

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.60-73

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.711.3:531.36:62-50

О стабилизации движений трехзвенного робота-манипулятора с неполным измерением

Л. В. Колегова

Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Россия)

Аннотация. В настоящей работе рассматривается математическая модель манипулятора, представляющего собой вертикальную колонку и присоединенные к ней последовательно два звена, а также захват с грузом. Колонка, опираясь на неподвижное основание, может вращаться вокруг своей вертикальной оси. Звенья соединены посредством цилиндрических шарниров, позволяющих им вращаться в одной и той же вертикальной плоскости. Колонка и звенья моделируются как твердые тела, при этом звенья имеют неравные главные моменты инерции. Положение манипулятора в пространстве определяется тремя углами поворота колонки и звеньев. Манипулятор может иметь следующие типы установившихся программных движений. При компенсации гравитационных моментов управляющими моментами, приложенными в цилиндрических шарнирах, манипулятор имеет заданное программное положение равновесия. Манипулятор также может иметь программное движение, в котором колонка вращается с заданной постоянной угловой скоростью, а звенья имеют заданные относительные положения равновесия в своей плоскости. Исследуется задача о стабилизации указанных программных движений манипулятора посредством управляющих моментов с обратной связью при измерении только углов поворота колонки и звеньев. Поставленная задача решается в виде нелинейного пропорционально-интегрального регулятора с учетом цилиндрического фазового пространства математической модели манипулятора. Решение состоит в построении функционала Ляпунова со знакопостоянной производной и в применении соответствующих теорем об асимптотической устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Полученные условия стабилизируемости программных движений имеют робастный характер относительно массоинерционных параметров манипулятора. Результаты численного моделирования управляемого движения манипулятора демонстрируют глобальное притяжение к заданному его положению в цилиндрическом фазовом пространстве.

Ключевые слова: робот-манипулятор, стабилизация движения, управление, неполное измерение, устойчивость, функционал Ляпунова

Для цитирования: Колегова Л. В. О стабилизации движений трехзвенного робота-манипулятора с неполным измерением // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 60–73. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.60-73>

Об авторах:

Колегова Любовь Владимировна, ассистент кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7734-983X>, flv_603@mail.ru

© Л. В. Колегова



MSC2020 70E60

On the motion stabilization of a three-link robotic manipulator with incomplete measurement

L. V. Kolegova

Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Abstract. This paper considers a mathematical model of a manipulator which consists of a vertical column, two links, connected to it in series, and a gripper with a load. The column resting on a fixed base can rotate around its vertical axis. The links are connected by cylindrical hinges allowing them to rotate in the same vertical plane. The column and the links are modeled as rigid bodies with the links having unequal principal moments of inertia. The position of the manipulator in space is determined by three rotation angles of the column and the links. The manipulator can have several types of steady-state program movements. When gravitational torques are compensated by control torques applied in the cylindrical hinges, the manipulator has a program equilibrium position. The manipulator can also have a program motion when the column rotates at a given constant angular velocity, and the links have given relative equilibrium positions in their plane. The stabilization problem of manipulator motion is investigated by means of control torques with feedback when only the rotation angles of the column and links are measured. The problem posed is solved in the form of a nonlinear proportional-integral controller taking into account the cylindrical phase space of the manipulator's mathematical model. The solution includes construction of a Lyapunov functional with a semi-definite derivative and application of the corresponding theorems on the asymptotic stability of non-autonomous functional differential retarded-type equations. The obtained conditions for the program motion stabilization are robust with respect to the mass-inertial parameters of the manipulator. The numerical simulation results demonstrate global attraction to its given position in cylindrical phase space.

Keywords: robot manipulator, motion stabilization, control, incomplete measurement, stability, Lyapunov functional

For citation: L. V. Kolegova. On the motion stabilization of a three-link robotic manipulator with incomplete measurement. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 60–73. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.60-73>

About the authors:

Lubov V. Kolegova, Assistant, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42, Leo Tolstoy st., Ulyanovsk 432017, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7734-983X>, flv_603@mail.ru

1. Введение

Интенсивная автоматизация технологий и производств, широкое применение роботов-манипуляторов в различных областях человеческой деятельности с одновременным ростом требований к их надежности, точности, энергозатратности и других факторов эффективной эксплуатации стимулируют активные работы в соответствующих областях науки и инженерии. В число важных научных задач входят математическое моделирование манипуляторов на основе нелинейных уравнений и их движе-

ния, обоснование структуры управления с учетом недостаточной определенности массо-инерционных и других параметров, неполноты и ограниченности управления, неполного измерения фазовых координат, необходимости глобальной и полуглобальной управляемости и стабилизируемости программных движений.

Трехзвенный манипулятор на первых этапах развития робототехники являлся одним из основных промышленных роботов. В настоящее время такой манипулятор имеет достаточно широкое применение в научных лабораториях [1], для выполнения простых операций в индустрии [2], в качестве составляющего устройства сложных робототехнических систем. Точность и надежное функционирование роботов-манипуляторов стимулируют активные исследования по моделированию их кинематики и динамики, соответствующим методам их анализа [2–5]. Точная динамическая модель робота-манипулятора имеет множество преимуществ для проектирования систем управления движением, анализа механической конструкции и моделирования его движения [6–7]. В проблеме о математическом моделировании и конструировании структуры управления робота-манипулятора актуальными являются задачи об обосновании управления с неполной обратной связью, с неполным измерением фазовых координат, при неизвестных массово-инерционных и других параметрах манипулятора, учете положительного действия гравитационных сил и иных факторов.

