DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.20-31
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

Математическое моделирование упруго деформированных состояний тонких изотропных пластин с использованием многочленов Чебышева

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Архангельск, Российская Федерация)

Аннотация. В данной работе предложен метод получения решения неоднородного бигармонического уравнения в задаче о математическом моделировании упруго деформированных состояний тонких изотропных прямоугольных пластин с использованием системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Метод основан на нахождении решения исходного бигармонического уравнения в виде конечной суммы ряда Чебышева по каждой независимой переменной в сочетании с матричными преобразованиями и свойствами многочленов Чебышева. Задача рассматривается для случая, когда на пластину действует поперечная нагрузка, а в качестве граничных условий используется шарнирное закрепление по краям пластины. Используя экстремумы и нули многочленов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации, краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов при разложении искомого решения по этим многочленам. Представлены результаты расчетов с использованием предложенного метода. Как показало сравнение, полученные результаты с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными при использовании аналитических решений, приведенных в работе. В статье также представлены результаты расчетов с использованием предложенного метода в случае, когда два противоположных края пластины защемлены, а два шарнирно закреплены. Проведено сравнение с аналогичными результатами моделирования напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин, которые представлены в открытой печати.

Ключевые слова: неоднородное бигармоническое уравнение, многочлены Чебышева, упругая деформация тонких изотропных пластин

Для цитирования: Гермидер О. В., Попов В. Н. Математическое моделирование упруго деформированных состояний тонких изотропных пластин с использованием многочленов Чебышева // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 20–31. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.20-31

Об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, ул. Набережная Северной Двины, д. 17), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2112-805X, o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, ул. Набережная Северной Двины, д. 17), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

Original article

MSC2020 35Q20

Mathematical Modeling of Elastically Deformed States of Thin Isotropic Plates Using Chebyshev Polynomials

O. V. Germider, V. N. Popov

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov

Abstract. In this paper a method for solving an inhomogeneous biharmonic equation while modeling elastically deformed states of thin isotropic rectangular plates using a system of orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind is proposed. The method is based on representation of a solution to the initial biharmonic equation as a finite sum of Chebyshev series by each independent variable in combination with matrix transformations and properties of Chebyshev polynomials. The problem is examined for the case when a transverse load acts on the plate, and the hinge fastening along the edges of the plate is taken as boundary conditions. Using the extremes and zeros of Chebyshev polynomials of the first kind as collocation points, the boundary value problem is reduced to a system of linear algebraic equations. Decomposition coefficients of desired function with respect to Chebyshev polynomials act as unknowns in this system. As the comparison showed, the results obtained by this method with a high degree of accuracy coincide with similar results derived using analytical approach that are given in the article. The paper also presents the results of calculations using the proposed method in the case when two opposite edges of the plate are pinched and two others are pivotally fixed. The comparison with similar results of modeling the stress-strain states of rectangular plates which are presented in the open sources is carried out.

Keywords: inhomogeneous biharmonic equation, Chebyshev polynomials, deformation of a thin isotropic plate

For citation: *O. V. Germider, V. N. Popov.* Mathematical Modeling of Elastically Deformed States of Thin Isotropic Plates Using Chebyshev Polynomials. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:1(2024), 20–31. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.20-31

About the authors:

Oksana V. Germider, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Engineering Structures, Architecture and Graphics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2112-805X, o.germider@narfu.ru

