

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.44-59

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.65:517.521:538.9

## Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных

Н. Д. Кузьмичев

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)

**Аннотация.** В работе получены формулы для нахождения высших производных функции, выраженные через ее коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник). Указанные формулы найдены путем дифференцирования функции с гармонически модулированным аргументом и ее ряда Фурье. Приведенные выражения позволяют находить высшие производные функций численно с любой наперед заданной точностью, например, методом численного интегрирования формул Эйлера-Фурье для амплитуд гармоник или экспериментально при исследовании нелинейного физического процесса путем регистрации в цифровом формате амплитуд гармоник исследуемой зависимости при одновременном статическом и гармоническом воздействиях. Поставлена задача восстановления производных из коэффициентов Фурье и выполнен анализ ее корректности. Определены формулы для оценки ошибок восстановления и даны рекомендации для их уменьшения. Приведены примеры с разными свойствами гладкости аналитических и используемых для объяснения экспериментов функций: 1) аналитическая функция, используемая для объяснения магнитных свойств сверхпроводников, коэффициенты Фурье которой определяются численно с ошибкой вычислительного алгоритма программной среды Mathcad; 2) вольтамперная характеристика (ВАХ) двух встречно включенных полупроводниковых диодов, амплитуды гармоник которой определялись экспериментально с заданной ошибкой измерения прибора. Выполнено сравнение полученной производной ВАХ с производной, полученной с помощью формул численного дифференцирования; 3) аналитическая функция, производная которой имеет разрыв первого рода. Ошибки измерения коэффициентов Фурье добавлялись искусственно с помощью генератора случайных чисел.

**Ключевые слова:** ряд Тейлора-Фурье, коэффициент Фурье, амплитуда гармоники, высшая производная функции, задача восстановления производных, корректность задачи, ошибки восстановления производных

**Для цитирования:** Кузьмичев Н. Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44–59. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.44-59>

Об авторе:

**Кузьмичев Николай Дмитриевич**, д. ф.-м. н., профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, [kuzmichevnd@yandex.ru](mailto:kuzmichevnd@yandex.ru)

© Н. Д. Кузьмичев



MSC2020 35K200

# Application of the Fourier Modulation Analysis Method to the Problem of Derivatives Recovery

N. D. Kuzmichev

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** In this work, formulas are obtained for finding higher derivatives of a function (dependence), expressed through its Fourier coefficients (harmonic amplitudes). These formulas were found by differentiating both a function with a harmonically modulated argument and its Fourier series. The expressions given make it possible to find higher derivatives of functions numerically with any accuracy by means of different methods. For example, numerical integration of the Euler-Fourier formulas may be used for harmonic amplitudes. Derivatives also can be found experimentally when studying a nonlinear physical process by digitally recording the harmonic amplitudes of the dependence under study under simultaneous static and harmonic influences. The problem of reconstructing derivatives from Fourier coefficients is posed and an analysis of its correctness is performed. Formulas for estimating recovery errors are defined and recommendations are given to reduce these errors. Examples are given with different smoothness of analytical functions and of functions used to explain experiments: 1) an analytical function used to explain the magnetic properties of superconductors, whose Fourier coefficients are determined numerically with the error of the computational algorithm in the Mathcad software environment; 2) current-voltage characteristic (CVC) of 2 back-to-back semiconductor diodes, whose harmonic amplitudes were determined experimentally with a given measurement error of the device. The resulting derivative of the current-voltage characteristic is compared with the derivative obtained using numerical differentiation formulas; 3) an analytical function whose derivative has a discontinuity of the first kind. Errors in measuring Fourier coefficients were added artificially using a random number generator.

**Keywords:** Taylor-Fourier series, Fourier coefficients, harmonic amplitudes, higher derivative of a function, the problem of restoring derivatives, problem correctness, errors in restoring derivatives

**For citation:** N. D. Kuzmichev. Application of the Fourier Modulation Analysis Method to the Problem of Derivatives Recovery. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 44–59. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.44-59>

*About the author:*

**Nikolay D. Kuzmichev**, D.Sci. ((Phys.-Math.), Professor, Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, [kuzmichevnd@yandex.ru](mailto:kuzmichevnd@yandex.ru)

## 1. Введение

В связи с бурным развитием в последние десятилетия вычислительной и экспериментальной техники, а также вычислительных методов многие задачи, которые раньше решать было сложно и, в некоторых случаях невозможно, в настоящее время удается их решить. Это позволяет по-новому взглянуть на старые задачи, методы и идеи. Так, во

многих прикладных задачах необходимо иметь в своем арсенале значения высших производных исследуемой зависимости. Например, в экспериментальной физике: в оптике, физике конденсированного состояния, при исследовании электронного парамагнитного и ядерного магнитного резонансов и т. д. На практике широко применяется модуляционная методика, разработанная на случай малых амплитуд модуляции для слабой нелинейности и достаточно гладкой изучаемой зависимости [1–2] и др. В случае, когда зависимость имеет особенности и гистерезисные свойства, а также в случае больших амплитуд модуляции, когда в сигнале имеется значительное количество высших гармоник, разработан метод модуляционного Фурье-анализа [3–7]. Данный метод также часто используется в тех случаях, когда непосредственное измерение физической характеристики по каким-либо причинам затруднено. Например, исследуемая нелинейная часть зависимости «замаскирована» значительной её линейной частью или, например, зависимость является динамической. Известно, что регистрировать и усиливать переменный сигнал проще, чем статический сигнал, что приводит к меньшим погрешностям и к большей чувствительности прибора, измеряющего изучаемую зависимость. Численное дифференцирование непосредственного измерения с экспериментальной ошибкой исследуемой зависимости является в силу своей природы некорректной задачей и приводит к большим ошибкам ее производных [8–9]. Для корректности полученных результатов приходится сглаживать полученные результаты, а это приводит к потере ряда особенностей изучаемой зависимости, например, скачков или изломов. Кроме того, при экспериментальном исследовании динамических процессов часто приходится регистрировать первую и высшие гармоники исследуемой зависимости вместо непосредственного измерения самой зависимости. При этом возникает задача восстановления зависимости из ее гармоник. Также модуляционный Фурье-анализ можно применять для численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Ранее в работах [3–7] получены формулы для коэффициентов Фурье функции, выраженные через ее производные, и даны предварительные оценки точности модуляционного восстановления исходных зависимостей. В работах [9–11] разработаны методы экспериментального восстановления дифференциального сопротивления и магнитной восприимчивости полупроводниковых и сверхпроводящих материалов.