Задача об управлении движением трехзвенного манипулятора являлась предметом изучения многочисленных работ. Из последних работ, относящихся непосредственно к исследованиям в данной статье, выделим следующие. Различные аспекты и особенности применения пропорционально-интегро-дифференцирующего регулятора (ПИД-регулятор) в зависимости от цели исследуемой конкретной задачи рассмотрены в работах [1, 6]. Статистика показывает, что ПИД-регуляторы составляют более 90 % промышленных регуляторов с обратной связью, используемых сегодня [6, 8]. В работах [9–11] предложены иные подходы для построения управления трехзвенными манипуляторами. В [9] метод, разработанный на основе преобразования координат, позволяет достичь глобальной стабилизации нулевого положения равновесия горизонтального трехзвенного манипулятора посредством неполного управления с измерением только его положения. Как отмечается в этой и других работах [12–13] регулятор без измерения скорости, не требующий установки датчиков скоростей, снижает стоимость всей структуры управления и позволяет избежать начального влияния на нее, вызванного «шумами» скоростей.

Целью настоящей работы является задача о построении в нелинейной постановке для пространственного трехзвенного манипулятора структуры ограниченного управления, обеспечивающей стабилизацию его установившихся программных движений без измерения угловых скоростей.

Во втором разделе работы выводятся уравнения динамики манипулятора, состоящего из последовательно соединенных при помощи цилиндрических шарниров трех тел: вертикальной колонки и двух несимметричных звеньев, при этом последнее звено имеет захват с грузом. Дана постановка задачи о стабилизации движения такой модели манипулятора в нелинейной форме.

В третьем разделе представлен закон управления в виде нелинейного ПИД-регулятора, обеспечивающий решение задачи о полуглобальной стабилизации заданного положения манипулятора.

В четвертом разделе излагается решение задачи о стабилизации движения, в котором вертикальная колонка равномерно вращается вокруг своей оси, а звенья занимают заданные положения в плоскости вращения.

В пятом разделе представлены графические результаты численного моделирования в среде Scilab управляемых движений манипулятора под действием построенного ПИ-регулятора. В заключении приводится обсуждение полученных результатов.

2. Постановка задачи

Рассматривается математическая модель трехзвенного манипулятора с вертикальной колонкой, опирающейся на неподвижное основание и вращающейся вокруг своей вертикальной оси, его звенья соединены последовательно с колонкой и между собой цилиндрическими шарнирами, позволяющими им вращаться в одной вертикальной плоскости. Принимается, что колонка и звенья представляют собой твердые тела, второе звено имеет захват, содержащий груз. Схематическая модель представлена на Рис. 2.1. Через O_1 , O_2 и O_3 обозначены точки, соответствующие цилиндрическим шарнирам. Предполагается, что центры масс C_j ($j = 1, 2, 3$) колонки и звеньев лежат на продольных осях O_1O_2 , O_2O_3 и O_3O_4 соответственно, где O_4 – точка закрепления груза, принимаемого за материальную точку. Обозначены длины: $|O_2O_3| = l_2$, $|O_3O_4| = l_3$, $|O_2C_2| = l_{21}$, $|O_3C_3| = l_{31}$.

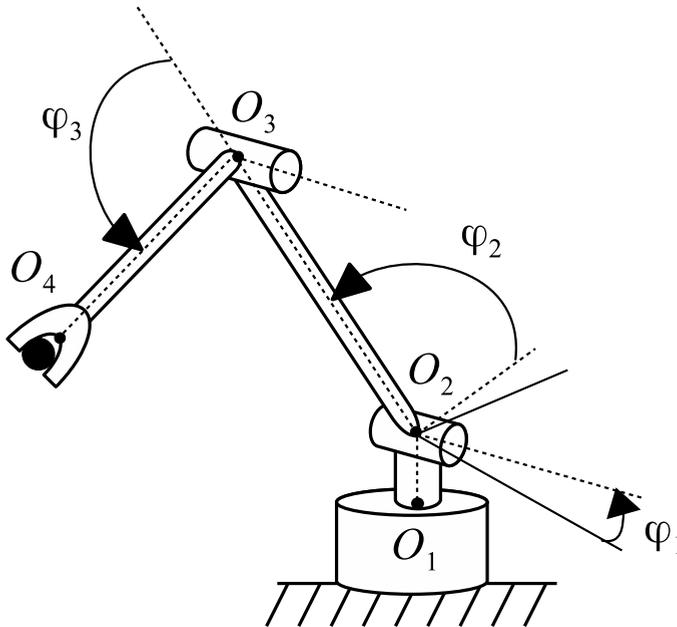


Рис. 2.1. Схема трехзвенного робота-манипулятора

Fig 2.1. Diagram of a three-link robotic manipulator

Вводятся системы координат $O_1x_1y_1z_1$, $C_2x_2y_2z_2$, $C_3x_3y_3z_3$ так, что оси O_1y_1 , C_2y_2 , C_3y_3 направлены вдоль продольных осей O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_4 , при этом C_1y_1 , C_2y_2 и C_3y_3 являются центральными осями инерции, а главные центральные оси инерции C_2x_2 и C_3x_3 перпендикулярны вертикальной плоскости расположения манипулятора. Массы звеньев и захвата полагаются равными m_2 , m_3 и m_0 соответственно. Момент инерции колонки относительно ее оси вращения равен I_1 , главные центральные моменты инер-