Vasily N. Popov, D.Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

1. Введение

Определение напряженно-деформированного состояния изотропных пластин под действием поперечных нагрузок в рамках теории Кирхгофа–Лява основывается на решении бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа [1]. Аналитическое решение этого уравнения при граничных условиях шарнирного опирания, защемления и свободного края пластин можно получить лишь в ограниченных случаях, что приводит к необходимости разработки эффективных методов решения таких краевых задач. Так, в [2–4] для получения решения краевых задач использован проекционно-сеточный метод коллокации и наименьших квадратов, в [5–6] – спектральные методы, в [7–8] – методы конечных элементов и разностей, соответственно, [9] – метод сплайн-коллокации, в [10] решение построено в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля. В связи с трудностью достижения требуемой степени детализации области интегрирования, что предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразреженной матрицей [11], проблема поиска решений бигармонических уравнений, к которым могут быть сведены задачи моделирования деформаций тонких пластин, продолжает оставаться актуальной. При этом, как отмечено в [3–4], построение их решения вызывает ряд трудностей, связанных с наличием в эллиптических уравнениях производных четвертого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходных краевых задач. Исследования в этом направлении способствуют разработке универсальных высокоточных методов, которые могут быть применены к решению дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа, возникающих при моделировании процессов в механике деформируемого твердого тела, в частности при описании упругопластических деформироваций нанопластин [12].

В представленной работе для моделирования деформаций изотропных тонких упругих пластин прямоугольной формы предложен метод с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева. Решение неоднородного бигармонического уравнения записывается в виде усеченного ряда по ортогональным многочленам Чебышева первого рода для каждой переменной в двумерной области. Коэффициенты в этом разложении искомой функции находятся с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений, при этом в качестве точек коллокации выбраны точки экстремума и нули многочленов Чебышева. Следует заметить, что за последнее время метод коллокации с использованием многочленов Чебышева показал свою эффективность и универсальность при решении ряда краевых задач механики сплошных сред [13–14]. В отличие от методов конечных разностей и конечных элементов скорость сходимости спектральных методов ограничена только регулярностью интерполируемой функции [6], в случае использования полиномов Чебышева в качестве базисных функций и точек коллокации в нулях или точках экстремума этих полиномов наблюдается устойчивость к ошибкам округления [13].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу статического изгиба изотропной тонкой упругой прямоугольной пластины со стенками расположенными в плоскостях $x = 0$, $x = d_1$, $y = 0$ и $y = d_2$ декартовой системы координат $Oxyz$ в рамках теории Кирхгофа–Лява. В этом случае прогиб пластины $\omega(x, y)$ будем описывать на основе бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа, которое запишем в виде [1]:

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \tag{2.1}$$

где $q(x, y)$ – поперечная нагрузка; $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ – цилиндрическая жесткость пластины; h – толщина пластины; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

В качестве граничного условия используем шарнирное закрепление [1]:

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0,\, d_1, \tag{2.2}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0,\, d_2. \tag{2.3}$$

Получим решение поставленной краевой задачи с использованием многочленов Чебышева первого рода.

3. Решение краевой задачи

Представляем функцию $\omega(x,y)$, где $x \in [0,\, d_1]$ и $y \in [0,\, d_2]$, в виде частичной суммы ряда полиномов Чебышева первого рода $\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i),\ (j_i = \overline{0, n_i})\}$ [14] по каждой переменной $x_i \in [-1,\, 1]$ $(n_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2)$:

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1,\ x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1.$$

В результате получим

$$w(x,y) = \sum_{\substack{k_i=0\\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1k_2} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) = \mathbf{T_1}(x_1) \otimes \mathbf{T_2}(x_2)\mathbf{A}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{T_i}(x_i)$ – матрица-строка размером $1 \times n_i'$ $(n_i' = n_i + 1,\ i = 1, 2)$:

$$\mathbf{T_i}(x_i) = \left(T_0(x_i)\, T_1(x_i) \ldots T_{n_i-1}(x_i)\, T_{n_i}(x_i)\right);$$

$\mathbf{A}$ – матрица-столбец, имеющая размер $n_1' n_2' \times 1$, элементами которой являются коэффициенты $a_{k_1k_2}$ в разложении (3.1):

$$\mathbf{A} = \left(a_{00}\, a_{01} \ldots a_{n_1n_2-1}\, a_{n_1n_2}\right)^T;$$

знаком $\otimes$ в (3.1) обозначено тензорное умножение двух матриц [15].