## 2. Разложение функции с гармонически модулированным аргументом в ряды Тейлора и Фурье. Связь высших производных функции и ее коэффициентов Фурье

Рассмотрим зависимость, которая описывается функцией  $f(x) \in \mathbb{C}^\infty$  и разложим ее в ряд Тейлора в некоторой точке  $x_0$ , в интервале  $\Delta = (x_0 - R, x_0 + R)$ , где  $R$  – радиус сходимости ряда. Введем гармоническую функцию  $z(t) = h \cdot \cos(t)$  с амплитудой  $h$ . При  $|h| < R$  функции  $f(x_0 + z(t))$  соответствует ряд Тейлора, которому в силу периодичности и четности  $f$  от параметра  $t$ , соответствует ряд Фурье [3–7]:

$$f(x) = f(x_0 + h \cdot \cos(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \cos^n(t)}{n!} f^{(n)}(x_0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mt), \quad (2.1)$$

где амплитуды гармоник (коэффициенты Фурье)  $A_m$  выражаются формулами:

$$A_m = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{(2n+m)} f^{(2n+m)}(x_0). \quad (2.2)$$

Здесь функции  $f^{(k)}(x_0)$  являются производными  $k$ -го порядка от  $f(x)$  для  $x = x_0$ . Кроме того, амплитуды гармоник (2.2) в силу четности функции  $f$  от  $t$ , также можно выразить через интегралы [12–13]:

$$A_m(x_0, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x_0 + h \cos(t)) \cos(mt) dt, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Вычислим производную по параметру  $t$  от  $f(x) = f(x_0 + z(t))$ :

$$\frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = -h \sin(t) \left( \frac{dx}{dt} \right)_{x=x_0+h \cos t} = - \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \sin(mt). \quad (2.4)$$

Положим в (2.4)  $t = \pi/2$  и в результате получим ряд для производной  $f(x)$  [5]:

$$\left( \frac{df}{dx} \right)_{x_0} = f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{h} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) A_{2m+1}(x_0, h). \quad (2.5)$$

Для функции  $f(x)$  и ее второй производной [5] имеем:

$$f(x_0) = \frac{A_0(x_0, h)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_{2m}(x_0, h). \\ f^{(2)}(x_0) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+2)^2 A_{2m+2}(x_0, h). \quad (2.6)$$

Для третьей, четвертой, пятой, шестой и седьмой производных, следуя алгоритму вычисления формулы (2.5), получим ряды:

$$f^{(3)}(x_0) = \frac{1}{h^3} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+3)^3 - (2m+3)] A_{2m+3}(x_0, h). \quad (2.7)$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+4)^4 - 4(2m+4)^2] A_{2m+4}(x_0, h). \quad (2.8)$$

$$f^{(5)}(x_0) = \frac{1}{h^5} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+5)^5 - 10(2m+5)^3 + 9(2m+5)] A_{2m+5}(x_0, h). \quad (2.9)$$

$$f^{(6)}(x_0) = \frac{1}{h^6} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+6)^6 - 20(2m+6)^4 + 64(2m+6)^2] A_{2m+6}(x_0, h). \quad (2.10)$$

$$f^{(7)}(x_0) = \frac{1}{h^7} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+7)^7 - 35(2m+7)^5 + 259(2m+7)^3 - \\ - 225(2m+7)] A_{2m+7}(x_0, h). \quad (2.11)$$

В итоге получим коэффициенты Фурье, выраженные через производные (2.2) и производные, выраженные через коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник) (2.5) – (2.11). Для численных приложений важны не столько ряды, сколько конечные суммы, аппроксимирующие  $f^{(k)}(x_0)$ .

Формулы (2.5)–(2.11) не требуют таких жестких ограничений, накладываемых на функцию  $f(x)$ , какие требуют формулы (2.2). Например, для справедливости формулы (2.5) необходимо, чтобы  $f(x)$  в точке  $x_0$  имела производную [12–13], которую можно вычислить с помощью выражений (2.3) и (2.5). Поэтому формулы (2.5)–(2.11) можно применять для приближения функций, у которых производные имеют особенности, например, разрывы первого рода. При этом возникает вопрос, на сколько ряды или конечные суммы, составленные из коэффициентов Фурье, соответствуют производным функции  $f(x)$ . Предварительно методом «регуляризации по здравому смыслу» [8; 14] (использование частных сумм ряда) без анализа корректности задачи восстановления и без учета степени убывания ошибки измерения амплитуд гармоник, указанный вопрос рассматривался в работах [5–7].

