина с горизонтальным дефектом подвергается постоянной симметричной нагрузке как показано на рисунке 8.1. В качестве хрупкого материала используется стекло. Постановка задачи взята из [7].



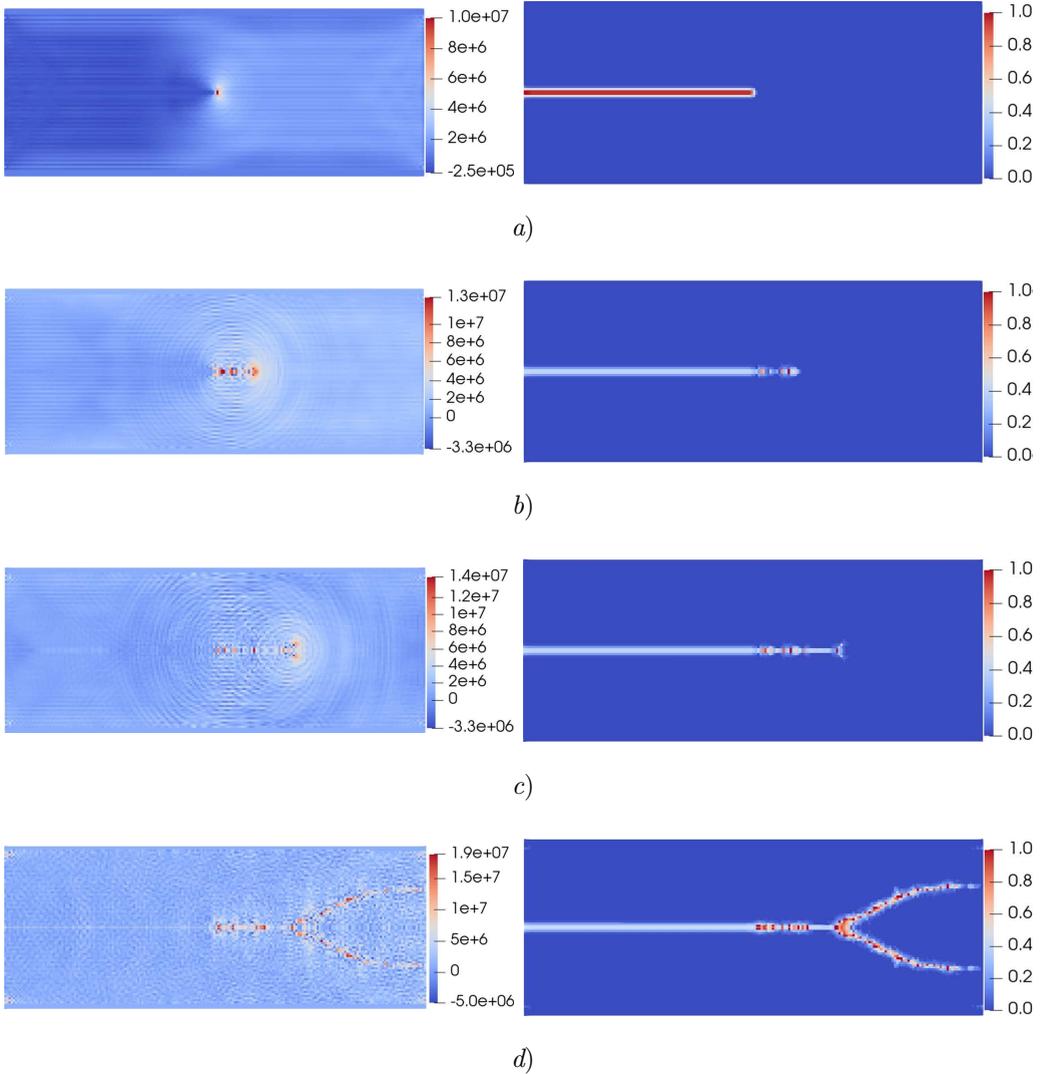
**Рис. 8.1.** Геометрия и условия нагрузки для прямоугольной пластины  
**Fig 8.1.** Geometry and load conditions for a rectangular plate

Геометрия задачи:  $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ ,  $-\frac{h}{2} < y < \frac{h}{2}$ ,  $L = 0.1$  м,  $h = 0.04$  м,  $d = 0.05$  м.