Выберем в бигармоническом уравнении (2.1) в качестве точек коллокации для каждой введенной переменной x_i точки экстремума многочлена $T_{n_i}(x_i)$ [14]:

$$x_{i,k_i} = \cos\left(\frac{\pi(n_i - k_i)}{n_i}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i},\ i = 1, 2. \tag{3.2}$$

При подстановке точек (2.1) в $T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i)$ получим:

$$T_{j_i}(i, x_{k_i}) = \cos\left(\frac{\pi j_i(n_i - k_i)}{n_i}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0,\ n_1},\ i = 1, 2. \tag{3.3}$$

Производную $\mathbf{T_i}(x_i)$ по переменой x_i запишем в виде произведения [16]

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T_i}}{\mathrm{d}x_i} = \mathbf{T_i}\mathbf{J_i}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{J_i}$ – верхнетреугольная матрица размерности $n_i' \times n_i'$

$$J_{i,j_1\,j_2} = \begin{cases} j_2, & j_1 = 0,\ j_2 \text{ неч.}, \\ 2j_2 & j_1 > 0,\ j_2 - j_1 > 0,\ j_2 - j_1 \text{ неч.} \end{cases}$$

Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов осуществляем с нуля. Вторую и четвертую производную $\mathbf{T_i}(x_i)$ по каждой переменной x_i находим, соответственно, как

$$\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{j}}\mathbf{T_i}}{\mathrm{d}x_i^j} = \mathbf{T_i}\mathbf{J_i}^j, \quad j = 2, 4;\ i = 1, 2. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в (2.1) и используя (3.3)-(3.5), приходим к системе линейных $n_1'n_2'$-уравнений, в которой согласно граничным условиям (2.2) и (2.3) осуществляем замену уравнений в точках, для которых $x_i = x_{i,0}$ и $x_i = x_{i,n_i}$, на уравнения

$$\mathbf{T_1}(x_{1,0}) \otimes \mathbf{T_2}(x_2)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T_1}(x_{1,n_1}) \otimes \mathbf{T_2}(x_2)\mathbf{A} = 0, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{T_1}(x_1) \otimes \mathbf{T_2}(x_{2,0})\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T_1}(x_1) \otimes \mathbf{T_2}(x_{2,n_2})\mathbf{A} = 0, \tag{3.7}$$

а в точках $x_{i,1}$ и x_{i,n_i-1} – на уравнения

$$\mathbf{T_1}(x_{1,0})\mathbf{J}^2 \otimes \mathbf{T_2}(x_2)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T_1}(x_{1,n_1})\mathbf{J}^2 \otimes \mathbf{T_2}(x_2)\mathbf{A} = 0, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{T_1}(x_1) \otimes \left(\mathbf{T_2}(x_{2,0})\mathbf{J}^2\right)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T_1}(x_1) \otimes \left(\mathbf{T_2}(x_{2,n_2})\mathbf{J}^2\right)\mathbf{A} = 0. \tag{3.9}$$

Полученная таким образом система линейных $n_1'n_2'$-уравнений в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{BA} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{B_i}, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{B_i}$ $(i = \overline{1,5})$ – квадратные матрицы размером $n_1'n_2' \times n_1'n_2'$: первые три из них получены из бигармонического уравнения (2.1) в точках (3.2) за исключением $x_{i,0}$, $x_{i,1}$, x_{i,n_i-1} и x_{i,n_i}, соответствующие им строки матриц нулевые; матрицы $\mathbf{B_4}$ и $\mathbf{B_5}$ строятся из граничных условий (2.2) и (2.3), ненулевые строки матрицы $\mathbf{B_4}$ соответствуют краевым узлам $x_{i,0}$ и x_{i,n_i}, для матрицы $\mathbf{B_5}$ – узлам $x_{i,1}$ и x_{i,n_i-1}; $\mathbf{F} = (f_{01}\, f_{02}, \ldots\, f_{n_1\,n_2})^T$ – матрица-столбец размера $n_1'n_2' \times 1$ с элементами $f_{k_1\,k_2} = q(x(x_{1,k_1}), y(x_{2,k_2}))/D$ за исключением нулевых элементов в краевых узлах. Для $\mathbf{B_i}$ $(i = \overline{1,3})$ соответственно имеем