Коэффициенты Фурье  $A_m$ , с использованием формулы (2.3) можно вычислять численно, применяя различные квадратурные формулы, например, трапеций, Симпсона, Гаусса, Филона и др. Также амплитуды гармоник  $A_m(x_0, h)$  можно получать, экспериментально регистрируя в цифровом формате первую и высшие гармоники исследуемой зависимости образца при одновременном воздействии на него статического  $x_0$  и гармонического амплитудой  $h$  воздействий. В последнем случае возникает задача восстановления функции и ее производных по приближенно заданным (полученным экспериментально амплитудам гармоник) коэффициентам Фурье. Если оценивать отклонение суммы ряда в метрике  $C$ , то данная задача в метрике  $l_2$  является некорректной [8, 14].

### 3. Оценки точности восстановления производных функции по ее гармоникам

Рассмотрим функцию, имеющую производную  $(m + 1)$  порядка, удовлетворяющую условиям Дирихле [12; 13; 15], т. е.  $(m + 1)$ -производная имеет конечное число разрывов первого рода. В этом случае сходится ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} k^m |A_k|$  и, соответственно, ряды (2.5)–(2.11), которые составлены из коэффициентов Фурье функции (2.1). Как было отмечено во введении, при экспериментальном исследовании некоторой зависимости физического процесса часто приходится регистрировать первую и высшие гармоники исследуемой зависимости, вместо непосредственного ее измерения. При этом возникает задача восстановления зависимости из ее гармоник. Как правило, регистрируются несколько гармоник с определенной ошибкой измерения. Необходимо восстановить исследуемую зависимость и оценить точность восстановления [5, 7]. Пусть нам необходимо определить производную безгистерезисной зависимости, имея в своем арсенале  $N$  экспериментально определенных первых  $k$  гармоник ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Допустим, что абсолютная ошибка  $\delta_k$  определения амплитуды гармоники  $A_k$  убывает с ростом номера  $k$  по закону:  $\delta_k = c/k^{1+\alpha}$ , где  $c$  (ошибка определения  $A_1$ ) и  $\alpha > 0$ . Это обусловлено тем, что амплитуды гармоник  $m$ -раз дифференцируемой функции убывают не медленнее, чем  $B/k^{m+1}$ . Здесь величина  $B > 0$  – некоторая постоянная. Поэтому измерение  $A_{k+1}$  желательно проводить с большей чувствительностью, чем  $A_k$ , и, соответственно, с меньшей абсолютной ошибкой. Оценим величину ошибки восстановления. Рассмотрим следующую функцию  $S(x)$ , которая является суммой ряда  $S = \sum_{m=1}^{\infty} A_k$ , где  $A_k$  –

коэффициенты ряда (2.1), и оценим ее ошибку  $\delta S$  восстановления:

$$\begin{aligned} \delta S &= \left| \sum_{k=1}^N (A_k - U_k) + \sum_{N+1}^{\infty} A_k \right| < \sum_{k=1}^N |A_k - U_k| + |R_N| = \sum_{k=1}^N c/k^{1+\alpha} + |R_N| < \\ &< c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] + |R_N|. \end{aligned}$$

Здесь  $U_k$  – экспериментально определенные коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник), а  $R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k$  – остаток ряда, который зависит от дифференциальных свойств функции (зависимости)  $f(x)$ . Очевидно, что при  $\alpha = 0$  и  $N \rightarrow \infty$  величина  $\delta S \rightarrow \infty$ , а задача будет некорректно поставленной. Оценим остаток ряда  $R_N$ . Для  $m$ -раз дифференцируемой функции амплитуды  $|A_k| \leq B/k^{m+1}$ , поэтому  $\sum_{k=N+1}^{\infty} |A_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} B/k^{m+1} \leq B/(mN^m)$  [12–13]. Получим следующую оценку:

$$\delta S = \left| \sum_{k=1}^N (A_k - U_k) + \sum_{N+1}^{\infty} A_k \right| < c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{m} \frac{1}{N^m}. \quad (3.1)$$

В итоге, если ошибка измерения  $k$ -той гармоники убывает по закону  $\delta_k = c/k^{1+\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), тогда ошибка  $\delta S$  будет конечной величиной, а задача восстановления – корректной. Абсолютную ошибку восстановления суммы можно оценивать правой частью выражения (3.1). Заметим, что первый член в правой части (3.1), определяющий ошибку измерения, имеет следующие значения при  $N \rightarrow \infty$  и  $\alpha = 0$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] = c \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] = c(1 + \ln N).$$

При очень малых значениях  $\alpha \ll 1$  ошибка растет пропорционально логарифму числа коэффициентов Фурье в первой сумме левой части неравенства (3.1), и задача будет плохо обусловленной, т. е. приводит к большим ошибкам восстановления. При значениях  $\alpha \sim 0,5 \div 2$  и более величина  $\delta S$  сравнима с ошибкой  $c$  измерения первой гармоники. Отметим, что при  $c = 0$  ошибка  $\delta S$  будет определяться количеством  $N$  учтенных гармоник и числом  $m$ , определяющим дифференциальные свойства восстанавливаемой функции, и равна второму члену в правой части (3.1). Таким образом, из результатов анализа полученной оценки (3.1) следует, что для соблюдения корректности задачи восстановления необходимо параметр  $\alpha$  выбирать не слишком малой величиной.