ции звеньев относительно осей $C_2x_2y_2z_2$ и $C_3x_3y_3z_3$ соответственно равны I_{2x} , I_{2y} , I_{2z} , I_{3x} , I_{3y} и I_{3z} . При этом отсутствует симметричность звеньев в поперечной плоскости, т. е. $I_{2x} \neq I_{2z}$, $I_{3x} \neq I_{3z}$.

Данную модель можно принять за модель руки робота-манипулятора [14], за модель промышленного робота [15–16].

Кинетическая энергия системы равна следующему выражению

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + a_{22}\dot{\varphi}_2^2 + 2a_{23}\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + a_{33}\dot{\varphi}_3^2),$$

где $a_{11} = a_{11}(\varphi_2, \varphi_3) = I_1 + I_{2y} \cos^2 \varphi_2 + I_{2z} \sin^2 \varphi_2 + I_{3y} \cos^2(\varphi_2 + \varphi_3) + I_{3z} \sin^2(\varphi_2 + \varphi_3) + m_2 l_{21}^2 \sin^2 \varphi_2 + m_3 (l_2 \sin \varphi_2 + l_{31} \sin(\varphi_2 + \varphi_3))^2 + m_0 (l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3))^2$,
 $a_{22} = a_{22}(\varphi_3) = I_{2x} + I_{3x} + m_2 l_{21}^2 + m_3 (l_2^2 + l_{31}^2 - 2l_2 l_{31} \cos \varphi_3) + m_0 (l_2^2 + l_3^2 - 2l_2 l_3 \cos \varphi_3)$,
 $a_{23} = a_{23}(\varphi_3) = I_{3x} + m_3 (l_{31}^2 - l_2 l_{31} \cos \varphi_3) + m_0 (l_3^2 - l_2 l_3 \cos \varphi_3)$, $a_{33} = I_{3x} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2$.

Потенциальная энергия манипулятора с точностью до постоянной определяется равенством

$$\Pi = -g(m_2 l_{21} + m_3 l_2 + m_0 l_2) \cos \varphi_2 - g(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \cos(\varphi_2 + \varphi_3).$$

Согласно уравнениям Лагранжа движение манипулятора под действием управляющих моментов U_1 , U_2 и U_3 , приложенных в цилиндрических шарнирах O_1 , O_2 и O_3 , моделируется уравнениями в матричном виде

$$A(\varphi)\ddot{\varphi} = C(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} - G(\varphi) + U, \quad (2.1)$$

где $A(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $C(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{pmatrix} c_{11}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{12}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{13}(\varphi, \dot{\varphi}) \\ c_{21}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{22}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{23}(\varphi, \dot{\varphi}) \\ c_{31}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{32}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{33}(\varphi, \dot{\varphi}) \end{pmatrix}$,

$\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $G^T(\varphi) = (0, g_2(\varphi_2, \varphi_3), g_3(\varphi_2, \varphi_3))$, $U^T = (U_1, U_2, U_3)$,

$c_{11} = c_{11}^{(1)}\dot{\varphi}_2 + c_{11}^{(2)}\dot{\varphi}_3$, $c_{12} = c_{11}^{(1)}\dot{\varphi}_1$, $c_{13} = c_{11}^{(2)}\dot{\varphi}_1$,

$c_{11}^{(1)} = -\frac{1}{2}((I_{2z} - I_{2y} + m_2 l_{21}^2 + (m_3 + m_0)l_2^2) \sin(2\varphi_2) + (I_{3z} - I_{3y} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2) \sin 2(\varphi_2 + \varphi_3) + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin(2\varphi_2 + \varphi_1))$,

$c_{11}^{(2)} = -\frac{1}{2}((I_{3z} - I_{3y} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2) \sin 2(\varphi_2 + \varphi_3) + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1))$,

$c_{21} = -\frac{1}{2}c_{11}^{(1)}\dot{\varphi}_1$,

$c_{22} = -l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3$,

$c_{23} = -l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2 - l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3$,

$c_{31} = -\frac{1}{2}c_{11}^{(2)}\dot{\varphi}_1$, $c_{32} = l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_2$, $c_{33} = 0$,

$g_2 = g_2^{(0)} \sin \varphi_2 + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2 + \varphi_3)$, $g_3 = g_3^{(0)} \sin(\varphi_2 + \varphi_3)$,

$g_2^{(0)} = g(m_2 l_{21} + m_3 l_2 + m_0 l_2)$, $g_3^{(0)} = g(m_3 l_{31} + m_0 l_3)$,

$(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Уравнение (2.1) описывает движение манипулятора в цилиндрическом фазовом пространстве переменных $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$, φ_1 , φ_2 , φ_3 .