Свойства материала: модуль Юнга  $E = 65$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ , плотность  $\rho = 2235$  кг/м<sup>3</sup>.

В качестве критерия разрушения используется критическое значение напряжения при растяжении  $f_t = 10$  МПа. Дефект задается как локальное повреждение по формуле (5.1) с заданным числом разорванных связей. Начальное значение прикладываемой нагрузки  $\sigma_0 = 1$  МПа, горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015\Delta x$ , шаг сетки  $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$  м, число частиц  $N = 16000$ , счетный шаг  $\Delta t = 0.01$  мкс, конец счета при  $t = 60$  мкс.

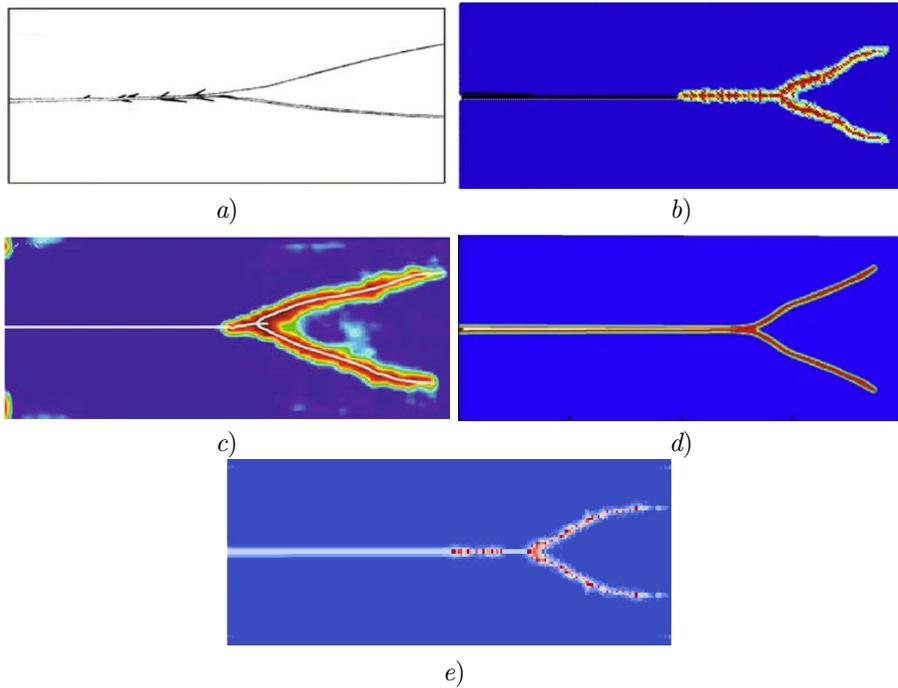
Результаты расчета представлены в виде растровых картин разрушения и напряжения пластины, полученные в ParaView 5.9.0. На Рис. 8.2a видно, что предельное значение напряжения достигается в центре пластины в области начального дефекта на момент времени 7.6 мкс, где происходит зарождение трещины, то есть первый разрыв связей под нагрузкой в области концентрации максимальных главных напряжений. При дальнейшей нагрузке повреждение развивается горизонтально вдоль прямой линии (Рис. 8.2b) до момента начала ветвления (Рис. 8.2c). Образовавшиеся ветви трещины распространяются симметрично относительно оси  $Ox$  до конца счета задачи (Рис. 8.2d). Качественное сравнение результата разрушения представлено на рисунке 8.3. Наблюдается адекватное поведение эволюции разрушения с сохранением симметрии ветвления. На рисунке 8.4 показана скорость образования трещины в сравнении с данными из открытых источников. Видно, что начало зарождения разрушения совпадает с результатом, полученным по методу конечных элементов [16], однако дальнейшее распространение трещины протекает медленнее. С этим связано и разное конечное время счета задачи (60 мкс по NOSB модели и 45 мкс по методу конечных элементов).