На основании полученных выше выводов найдем погрешность восстановления производной функции на основании формулы (2.5). Пусть на эксперименте были получены  $N$  нечетных зависимостей коэффициентов Фурье (амплитуд гармоник)  $U_{2n-1}(x_0, h)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) с ошибкой  $\delta_{2n-1} = c_1/(2n-1)^{2+\alpha}$ , тогда сумма  $f^{(1)}(x_0) \approx (1/h) \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n-1) U_{2n-1}(x_0, h)$  (см. (2.5), для удобства счет в сумме начнем с  $n = 1$ ) аппроксимирует производную  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Допустим, что  $f(x)$  имеет непрерывные производные  $m$ -порядка, а производная  $(m+1)$ -порядка удовлетворяет условиям Дирихле. Вычислим ошибку восстановления производной, следуя алгоритму

получения оценки (3.1) и формуле (2.5):

$$h \cdot \delta f^{(1)} = \left| \sum_{n=1}^N [(-1)^{n-1}(2n-1)(A_{2n-1} - U_{2n-1})] + \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)A_{2n-1} \right| < \\ < c_1 \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \frac{1}{(2N-1)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{m(2N-1)^m}.$$

Таким образом, ошибка восстановления производной определяется формулой:

$$\delta f^{(1)} = \frac{c_1}{h} \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \frac{1}{(2N-1)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{mh(2N-1)^m}. \quad (3.2)$$

Для второй и третьей производных получим следующие оценки:

$$\delta f^{(2)} = \frac{c_2}{h^2} \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{(2N)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{mh^2(2N)^m}, \quad (3.3)$$

$$\delta f^{(3)} = \frac{c_3}{h^3} \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{(2N+1)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{mh^3(2N+1)^m}, \quad (3.4)$$

Заметим, что с ростом  $N$  при  $\alpha \rightarrow 0$  в квадратных скобках выражения (3.2)–(3.4) расходятся логарифмически, что делает задачу восстановления производных при очень малых значениях  $\alpha$  некорректной в силу больших значений первого члена правых частей (3.2)–(3.3). Также задача будет некорректной для очень малых амплитуд модуляции  $h$ , например, при  $|f^{(1)}| \sim c_1/h$ . Другими словами ошибка восстановления производной может быть сравнима или превышать значения самой производной, т. е.  $\delta f^{(1)} \sim |f^{(1)}|$ .

Таким образом, для выполнения корректности задачи восстановления необходимо выполнения следующих условий:

1. Параметр  $\alpha$ , определяющий степень убывания ошибки определения коэффициентов Фурье с ростом их номера, должен быть приближенно в пределах  $\alpha \sim 0,5 \div 2$ .

Амплитуда модуляции  $h$  должна быть значительной, например,  $h > c_1/|f^{(1)}|$ .

Если условия либо 1, либо 2 не выполняются, то необходимо ограничиться первыми  $N = 1 \div 3$  членами ряда Фурье. Амплитудами гармоник, значения которых сравнимы или меньше ошибки измерения, пренебречь. Абсолютную ошибку восстановления первой производной в этом случае можно оценивать по формуле [5, 7]:  $\delta f^{(1)} = (c_1/h)N^2$ . Ошибка восстановления в этом случае будет большой.

Ниже рассмотрим случаи численного восстановления производных исследуемой зависимости с помощью формул (2.5)–(2.7) на ряде примеров.

#### 4. Примеры восстановления производных

С использованием формул (2.5)–(2.7) первые три производные аппроксимировались суммой конечного числа  $N + 1$  слагаемых

$$F_N^{(1)}(x) = \frac{1}{h} \sum_{m=0}^N (-1)^m (2m+1) A_{2m+1}(x, h), \quad (4.1)$$

$$F_N^{(2)}(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=0}^N (-1)^m (2m+2)^2 A_{2m+2}(x, h), \quad (4.2)$$

$$F_N^{(3)}(x) = \frac{1}{h^3} \sum_{m=0}^N (-1)^m [(2m + 3)^3 - (2m + 3)] A_{2m+3}(x, h). \quad (4.3)$$

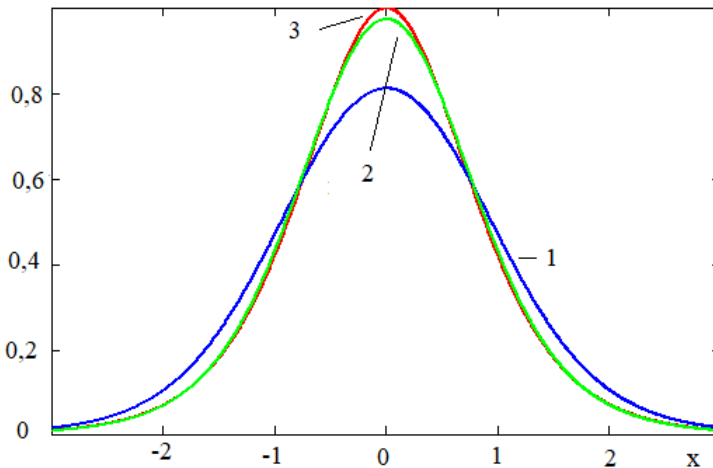
Коэффициенты Фурье  $A_1(x, h), \dots, A_5(x, h)$  определялись по формуле (2.3), полагая  $h = 1$ .

**Пример 4.1.** Рассмотрим зависимость, которую часто используют на практике, например, намагниченности тонкого сверхпроводящего диска, находящегося в критическом состоянии:  $f(x) = M \cdot \tanh(x)$ . Для простоты положим  $M = 1$ .

Расчеты производились в программной среде Mathcad с ошибками, обусловленными вычислительными алгоритмами данной среды, которыми пренебрегали в силу их малости, т. е. величины  $c_1, c_2$  и  $c_3 \cong 0$ . Таким образом, найденная ошибка восстановления определяется остаточным членом  $R_N$  содержащим неучтенные гармоники.