В работе рассматривается задача об определении управляющего момента U , обеспечивающего стабилизацию заданных программных движений манипулятора.

3. Задача о стабилизации заданного положения манипулятора в пространстве

Пусть

$$\dot{\varphi} = 0, \varphi^{(0)} = (\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)})^T \tag{3.1}$$

есть заданное положение манипулятора.

Определим управляющий момент U , обеспечивающий стабилизируемость положения (3.1) с учетом цилиндрического фазового пространства без измерения скоростей.

Положим

$$U = (U_1, U_2, U_3)^T,$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= -\alpha_1 \sin \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1^{(0)}}{2} + \\ &+ \beta_1 \cos \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1^{(0)}}{4} \int_{t-h_1}^t \gamma_1(\tau - t) \sin \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_1^{(0)}}{4} d\tau, \\ U_2 &= g_2^{(0)} \sin \varphi_2^{(0)} \cos(\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}) + \\ &+ g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) \cos(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}) - \\ &- \alpha_2 \sin \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}}{2} + \beta_2 \cos \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}}{4} \int_{t-h_2}^t \gamma_2(\tau - t) \sin \frac{\varphi_2(\tau) - \varphi_2^{(0)}}{4} d\tau - \\ &- \alpha_4 \sin(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}), \\ U_3 &= g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) \cos(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}) - \\ &- \alpha_3 \sin \frac{\varphi_3(t) - \varphi_3^{(0)}}{2} + \beta_3 \cos \frac{\varphi_3(t) - \varphi_3^{(0)}}{4} \int_{t-h_3}^t \gamma_3(\tau - t) \sin \frac{\varphi_3(\tau) - \varphi_3^{(0)}}{4} d\tau - \\ &- \alpha_4 \sin(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где параметры управления удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \gamma_j(t) &\geq 0, \dot{\gamma}_j(s) \geq \nu_0 > 0 \quad \forall s \in [-h_j, 0] \quad (h_j > 0), \int_{-h_j}^0 \gamma_j(\tau) d\tau \leq \gamma_0 \quad (j = 1, 2, 3), \\ \alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} &= \mu_1 > 0, \quad \alpha_2 - \frac{\beta_2 \gamma_0}{2} + 2g_2^{(0)} \cos \varphi_2^{(0)} = \mu_2 > 0, \\ \alpha_3 - \frac{\beta_3 \gamma_0}{2} &= \mu_3 > 0, \quad \alpha_4 + g_3^{(0)} \cos(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) = \mu_4 > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для вывода необходимого результата применим теорему об асимптотической устойчивости на основе функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную [12].

Выберем функционал Ляпунова

$$\begin{aligned} V(t, \dot{\varphi}(t), \varphi(t), \varphi^\tau(t)) &= T(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) + \Pi_1(\varphi(t)) + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \beta_j \int_{-h_j}^0 \gamma_j(\tau) \left(\sin \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j^{(0)}}{4} - \sin \frac{\varphi_j(t + \tau) - \varphi_j^{(0)}}{4} \right)^2 d\tau, \end{aligned}$$

где через $\varphi^\tau(t)$ обозначена вектор-функция $\varphi^\tau(t) = (\varphi_1^\tau(t), \varphi_2^\tau(t), \varphi_3^\tau(t))^T$, $\varphi_j^\tau(t) = \varphi_j(t + \tau)$

t), $-h_j \leq \tau \leq 0$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \Pi_1(\varphi) = & 2 \sum_{j=1}^3 \left(\alpha_j - \frac{\beta_j \gamma_0}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{\varphi_j - \varphi_j^{(0)}}{2} \right) + g_2^{(0)} \cos \varphi_2^{(0)} (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_2^{(0)})) + \\ & + (\alpha_4 + g_3^{(0)} \cos(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)})) (1 - \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)})). \end{aligned}$$

Несложно вывести, что для выбранного функционала Ляпунова имеет место оценка

$$V \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^3 \dot{\varphi}_j^2(t) + \lambda_2 \sum_{j=1}^3 \sin^2 \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j^{(0)}}{4} \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0).$$

Производная функционала Ляпунова в силу уравнений (3.1) при управлении (3.2) согласно неравенствам (3.3) имеет следующую оценку:

$$\dot{V} \leq -\nu_0 \sum_{j=1}^3 \beta_j \int_{-h_0}^0 \left(\sin \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j^{(0)}}{2} - \sin \frac{\varphi_j(t + \tau) - \varphi_j^{(0)}}{2} \right)^2 d\tau \leq 0.$$

Множество $\{\dot{V} = 0\}$ при условиях (3.3) может содержать только установившиеся движения уравнений (2.1) с управлением (3.2), $\varphi(\tau) \equiv \varphi(t)$ ($t - h_0 \leq \tau \leq t$, $h_0 = \min(h_1, h_2, h_3)$) или $\{\varphi(t) = const, \dot{\varphi}(t) \equiv 0\}$. Однако согласно этим уравнениям находим, что такими движениями могут быть положения

$$\varphi_j(t) \equiv \varphi_j^{(0)} + 2\pi k_j \quad k_j \in Z \quad (j = 1, 2, 3). \quad (3.4)$$

В соответствии с указанной теоремой из [12] заключаем, что управление (3.2) обеспечивает стабилизируемость положения манипулятора (3.1). А именно, любое возмущенное движение неограниченно приближается к одному из положений (3.4). При этом множество положений $\{\dot{\varphi} = 0, \varphi_j(t) = \varphi_j^{(0)} + 4\pi k_j, k_j \in Z, j = 1, 2, 3\}$ является асимптотически устойчивым.