$$\mathbf{B_1} = 16d_1^{-4}\mathbf{G_1''}\mathbf{J_1}^4 \otimes \mathbf{G_2''}, \quad \mathbf{B_3} = 16d_2^{-4}\mathbf{G_1''} \otimes \left(\mathbf{G_2''}\mathbf{J_2}^4\right),$$

$$\mathbf{B_2} = 32(d_1d_2)^{-2}\mathbf{G_1''}\mathbf{J_1}^2 \otimes \left(\mathbf{G_2''}\mathbf{J_2}^2\right).$$

Здесь $\mathbf{G_i}$ $(i = 1, 2)$ – квадратные матрицы размером $n_i' \times n_i'$, в которых k_i-строки равны соответственно $\mathbf{T_i}(x_{i,k_i})$ $(k_i = \overline{0, n_i})$. Двойной штрих у матриц $\mathbf{G_i''}$ $(i = 1, 2)$ означает, что первые две строки и последние две строки нулевые, остальные строки такие же, как у матриц $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$. Заметим, что для заполнения матриц $\mathbf{G_1''}$ и $\mathbf{G_2''}$ необходимо вычислить элементы их верхних левых четвертей, остальные ненулевые элементы восстанавливаются путем умножения на -1 в соответствующей степени из полученных. Если n_i нечетное, то для элементов их верхних правых четвертей имеем $G_{i,k_i\,n_i-j_i} = G_{i,k_i\,j_i}(-1)^{n_i-k_i}$, для элементов их нижних левых четвертей – $G_{i,n_i-k_i\,j_i} = G_{i,k_i\,j_i}(-1)^{j_i}$, для элементов их нижних правых четвертей –

$G_{i,n_i-k_i\,n_i-j_i} = G_{i,k_i\,j_i}(-1)^{j_i+k_i}$ $(k_i, j_i = \overline{2, [n_i/2]},\ i = 1,2)$. Здесь квадратные скобки введены для обозначения целой части числа. Если n_i четное, то дополнительно $G_{i,n_i/2\,2j_i} = (-1)^{j_i}$, $G_{i,2j_i\,n_i/2} = (-1)^{j_i+n_i/2}$ $(j_i = \overline{2, n_i/2},\ i = 1,2)$. Для $\mathbf{B_i}$ $(i = 4,5)$ из (3.6)-(3.9) получаем

$$\mathbf{B_4} = \mathbf{G_3} \otimes \mathbf{G_2} + \mathbf{G_1} \otimes \mathbf{G_4},$$

$$\mathbf{B_5} = 4d_1^{-2}\mathbf{G_5}\mathbf{J_1}^2 \otimes \mathbf{G_2} + 4d_2^{-2}\mathbf{G_1} \otimes \left(\mathbf{G_6}\mathbf{J_2}^2\right),$$

Здесь $\mathbf{G_i}$ $(i = \overline{3,6})$ – квадратные матрицы размером $n'_i \times n'_i$: в $\mathbf{G_3}$ и $\mathbf{G_4}$ только первые и последние строки ненулевые и равны соответствующим строкам матриц $\mathbf{G_j}$ $(j = 1,2)$, в $\mathbf{G_5}$ и $\mathbf{G_6}$ – вторые и предпоследние строки.