На Рис. 4.1 представлены графики точной первой производной функции  $f(x) = \tanh(x)$  и ее аппроксимации

$$F_0^{(1)}(x) = \frac{1}{h} A_1(x, h), \quad F_1^{(1)}(x) = \frac{1}{h} [A_1(x, h) - 3A_3(x, h)].$$



**Рис. 4.1.** Графики точной первой производной функции  $f(x) = \tanh(x)$  – (3) и их аппроксимации  $F_0^{(1)}(x)$  – (1),  $F_1^{(1)}(x)$  – (2)

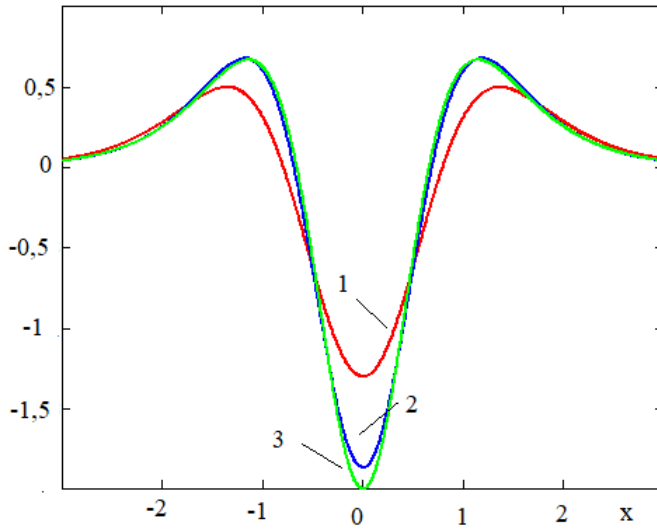
**Fig. 4.1.** Graphs of exact first derivative of the function  $f(x) = \tanh(x)$  – (3) and their approximation  $F_0^{(1)}(x)$  – (1),  $F_1^{(1)}(x)$  – (2)

На Рис. 4.2 представлены графики точной третьей производной функции  $f(x) = \tanh(x)$  и ее аппроксимации

$$F_0^{(3)}(x) = \frac{24}{h^3} A_3(x, h), \quad F_0^{(3)}(x) = \frac{1}{h^3} [24A_3(x, h) - 120A_5(x, h)].$$

Из Рис. 4.1-4.2 видно, что даже при большой амплитуде модуляции  $h = 1$  амплитуды гармоник в силу гладкости функции резко спадают в зависимости от номера гармоники





**Рис. 4.2.** Графики точной третьей производной функции  $f(x) = \tanh(x) - (3)$  и их аппроксимации  $F_0^{(3)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(3)}(x) - (2)$

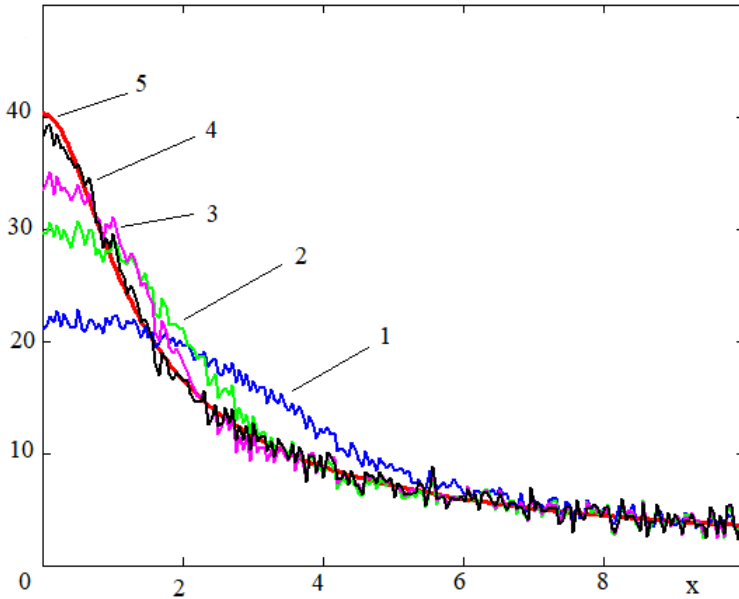
**Fig. 4.2.** Graphs of the exact third derivative of the function  $f(x) = \tanh(x) - (3)$  and their approximations  $F_0^{(3)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(3)}(x) - (2)$

и уже практически первые три нечетные гармоники в основном восстанавливают производные. При учете 5-ой гармоники восстановленная и аналитическая производные практически не различимы.

**Пример 4.2.** В данном примере в качестве функции  $f(x)$  в целях экспериментальной проверки была выбрана вольтамперная характеристика (ВАХ) двух встречно включенных полупроводниковых диодов, которая использовалась в работах [9–10]. Измерения ВАХ и амплитуд напряжения гармоник осуществлялось с экспериментальной ошибкой, которая убывала с ростом номера гармоники  $n$  как  $\delta_n \sim 1/n^{1,5}$ . В нашем случае  $x$  – величина постоянного тока, а  $h$  – амплитуда модуляции. Величины  $x$  и  $h$  определялись в мА,  $df/dx$  – Ом. Выбиралась большая амплитуда модуляции силы тока:  $h = 4$  мА. При такой амплитуде имеется много гармоник. Абсолютная ошибка измерения напряжения ВАХ равна  $\delta f = 1$  мВ. Здесь следует подчеркнуть, что для аппроксимации производных ВАХ использовались экспериментально определенные зависимости амплитуд гармоник  $A_m(x, h)$ , записанные в цифровом формате при изменении и фиксированной величины  $h$ .

На Рис. 4.3 приведены графики производных ВАХ полупроводниковой структуры, восстановленные с использованием  $N$  первых нечетных экспериментально определенных гармоник  $A_{2k-1}$  ( $k \leq N$ ) (форм. (4.1)).