**Рис. 8.2.** Растровые картины максимального главного напряжения (первый столбец, Па) и повреждения (второй столбец) на времена:

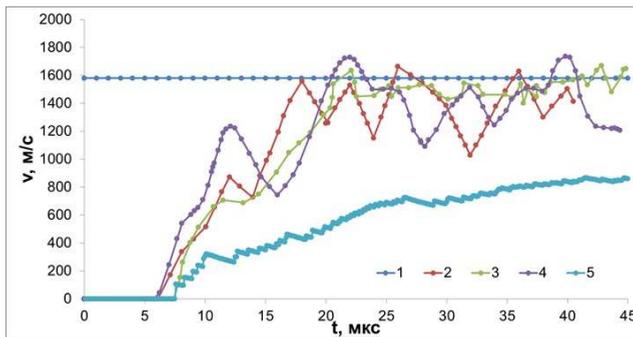
a)  $t = 7.6 \mu\text{с}$ ; b)  $t = 20 \mu\text{с}$ ; c)  $t = 29 \mu\text{с}$ ; d)  $t = 60 \mu\text{с}$

**Fig 8.2.** Raster pictures of the maximum main stress (first column, Pa) and damage (second column) at times: a)  $t = 7.6 \mu\text{s}$ ; b)  $t = 20 \mu\text{s}$ ; c)  $t = 29 \mu\text{s}$ ; d)  $t = 60 \mu\text{s}$



**Рис. 8.3.** Сравнение картины ветвления трещины на конечный момент времени: *a)* — эксперимент [15]; *b)* — численная модель из [7]; *c)* — метод конечных элементов XFEM из [16]; *d)* — bond-based модель из [17]; *e)* — NOSB модель

**Fig 8.3.** Comparison of the crack branching pattern at a finite point in time: *a)* — experiment [15]; *b)* — numerical model in [7]; *c)* — XFEM finite element method in [16]; *d)* — bond-based model in [17]; *e)* — NOSB model



**Рис. 8.4.** Скорость эволюции трещины: 1 — эксперимент [15]; 2 — численная модель из [7]; 3 — метод конечных элементов XFEM [16]; 4 — bond-based модель из [17]; 5 — NOSB модель

**Fig 8.4.** The rate of crack evolution: 1 — experiment [15]; 2 — numerical model in [7]; 3 — XFEM finite element method in [16]; 4 — bond-based model из [17]; 5 — NOSB model

## 9. Заключение

В результате проделанной работы реализована и протестирована NOSB модель перидинамики. Показаны сходимость численного решения упругой задачи к аналитике и возможность реализованной модели описывать хрупкое разрушение с применением критерия максимального напряжения при растяжении. Использование большого горизонта взаимодействия  $\delta \approx 3\Delta x$  для задачи с дефектом с одной стороны позволяет адекватно моделировать процесс разрушения, с другой стороны вносит погрешность численного интегрирования при вычислении тензора градиента деформаций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шишканов Д. А., Ветчинников М. В., Дерюгин Ю. Н. Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел // Журнал Средневожского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
2. Дерюгин Ю. Н., Ветчинников М. В., Шишканов Д. А. Исследование различных функций влияния в перидинамике // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 342–360. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>
3. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // Journal of Mechanics and Physics of Solids. 2000. Vol. 34. pp. 1-34. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
4. Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E. Peridynamic states and constitutive modeling. Lincoln: University of Nebraska, 2007. 34 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
5. Silling S. A., Lehoucq R. B. Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory // Sandia National Laboratories. 2007. 25 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>
6. Silling S. A., Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // Computers and Structures. 2005. 9 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
7. Zhou X., Wang Y., Qian Q. Numerical simulation of crack curving and branching in brittle materials under dynamic loads using the extended non-ordinary state-based peridynamics // European Journal of Mechanics A/Solids. 2016. Vol. 23. pp. 277-299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.08.009>
8. Liu W. Discretized bond-based peridynamics for solid mechanics. Michigan: Michigan State University, 2012. 193 p. 1-193. <https://doi.org/doi:10.25335/ezc6-p195>
9. Silling S. A. Linearized theory of peridynamic states // Sandia National Laboratories. 2010. Vol. 27. pp. 85-111. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-009-9234-0>