4. Задача о стабилизации установившегося движения манипулятора

Пусть в программном движении манипулятора первое звено вращается по заданному закону вокруг вертикальной оси, а два других звена сохраняют постоянные относительные положения во вращающейся плоскости их действия

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) = \dot{\varphi}_1^{(0)}, \quad \varphi_1^{(0)}(t) = \varphi_1^{(0)} t, \quad \dot{\varphi}_2(t) = \dot{\varphi}_3(t) = 0, \\ \varphi_2(t) = \varphi_2^{(0)} = const, \quad \varphi_3(t) = \varphi_3^{(0)} = const. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Манипулятор совершает движение (4.1) при условии, что в шарнирах 2 и 3 приложены постоянные моменты, уравновешивающие центробежные моменты, вызванные вращением первого звена, и моменты сил тяжести

$$\begin{aligned} U_2^{(0)} = \frac{1}{2} c_{11}^{(1)}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + g_2^{(0)} \sin \varphi_2^{(0)} + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}), \\ U_3^{(0)} = \frac{1}{2} c_{11}^{(1)}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем возмущения

$$x_1 = \varphi_1 - \varphi_1^{(0)}(t), \quad x_2 = \varphi_2 - \varphi_2^{(0)}, \quad x_3 = \varphi_3 - \varphi_3^{(0)}.$$

Покажем, что стабилизация программного движения (4.1) решается моментами

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= U_1 - U_1^{(0)} = -\alpha_1 \sin \frac{x_1(t)}{2} + \beta_1 \cos \frac{x_1(t)}{4} \int_{-h_1}^0 \gamma_1(\tau) \sin \frac{x_1(t+\tau)}{4} d\tau, \\ U_2^{(1)} &= U_2 - U_2^{(0)} = -\alpha_2 x_2(t) + \beta_2 \int_{-h_2}^0 \gamma_2(\tau) x_2(t+\tau) d\tau, \\ U_3^{(1)} &= U_3 - U_3^{(0)} = -\alpha_3 x_3(t) + \beta_3 \int_{-h_3}^0 \gamma_3(\tau) x_3(t+\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где параметры $\alpha_j > 0, \beta_j > 0$ ($j = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \gamma_j(\tau) &\geq 0, \quad \dot{\gamma}_j(\tau) \geq \nu_0 > 0 \quad \forall \tau \in [-h_j, 0], \quad (h_j > 0), \quad (j = 1, 2, 3), \\ \int_{-h_0}^0 \gamma_j(\tau) d\tau &\geq \gamma_0 > 0, \\ \mu_1 &= \alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} > 0, \\ \mu_2 &= \alpha_2 - \beta_2 \gamma_0 - g_2^{(0)} - g_3^{(0)} - |I_{2x} - I_{2z}| - m_2 l_{21}^2 - |I_{3z} - I_{2z}| - \\ &\quad - m_3 l_{31}^2 - m_0 l_3^2 - 4m_3 l_3 l_{31} - 4m_0 l_2 l_3 > 0, \\ \mu_3 &= \alpha_3 - \beta_3 \gamma_0 - g_3^{(0)} - |I_{3z} - I_{2z}| - m_3 l_{31}^2 - m_0 l_3^2 - 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) > 0, \\ 4\mu_2 \mu_3 - (|I_{3z} - I_{3y}| + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2 + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3))^2 &> 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} V(t, \dot{x}(t), x(t), x_\tau(t)) &= T(\dot{x}(t), x(t)) + \Pi(x(t)) - \sum_{j=2}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) x_j(t) - \\ &\quad - \Pi(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) - \frac{1}{2} a_{11}(x_2, x_3)(\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi_j}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\varphi_1^{(0)})^2 x_j(t) - \\ &\quad - \frac{1}{2} a_{11}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{x_1(t)}{2} \right) + \\ &\quad + \beta_1 \int_{-h_0}^0 \gamma_1(\tau) \left(\sin \frac{x_1(t)}{4} - \sin \frac{x_1(\tau+t)}{4} \right)^2 d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 (\alpha_j - \beta_j \gamma_0) x_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \int_{-h_0}^0 \gamma_j(\tau) (x_j(t) - x_j(t+\tau))^2 d\tau. \end{aligned}$$

Можно найти, что для функционала V в силу условий (4.4) при малых $|x_2|$ и $|x_3|$ имеет место оценка

$$V \geq \lambda_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \lambda_2 \sin^2 \frac{x_1(t)}{4} + \lambda_3 (x_2^2(t) + x_3^2(t)), \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0).$$