Для приближения матрицы $\mathbf{B}$ в (3.10) к разреженной матрице можно воспользоваться свойствами конечных сумм многочленов Чебышева в выбранных точках коллокации (3.2). Левые и правые части уравнения (3.10) умножаем на $\mathbf{G_1}^{-1} \otimes \mathbf{G_2}^{-1}$. Обратные матрицы $\mathbf{G_i}^{-1}$ находим как $2(\mathbf{G_i}^T)/n_i$ $(i = 1,2)$, где первые и последние строки и столбцы полученных матриц делим на 2 [17]. Здесь верхний индекс T у матриц $\mathbf{G_i}$ $(i = 1,2)$ обозначает операцию транспонирования. В частности, в результате умножения получим

$$\mathbf{G_1}^{-1} \otimes \mathbf{G_2}^{-1}\mathbf{B_1} = 16d_1^{-4}\mathbf{G_1}^{-1}\mathbf{G''_1}\mathbf{J_1}^4 \otimes \left(\mathbf{G_2}^{-1}\mathbf{G''_2}\right),$$

$$\mathbf{G_1}^{-1} \otimes \mathbf{G_2}^{-1}\mathbf{B_5} = 4d_1^{-2}\mathbf{G_1}^{-1}\mathbf{G_5}\mathbf{J_1}^2 \otimes \mathbf{I_2} + 4d_2^{-2}\mathbf{I_1} \otimes \left(\mathbf{G_2}^{-1}\mathbf{G_6}\mathbf{J_2}^2\right),$$

где $\mathbf{I_i}$ – единичная матрица размером $n'_i \times n'_i$ $(i = 1,2)$.

Решение преобразованного уравнения (3.10) находим LU-методом. Зная элементы матрицы $\mathbf{A}$, функцию $w(x,y)$ получаем на основании (3.1).

Аналогично, коэффициенты в разложении (3.1) могут быть найдены, если в качестве точек коллокации в уравнении (2.1) для каждой введеной переменной x_i использовать нули многочлена $T_{n_i+1}(x_i)$ [14]:

$$x^*_{i,k_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i+1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i},\ i = 1,2. \tag{3.11}$$

4. Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим изгиб шарнирно закрепленной пластины, на которую действует распределенная нагрузка $q(x,y) = 10^5 \sin(\pi x/d_1)\sin(\pi y/d_2)$ Па [3]. В этом случае аналитическое решение краевой задачи (2.1)-(2.3) имеет вид [1]

$$\omega(x,y) = \frac{q(x,y)d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D(d_1^2 + d_2^2)^2}. \tag{4.1}$$

При проведении вычислений на основании (3.1) использованы значения физических параметров из [2–3]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $n_{1,2} = n$. В Таблице 4.1 представлены результаты вычислений для случая узловых точек, являющимися точками экстремума многочлена Чебышева степени n (3.2) и нулями $T_{n+1}(x_k)$ $(k = 1,2)$ (3.11), где для расчета погрешности построенного решения, как и в [2–3], применены 100 равномерно распределенных контрольных точек (x_i, y_j):

$$\|E_n\|_\infty = \frac{\max\limits_{i,j}|\omega(x_i,y_j) - w(x_i,y_j)|}{\max\limits_{i,j}|\omega(x_i,y_j)|}.$$

Порядок сходимости погрешности определяем согласно [2–3] и [18]

$$r_1 = \frac{\|E_n\|_\infty}{\|E_{2n}\|_\infty}, \quad r_2 = \log_2 r_1.$$

Таблица 4.1. Значения погрешности полученного решения и порядка сходимости для случая шарнирного закрепления (2.2) и (2.3)
Table 4.1. Error values of the obtained solution and the order of convergence for the case of hinged fastening (2.2) and (2.3)

n	$\|E_n\|_\infty$		
	(2.2), (2.3) и (4.1)	(2.2), (2.3) и (3.11)	[2]
9	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
11	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$	-
18	$1.2 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$
	r_1		
	$2.5 \cdot 10^{9}$	$4.7 \cdot 10^{9}$	6.4
	r_2		
	31.2	32.2	2.7