Из Рис. 4.3 следует, что с ростом числа используемых гармоник точность восстановления увеличивается. При этом случайная ошибка восстановленной производной растет незначительно. Практически шести гармоник  $A_k$  ( $k = 1, 3, 5, \dots, 11$ ) достаточно для восстановления производной ВАХ для достаточно большой амплитуде модуляции.



**Рис. 4.3.** Графики точной первой производной ВАХ полупроводниковой структуры – (5) и их аппроксимации  $F_1^{(1)}(x)$  – (1),  $F_2^{(1)}(x)$  – (2),  $F_3^{(1)}(x)$  – (3),  $F_6^{(1)}(x)$  – (4)

**Fig. 4.3.** Graphs of the exact first derivative of the current-voltage characteristic of the semiconductor structure – (5) and their approximations  $F_1^{(1)}(x)$  – (1),  $F_2^{(1)}(x)$  – (2),  $F_3^{(1)}(x)$  – (3),  $F_6^{(1)}(x)$  – (4)

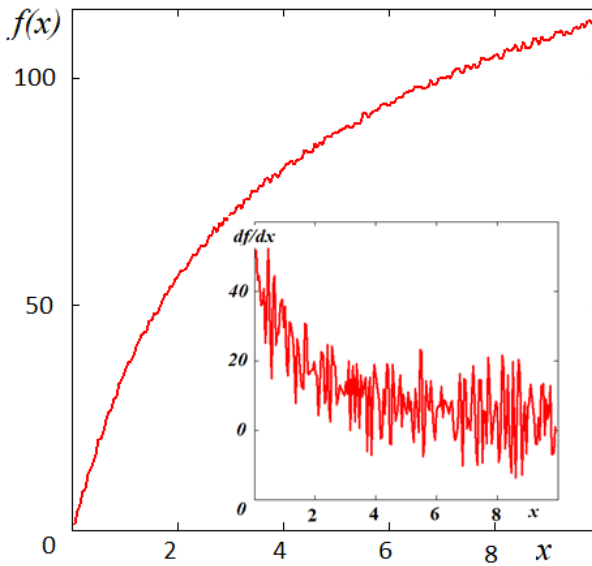
Следует отметить, что восстанавливаются хуже те области производной, где она имеет резкие изменения. Например, в окрестности  $x = 0$ . В этом случае следует уменьшить  $h$  так, чтобы величина  $h$  была меньше размера области резкого изменения функции.

На Рис. 4.4 приведена ВАХ и на вставке численно полученная производная с использованием формулы

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2d}[f(m + 1) - f(m - 1)] + O(d^2). \tag{4.4}$$

Здесь  $d = 0,05$  (мА) – шаг измерения ВАХ. Абсолютная ошибка измерения напряжения ВАХ равна  $\delta f = 1$  (мВ). Из Рис. 4.4 на вставке видно, что ошибка полученной производной сравнима с величиной самой производной и равна  $\approx 40$  Ом. Применение формул, имеющих точность  $O(d^m)$ , где  $m > 2$ , не приводит к повышению точности. Поэтому здесь необходима процедура сглаживания, уменьшающая колебания производной, что делает задачу относительно корректной. Вместе с тем указанная процедура приводит к сглаживанию всех особенностей функции. Данная процедура имеет смысл для функций, относительно которых априори известно, что они являются достаточно гладкими.

На Рис. 4.5–4.6 изображены вторая и третья производные ВАХ полупроводниковой



**Рис. 4.4.** График ВАХ полупроводниковой структуры и ее производной, рассчитанной с использованием формулы (4.4)

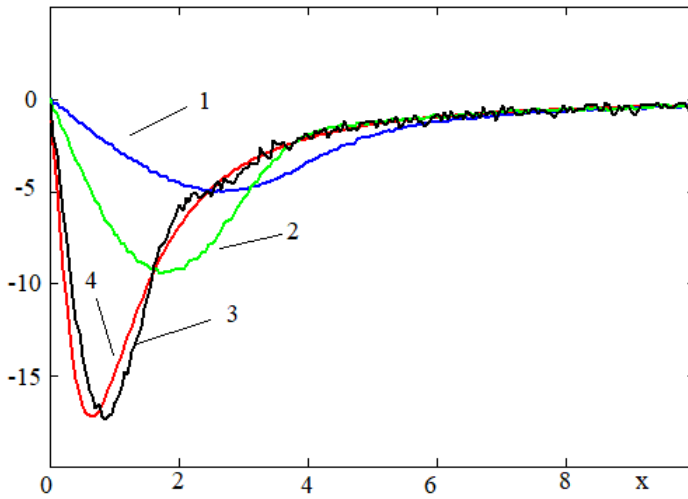
**Fig. 4.4.** Graph of the current-voltage characteristic of a semiconductor structure and its derivative, calculated using the formula (4.4)

структуры и ее аппроксимации, вычисленные по формулам (4.2)-(4.3) с использованием  $(N + 1)$  первых нечетных и четных экспериментально определенных амплитуд гармоник  $A_{2m+2}, A_{2m+3}, (m = 0, \dots, N)$  соответственно. Данного успеха невозможно было бы достичь прямым численным дифференцированием.

Видно, что их ошибки сравнимы с ошибками первой производной. На графике величина  $x$  приведена в мА,  $F_k^{(2)}(x)$  – Ом/мА,  $F_k^{(3)}(x)$  – Ом/мА<sup>2</sup>.