Для производной функционала $V(t)$ в силу уравнений (3.1) в соответствии с управлением (4.3), согласно условиям (4.4), находим оценку

$$\dot{V}(t) \leq -\nu_0 \int_{-h_0}^0 \left(\sin \frac{x_1(t)}{4} - \sin \frac{x_1(t+\tau)}{4} \right)^2 d\tau - \nu_0 \sum_{j=2}^3 \int_{-h_0}^0 (x_j(t) - x_j(t+\tau))^2 d\tau \leq 0.$$

Множество $\{\dot{V}(t) = 0\}$ может содержать лишь те движения $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, которые удовлетворяют равенствам

$$\sin \frac{x_1(t)}{4} = \text{const}, \quad x_2(t) = \text{const}, \quad x_3(t) = \text{const}. \quad (4.5)$$

Из уравнений (3.1) с управлением (4.3) следует, что движения (4.5) при малых $|x_2(t)|$ и $|x_3(t)|$ таковы, что

$$x_1(t) \equiv 2\pi k \quad (k \in Z), \quad x_2(t) \equiv 0, \quad x_3(t) \equiv 0.$$

Соответственно, согласно [12], находим асимптотическую устойчивость движений

$$\varphi_1(t) = \varphi_1^{(0)}t + 4\pi k \quad (k \in Z), \quad \varphi_2(t) = \varphi_2^{(0)}, \quad \varphi_3(t) = \varphi_3^{(0)}.$$

5. Результаты численного моделирования

Выберем параметры робота в соответствии со значениями индустриального трехзвеного манипулятора [16]:

$$\begin{aligned} m_2 &= 15.91 \text{ кг}, \quad m_3 = 6.82 \text{ кг}, \quad m_0 = 2.5 \text{ кг}, \\ l_2 &= 0.5 \text{ м}, \quad l_3 = 0.5 \text{ м}, \quad l_{21} = 0.2 \text{ м}, \quad l_{31} = 0.2 \text{ м}, \\ I_1 &= 0.0267 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{2x} = 3.7691 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{2y} = 3.6939 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{2z} = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{3x} &= 0.2245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{3y} = 0.2842 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{3z} = 0.0904 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Желаемое положение манипулятора выберем в виде:

$$\varphi_1^{(0)} = \pi/4 \text{ рад}, \quad \varphi_2^{(0)} = -\pi/3 \text{ рад}, \quad \varphi_3^{(0)} = \pi/6 \text{ рад}.$$

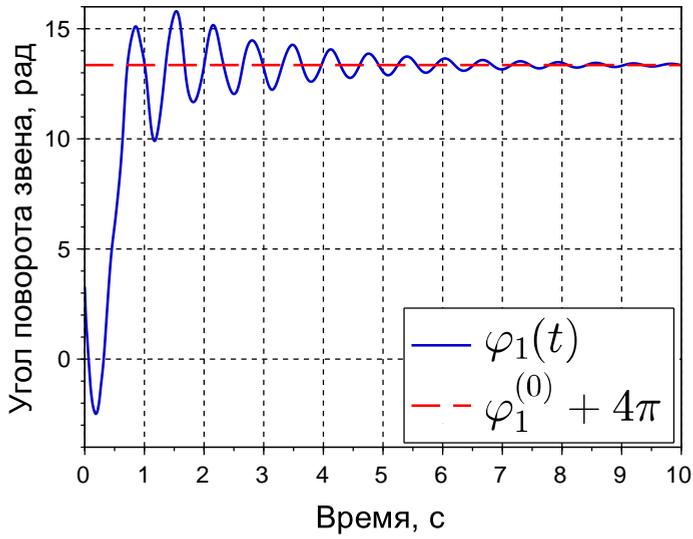
Подберем параметры управляющих моментов исходя из условий (4.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2700, \quad \beta_k = 80\alpha_k, \\ \gamma_k(t) &= e^{90t}, \quad h_k = 0.2 \text{ с}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

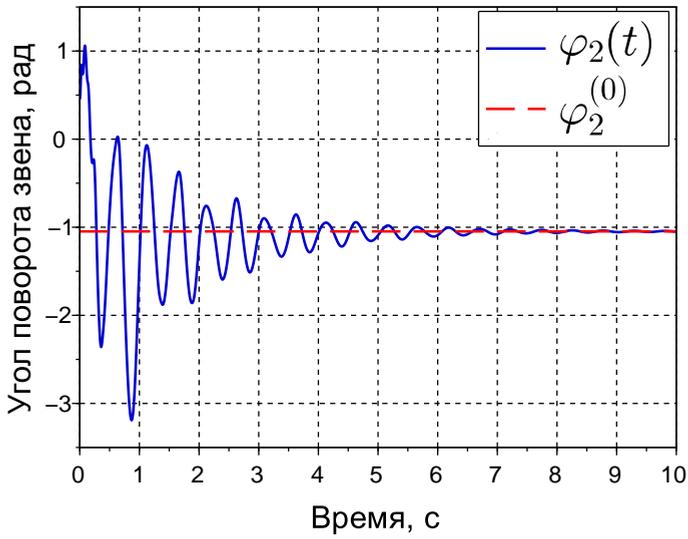
Чтобы продемонстрировать свойство глобального притяжения к заданному положению манипулятора, начальные отклонения и начальные скорости выберем достаточно большими:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 2.5 \text{ рад}, \quad x_2(0) = 1.5 \text{ рад}, \quad x_3(0) = 3.1 \text{ рад}, \\ \dot{\varphi}_1(0) &= 45 \text{ с}^{-1}, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 2 \text{ с}^{-1}, \quad \dot{\varphi}_3(0) = -25 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Результаты численного моделирования управляемого движения робота-манипулятора под управлением (3.2) в среде Scilab 5.5.2 демонстрируют стабилизацию заданного положения, как это видно из Рис. 5.1. При этом вращательное движение колонки в силу больших начальных скоростей приводится к заданному положению, смещенному на два полных оборота, что соответствует полученному решению задачи о стабилизации в цилиндрическом фазовом пространстве.