Из Таблицы 4.1 видно, что высокая точность полученного решения с использованием точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева первого рода достигается при сравнительно малых значениях n, при этом наблюдается быстрая сходимость. Здесь отметим также, что при $n = 18$ погрешность построенного в настоящей работе решения $w(x, y)$ краевой задачи (2.1)-(2.3) имеет один порядок с погрешностью интерполируемой функции, полученной на основе (3.1), где коэффициенты в этом разложении (3.1) определяются с использованием значений точного решения $\omega(d_1(x_1+1)/2, d_2(x_2+1)/2)$, вычисленного в узлах (3.2): $\mathbf{A} = \mathbf{G_1}^{-1} \otimes \mathbf{G_2}^{-1}\mathbf{W}$, где $W = (w_{01}\, w_{02}, \ldots\, w_{n_1\, n_2})^T$ – матрица-столбец размера $n_1' n_2' \times 1$ с элементами $w_{k_1\, k_2} = \omega(x(x_{1,k_1}), y(x_{2,k_2}))$.

Приведем сравнение полученных результатов с результатами авторов работы [4], использовавших метод коллокации и наименьших квадратов в пространстве полиномов Чебышева. В [4] для достижения относительной погрешности приближенного решения в бесконечной норме $\|E\|_\infty = 1.11 \cdot 10^{-7}$ применена сетка 16×16, в каждой ячейке которой записана локальная система линейных алгебраических уравнений с $l = (K+1)(K+2)/2$ неизвестными, где $K = 7$ – степень старшего полинома Чебышева. Здесь глобальная система уравнений является объединением локальных систем. Из представленных результатов следует, что предлагаемым в настоящей работе методом удается построить более точное решение, по сравнению с представленным в работе [4], за счет использования свойств полиномов Чебышева, в частности их дискретной ортогональности. В работе [3] интегральным методом коллокации и наименьших квадратов значение $\|E\|_\infty = 7.58 \cdot 10^{-13}$ получено с применением сетки 16×16 и локальной системы линейных $l = (K+1)(K+2)/2$ уравнений при $K = 10$.

Предлагаемый в работе метод может быть применен и в случае других граничных условий. Рассмотрим, например, случай, когда на двух краях $x = 0$ и $x = d_1$ пластина защемлена, а на других краях шарнирно опирается. На прямоугольную пластину действует распределенная нагрузка

$$q(x,y) = 10^5 \left(\frac{d_1^4}{(d_1^2 + 4d_2^2)^2} - \cos\left(\frac{2\pi x}{d_1}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right) \text{ Па.}$$

Граничные условия запишем в виде [1]

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad x = 0,\, d_1, \tag{4.2}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0,\, d_2. \tag{4.3}$$

В этом случае аналитическое решение задачи (2.1), (4.2) и (4.3) имеет вид

$$\omega(x,y) = \frac{10^5 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + 4d_2^2)^2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right).$$

Результаты вычислений представлены в Таблице 4.2. Из таблиц 4.1 и 4.2 видно, что решения краевых задач, полученные представленным методом, сходятся с высоким порядком к аналитическим решениям при сравнительно небольших значениях n. Значения относительной погрешности решений в бесконечной норме использованием точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева первого рода оказались близкими, что говорит об хороших аппроксимационных свойствах метода. Результаты проведенных вычислительных экспериментов показывают, что метод является спектрально точным для гладкой функции решения.