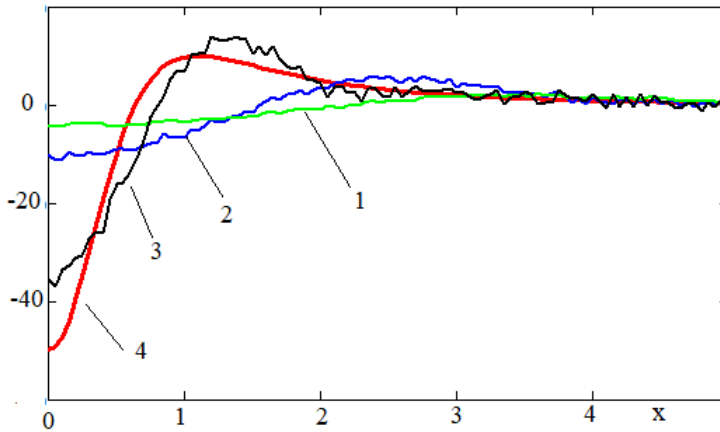
**Пример 4.3.** В этом примере приведены результаты восстановления производной функции  $f(x) = |x|$ . Заметим, что производная этой функция в точке  $x = 0$  имеет разрыв первого рода. Амплитуды гармоник  $A_k(x, h)$  имеют ошибки измерения, которые убывают быстрее, чем  $\delta_k = c/k^{1.5}$ . Здесь  $c = 0,01$  и  $\alpha = 0,5$ . «Ошибки измерения» добавлялись с помощью генератора случайных чисел, встроенного в Mathcad

Восстановленные первая и вторая производные приведены на Рис. 4.7-4.8. Из рисунков видно, что восстановленная производная с ростом числа гармоник стремится к аналитической производной  $y = \text{sign}(x)$ , а вторая производная к  $\delta(x)$  – дельта-функции Дирака. В области  $x \in (-h, h)$  производные имеют максимальные колебания, обусловленные не только ошибкой, но и свойствами тригонометрических полиномов вблизи особенностей аппроксимируемой функции. В пределе сумма ряда около особенности перейдет в «выброс» (явление Гиббса) [12].



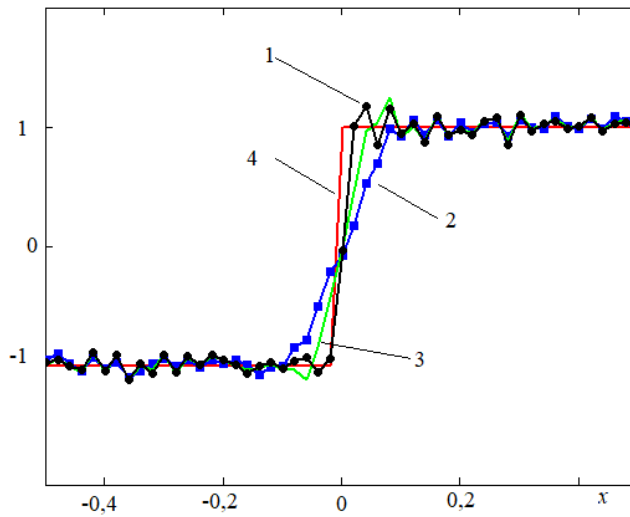
**Рис. 4.5.** Графики точной второй производной ВАХ полупроводниковой структуры – (4) и их аппроксимации  $F_1^{(2)}(x)$  – (1),  $F_2^{(2)}(x)$  – (2),  $F_6^{(2)}(x)$  – (3)

**Fig. 4.5.** Graphs of the exact second derivative of the current-voltage characteristic of the semiconductor structure – (4) and their approximations  $F_1^{(2)}(x)$  – (1),  $F_2^{(2)}(x)$  – (2),  $F_6^{(2)}(x)$  – (3)



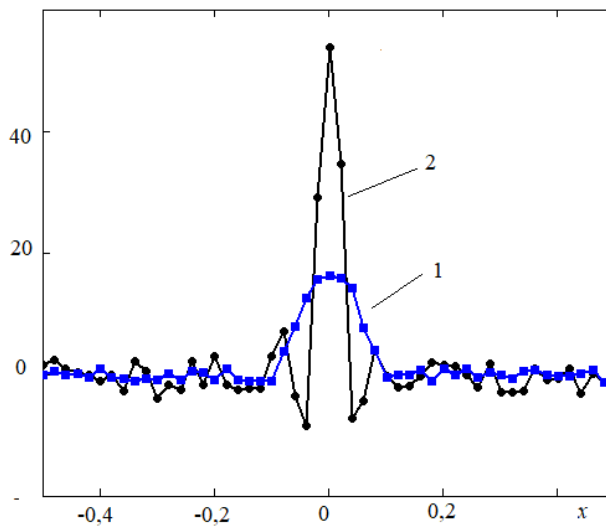
**Рис. 4.6.** Графики точной третьей производной ВАХ полупроводниковой структуры – (4) и их аппроксимации  $F_1^{(3)}(x)$  – (1),  $F_2^{(3)}(x)$  – (2),  $F_6^{(3)}(x)$  – (3)

**Fig. 4.6.** Graphs of the exact third derivative of the current-voltage characteristic of the semiconductor structure – (4) and their approximations  $F_1^{(3)}(x)$  – (1),  $F_2^{(3)}(x)$  – (2),  $F_6^{(3)}(x)$  – (3)



**Рис. 4.7.** Графики точной первой производной функции  $f(x) = |x| - (4)$  и их аппроксимации  $F_5^{(1)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(1)}(x) - (2)$ ,  $F_2^{(1)}(x) - (3)$

**Fig. 4.7.** Graphs of the exact first derivative of the function  $f(x) = |x| - (4)$  and their approximations  $F_5^{(1)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(1)}(x) - (2)$ ,  $F_2^{(1)}(x) - (3)$



**Рис. 4.8.** Графики аппроксимации второй производной функции  $f(x) = |x|$ :  $F_1^{(2)}(x) - (1)$ ,  $F_4^{(2)}(x) - (2)$