10. Bobaru F., Geubelle P.H., Foster J.T., Silling S.A. Handbook of Peridynamic Modeling. Abingdon: CRC Press by Taylor & Francis Group, 2017. Vol. 568. pp. 25-27. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>
11. Erdogan M., Erkan O. Peridynamic Theory and Its Applications. New York: Springer, 2014. 284 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>
12. Tupek M, Rimoli J, Radovitzky R. An approach for incorporating classical continuum damage models in state-based peridynamics. // Comput. Methods Appl. Mech. Energ 2013. Vol. 7. pp. 20–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.04.012>
13. Gu X., Zhang Q., Yu Y. An effective way to control numerical instability of a nonordinary state-based peridynamic elastic model // Department of Engineering Mechanics. 2017. Vol. 8. pp. 1-8. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/1750876>
14. Kan X., Yan J., Li S., Zhang A. On differences and comparisons of peridynamic differential operators and nonlocal differential operators // Computational Mechanics 2021. 19 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-021-02072-8>
15. Ravi-Chandar K., Knauss W. G. An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects. // Int. J. Fract. 1984. Vol. 26. pp. 65-80. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01152313>
16. Song J., Wang H., Belytschko T. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture // Computational Mechanics 2006. Vol. 12. pp. 239-250. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-007-0210-x>
17. Ha Y.D., Bobaru F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. // Eng. Fract. Mech. 2011. Vol. 78. pp. 1156-1168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.11.020>

*Поступила 15.02.2024; доработана после рецензирования 27.03.2024;  
принята к публикации 29.05.2024*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin, “Peridynamics method for problems solve of solids destruction”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **17**:4 (2022), 1–17 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
2. Yu. N. Deryugin, M. V. Vetchinnikov, D. A. Shishkanov, “Investigation of different influence functions in peridynamics”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:4 (2023), 1–19 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>
3. S. A. Silling, “Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 34 p. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)

4. S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, “Peridynamic states and constitutive modeling”, 2007, 34 p.
5. S. A. Silling, R. B. Lehoucq, “Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory”, *Sandia National Laboratories*, 2007, 25 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>
6. S. A. Silling, E. Askari, “A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics”, *Computers & Structures*, 2005, 9 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
7. X. Zhou, Y. Wang, Q. Qian, “Numerical simulation of crack curving and branching in brittle materials under dynamic loads using the extended non-ordinary state-based peridynamics”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **23** (2016), 277–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.08.009>
8. W. Liu, *Discretized bond-based peridynamics for solid mechanics*, Michigan State University, Michigan, 2012 DOI: <https://doi.org/doi:10.25335/ezc6-p195>, 193 p.
9. S. A. Silling, “Linearized theory of peridynamic states”, *Sandia National Laboratories*, **27** (2010), 85–111. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-009-9234-0>
10. F. Bobaru, P.H. Geubelle, J.T. Foster, S.A. Silling, *Handbook of Peridynamic Modeling*, **568**, CRC Press by Taylor & Francis Group, LLC, 2017 DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>.
11. E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*, Springer, New York, 2014 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>, 284 p.
12. M. Tupek, J. Rimoli, R. Radovitzky, “An approach for incorporating classical continuum damage models in state-based peridynamics”, *Comput. Methods Appl. Mech. Energ.*, **7** (2013), 20–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.04.012>
13. X. Gu, Q. Zhang, Y. Yu, “An effective way to control numerical instability of a non-ordinary state-based peridynamic elastic model”, *Department of Engineering Mechanics*, 2017, 8 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/1750876>
14. X. Kan, J. Yan, S. Li, A. Zhang, “On differences and comparisons of peridynamic differential operators and nonlocal differential operators”, *Computational Mechanics*, 2021, 19 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-021-02072-8>
15. K. Ravi-Chandar, W.G. Knauss, “An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects”, *International Journal of Fracture*, **26** (1984), 65–80. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01152313>
16. J. Song, H. Wang, T. Belytschko, “A comparative study on finite element methods for dynamic fracture”, *Computational Mechanics*, **12** (2006), 239–250. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-007-0210-x>
17. Y.D. Ha, F. Bobaru, “Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics”, *Eng. Fract. Mech.*, **78** (2011), 1156–1168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.11.020>