a)



b)

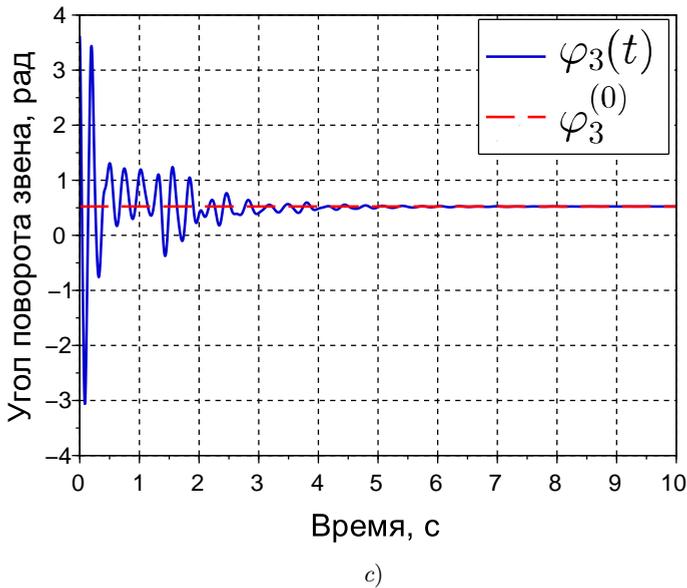


Рис. 5.1. Зависимости от времени углов поворота звеньев манипулятора: *a)* первое звено (вертикальная колонка); *b)* второе звено; *c)* третье звено

Fig 5.1. Dependence on the time of rotation of the manipulator links: *a)* first link (vertical column); *b)* second link; *c)* third link

6. Заключение

В работе рассмотрена задача об управлении вертикально расположенным трехзвенным роботом-манипулятором с грузом. Важной особенностью математической модели его динамики является учет несимметричности ведомых звеньев в поперечных сечениях. Обоснована модель ограниченного управления, обеспечивающего полуглобальную стабилизацию программного положения манипулятора при измерении только его угловых координат. При этом в зависимости от выбранного положения может быть учтено положительное действие гравитационных моментов для стабилизации. Рассматриваемый манипулятор может иметь программное движение в виде вращения колонки с постоянной скоростью и заданного положения ведомых звеньев во вращающейся вертикальной плоскости. Обосновано управление, обеспечивающее стабилизацию такого движения только при измерении угловых координат робота. Обоснованное управление представляет собой ПИ-регулятор достаточно простой структуры. Отсутствие датчиков скоростей позволяет снизить затраты на его конструирование и эксплуатацию. Параметры ПИ-регулятора определяют в виде явной теоретической зависимости от массоинерционных параметров манипулятора и заданного программного движения. При необходимости управление может быть выбрано робастным по отношению к нагрузке и заданному классу программных движений. Все это позволяет составить достаточно простой, но универсальный алгоритм программного продукта по управлению манипу-

лятором. Представлено численное моделирование обоснованного управления с использованием параметров известного индустриального трехзвенного манипулятора.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-71-00062, <https://rscf.ru/project/22-71-00062/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jangid M. K., Kumar S., Singh J. Trajectory tracking optimization and control of a three link robotic manipulator for application in casting // International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration. 2021. Vol. 8, No 83. pp. 1255. DOI: <https://doi.org/10.19101/IJATEE.2021.874468>
2. Ivanov S. E., Zudilova T., Voitiuk T., Ivanova L. N. Mathematical modeling of the dynamics of 3-DOF robot-manipulator with software control // Procedia Computer Science. 2020. Vol. 178. pp. 311–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.11.033>
3. Wu J., Yan R.-J., Shin K.-S., Han C.-S., Chen I.-M. A 3-DOF quick-action parallel manipulator based on four linkage mechanisms with high-speed cam // Mechanism and Machine Theory. 2017. Vol. 115. pp. 168–196. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.04.012>
4. Arian A., Danaei B., Abdi H., Nahavandi S. Kinematic and dynamic analysis of the Gantry-Tau, a 3-DoF translational parallel manipulator // Applied Mathematical Modelling. 2017. Vol. 51. pp. 217–231. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.012>
5. Zhang L., Yan X., Zhang Q. Design and analysis of 3-DOF cylindrical-coordinate-based manipulator // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2018. Vol. 52. pp. 35–45. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.02.006>
6. Ahmad S. G., Elbanna A. S., Elksas M. S., Areed F. G. Dynamic modelling with a modified PID controller of a three link rigid manipulator // Int. J. Comput. Appl. 2018. Vol. 179, No. 34. pp. 1–6.
7. Sciavicco L., Siciliano B. Modelling and Control of Robot Manipulators. – 2nd ed. Springer, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/11/12/709>
8. O’Dwyer A. Handbook of PI and PID controller tuning rules. – 3rd ed. London: Imperial College Press, 2009. 623 p.
9. Zhang A., Lai X., Wu M., She J. Global stabilization of underactuated spring-coupled three-link horizontal manipulator using position measurements only // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 39, No 7. pp. 1917–1928. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.010>
10. Yen V. T., Nan W. Y., Van Cuong P. Robust adaptive sliding mode neural networks control for industrial robot manipulators // International Journal of Control, Automation and Systems. 2019. Vol. 17. pp. 783–792. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0210-y>