**Fig. 4.8.** Graphs of approximation of the second derivative of a function  $f(x) = |x|$ :  $F_1^{(2)}(x) - (1)$ ,  $F_4^{(2)}(x) - (2)$

## 5. Заключение

В работе получены формулы для нахождения высших (с первой по седьмую) производных функции, выраженные через ее коэффициенты Фурье. С помощью полученных выражений (2.5)–(2.11) высшие производные функций можно находить численно с любой точностью методами, например, численным интегрированием (2.3). Кроме того, коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник) можно получать, например, при экспериментальном исследовании нелинейных физических процессов, возникающих в образце. В этом случае более целесообразно измерять не саму исследуемую зависимость, а гармоники этой зависимости  $A_m(x_0, h)$  при одновременном воздействии статического (или медленно меняющегося)  $x_0$  и гармонического амплитудой  $h$  воздействий, регистрируя в цифровом формате первую и высшие гармоники исследуемой зависимости. Выполнен анализ корректности задачи восстановления производных из коэффициентов Фурье и получены формулы для оценки ошибок полученных производных (3.2)–(3.4). Приведены условия оптимальности выполнения задачи восстановления: 1) параметр  $\alpha$  лучше выбирать в пределах  $\alpha \sim 0,5 - 2$ ; 2) параметр  $h > c_n/|f^{(n)}|$ . При невыполнении указанных условий необходимо ограничиться первыми  $N$  членами ряда Фурье, а ошибку восстановления можно оценивать, например, для первой гармоники по формуле:  $\delta f^{(1)} \approx (c_1/h)N^2$ . Для демонстрации развитого метода приведены три различных примера: 4.1, 4.2 и 4.3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М.: Мир, 1974, 430 с.
2. Вертц Дж., Болтон Дж. Теория и практические приложения метода ЭПР. М.: Мир, 1975, 548 с.
3. Кузьмичев Н. Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  в слабых магнитных полях // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17, № 7. С. 56–60.
4. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 12. С. 63–74.
5. Кузьмичев Н. Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70–80.
6. Кузьмичев Н. Д. Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, № 22. С. 39–43.
7. Кузьмичев Н. Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производны // ЖТФ. 1997. Т. 37, № 7. С. 124–127.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986, 288 с.

9. Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Шилкин Д. А. Экспериментальное определение вольт-амперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа // ФТП. 2016. Т. 50, № 6. С. 830–833.
10. Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А. Дифференциальные уравнения для восстановления производной без гистерезисной нелинейной вольт-амперной характеристики полупроводниковой структуры // ФТП. 2019. Т. 53, № 1. С. 111–114.
11. Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Шитов А. Ю., Бурьянов И. В. Дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников из измерений первой гармоники намагниченности // Журнал Средневожского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 327–337.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления М.: Наука, 1970. Т. 2., 800 с.; Т. 3., 656 с.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2. 656 с.
14. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
15. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Продолжение курса / под. ред. А. Н. Тихонова. М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

*Поступила 14.01.2024; доработана после рецензирования 18.02.2024;  
принята к публикации 27.02.2024*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. L. Solymar, *Tunneling effect in superconductors and its application*, Mir Publ., Moscow, 1974 (In Russ.), 430 p.
2. J. Vertc, J. Bolton, *Theory and practical applications of the EPR method*, Mir Publ., Moscow, 1975 (In Russ.), 548 p.
3. N.D. Kuzmichev, “Behavior of the magnetization of polycrystalline YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub> samples in weak magnetic fields”, *JTF Letters*, **17**:7 (1991), 56–60 (In Russ.).
4. N.D. Kuzmichev, “Hysteresis magnetization and generation of harmonics by magnetic materials: Analysis of the spectrum of magnetization harmonics on the example of high-temperature superconductors”, *JTF*, **64**:12 (1994), 63–74 (In Russ).
5. N.D. Kuzmichev, “Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the dependence under study”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:1 (2011), 70–80 (In Russ).

6. N. D. Kuzmichev, “Modulation technique for restoring the original dependences and their derivatives in the case of arbitrary modulation amplitudes”, *JTF Letters*, **20**:22 (1994), 39–43 (In Russ).
7. N. D. Kuzmichev, “Estimates of errors in the modulation recovery of the response function and its derivatives”, *JTF*, **37**:7 (1997), 124–127 (In Russ).
8. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for solving ill-posed problems*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russ.), 288 p.
9. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, “Experimental determination of the derivative of the current-voltage characteristic of a nonlinear semiconductor structure using modulation Fourier analysis”, *FTP*, **50**:6 (2016), 830–833 (In Russ.).
10. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, “Differential equations for restoring the derivative without hysteresis of the nonlinear current-voltage characteristic of a semiconductor structure”, *FTP*, **53**:1 (2019), 111–114 (In Russ.).
11. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, I. V. Buryanov, “Differential Equations for reconstructing the average differential susceptibility of superconductors from measurements of the first harmonic of magnetization”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:3 (2018), 327–335 (In Russ.).
12. G. M. Fichtenholtz, *Course of differential and integral calculus*, **2, 3**, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russ.), 800, 656 p.
13. V. I. Smirnov, *Course of higher mathematics*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russ.), 656 p.
14. V. Ya. Arsenin, *Methods of mathematical physics and special functions*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russ.), 656 p.
15. V. A. Ilyin, V. A. Sadovnichy, B. Kh. Sendov, *Mathematical analysis. Continuation of the course*, Moscow State University Publ., 1987 (In Russ.), 358 p.

*Submitted 14.01.2024; Revised 18.02.2024; Accepted 27.02.2024*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.