11. Yang X., Zhang X., Chen Z., Xu Sh., Liu P. X. Udwadia-Kalaba approach for three link manipulator dynamics with motion constraints // *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. pp. 49240–49250. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2909934>
12. Андреев А. С., Перегудова О. А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81, Вып. 2. С. 137–153.
13. Андреев А. С., Перегудова О. А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 156–176.
14. Черноусько Ф., Ананьевский И., Решмин С. Методы управления нелинейными механическими системами. 2022. 328 с.
15. Chertopolokhov V. A. On the problem of synchronization of virtual and real movements for virtual reality systems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 2056, No 1. P. 012052. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2056/1/012052>
16. Nikolic I. Z., Milivojevic I. Application of pseudo-derivative feedback in industrial robots controllers // *Facta Univ. (Nis), Mech. Autom. Contr. Robot*. 1998. Vol. 2, No. 8. pp. 741–756.

*Поступила 15.01.2024; доработана после рецензирования 12.02.2024;
принята к публикации 27.02.2024*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. M. K. Jangid, S. Kumar, J. Singh, “Trajectory tracking optimization and control of a three link robotic manipulator for application in casting”, *International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration*, **8**:83 (2021), 1255. DOI: <https://doi.org/10.19101/IJATEE.2021.874468>
2. S. E. Ivanov, T. Zudilova, T. Voitiuk, L. N. Ivanova, “Mathematical modeling of the dynamics of 3-DOF robot-manipulator with software control”, *Procedia Computer Science*, **178** (2020), 311–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.11.033>
3. J. Wu, R.-J. Yan, K.-S. Shin, C.-S. Han, I.-M. Chen, “A 3-DOF quick-action parallel manipulator based on four linkage mechanisms with high-speed cam”, *Mechanism and Machine Theory*, **115** (2017), 168–196. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.04.012>
4. A. Arian, B. Danaei, H. Abdi, S. Nahavandi, “Kinematic and dynamic analysis of the Gantry-Tau, a 3-DoF translational parallel manipulator”, *Applied Mathematical Modelling*, **51** (2017), 217–231. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.012>
5. L. Zhang, X. Yan, Q. Zhang, “Design and analysis of 3-DOF cylindrical-coordinate-based manipulator”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **52** (2018), 35–45. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.02.006>

6. S. G. Ahmad, A. S. Elbanna, M. S. Elksas, F. G. Areed, “Dynamic modelling with a modified PID controller of a three link rigid manipulator”, *Int. J. Comput. Appl.*, **179** (2018), 1–6.
7. L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators. – 2nd ed.*, Springer, 2000 DOI: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/11/12/709>.
8. A. O’Dwyer, *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules, 3rd ed.*, Imperial College Press, London, 2009, 623 p.
9. A. Zhang, X. Lai, M. Wu, J. She, “Global stabilization of underactuated spring-coupled three-link horizontal manipulator using position measurements only”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**:7 (2015), 1917–1928. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.010>
10. V. T. Yen, W. Y. Nan, P. Van Cuong, “Robust adaptive sliding mode neural networks control for industrial robot manipulators”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, **17** (2019), 783–792. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0210-y>
11. X. Yang, X. Zhang, Z. Chen, Sh. Xu, P. X. Liu, “Udwadia-Kalaba approach for three link manipulator dynamics with motion constraints”, *IEEE Access*, **7** (2019), 49240–49250. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2909934>
12. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, “Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **81**:2 (2017), 95–105.
13. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, “Nonlinear regulators in the position stabilization problem of the holonomic mechanical system”, *Mechanics of Solids*, **53** (2018), 22–38.
14. F. L. Chernous’ko, I. M. Ananievski, S. A. Reshmin, *Control of nonlinear dynamical systems: methods and applications*, Springer Science & Business Media, 2008.
15. V. A. Chertopolokhov, “On the problem of synchronization of virtual and real movements for virtual reality systems”, *Journal of Physics: Conference Series*, **2056**:1 (2021), 012052. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2056/1/012052>
16. I. Z. Nikolic, I. Milivojevic, “Application of pseudo-derivative feedback in industrial robots controllers”, *Facta Univ. (Nis), Mech. Autom. Contr. Robot*, **2**:8 (1998), 741–756.

Submitted 15.01.2024; Revised 12.02.2024; Accepted 27.02.2024

The author has read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.