Таблица 4.2. Значения погрешности полученного решения и порядка сходимости для граничного условия (4.2) и (4.3)

Table 4.2. Error values of the obtained solution and the order of convergence for the boundary conditions (4.2) and (4.3)

n	$\Vert E_n \Vert_\infty$	
	(3.2), (4.2) и (4.3)	(3.11), (4.2) и (4.3)
9	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
11	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$
18	$4.7 \cdot 10^{-13}$	$3.0 \cdot 10^{-12}$
	r_1	
	$1.1 \cdot 10^{9}$	$5.3 \cdot 10^{8}$
	r_2	
	30.0	29.0

5. Заключение

В работе с использованием многочленов Чебышева построено решение задачи моделирования напряженно-деформированного состояния прямоугольных изотропных пластин под действием поперечных нагрузок для случая шарнирного опирания на каждом крае пластин и его комбинации с защемлением на двух концах этих пластин. Показано, что полученные результаты с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями краевых задач при сравнительно небольших значениях степеней этих многочленов в разложении искомой функции, определяющей решение бигармонического уравнения.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики».

Список литературы

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

2. Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.

3. Шапеев В. П., Брындин Л. С., Беляев В. А. hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 556–572. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1936

4. Беляев В. А., Брындин Л. С. Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шапеев В. П. H-, P- и HP-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542522040029

5. Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2022. Vol. 143. pp. 687–699. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.07.014

6. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 39, Issue 9. pp. 2554–2569. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.048

7. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. Vol. 15. pp. 100318. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100318

8. Моханти Р. К., Каур Д. Компактная разностная схема высокой точности для одномерной нестационарной квазилинейной бигармонической задачи второго рода: приложение к физическим задачам // Сибирский журнал вычислительной математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 65–82. DOI: https://doi.org/10.15372/SJNM20180105

9. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Tomanova I.S. Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5 // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54. pp. 944–947. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0097-x

10. Зверяев Е. М., Коваленко М. Д., Абруков Д. А., Меньшова И. В., Кержаев А. П. О разложениях по функциям Папковича-Фадля в задаче изгиба пластины // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. Т. 38. 28 с. DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2019-38

11. Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2013. Т. 1. С. 52–62.

12. Тебякин А. Д., Крысько А. В., Жигалов М. В., Крысько В. А. Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 4. С. 494–505. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505

13. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 322. pp. 55–65. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.11.048

14. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. New York: Chapman and Hall/CRC, 2002. 360 p.

15. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. Vol. 4, Issue 1. pp. 160–177.

16. Yuksel G., Isik O., Sezer M. Error analysis of the Chebyshev collocation method for linear second-order partial differential equations // International Journal of Computer Mathematics. 2015. Vol. 92, Issue 10. pp. 2121–2138. DOI: https://doi.org/10.1080/00207160.2014.966099

17. Гермидер О. В., Попов В. Н. О решении модельного кинетического уравнения ES // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 3. С. 37–49. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49

18. Chen G., Li Zh., Lin P. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // Advances in Computational Mathematics. 2008. Vol. 29. pp. 113–133. DOI: https://doi.org/10.1007/s10444-007-9043-6

Поступила 26.01.2024; доработана после рецензирования 10.02.2024; принята к публикации 27.02.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1959, 580 p.

2. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, V. P. Shapeyev, “[Metod kollokatsiy i naimen’shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin]”, *Vychislitel’nyye tekhnologii*, **18**:6 (2013), 31–43 (In Russ.).

3. V. P. Shapeyev, L. S. Bryndin, V. A. Belyayev, “hp-Variant metoda kollokatsii i naimen’shikh kvadratov s integral’nymi kollokatsiyami resheniya bigarmonicheskogo uravneniya”, *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, **26**:3 (2022), 1–15 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1936

4. V. A. Belyaev, L. S. Bryndin, S. K. Golushko, B. V. Semisalov, V. P. Shapeev, “h-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **62**:4 (2022), 517–537. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542522040029

5. N. Mai-Duy, D. Strunin, W. Karunasena, “A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **143** (2022), 687–699. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.07.014

6. W. Shao, X. Wu, “An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**:9 (2015), 2554–2569. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.048

7. X. Ye, Sh. Zhang, “A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation”, *Results in Applied Mathematics*, **15** (2022), 100318. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100318

8. R. K. Mohanty, D. Kaur, “Compact difference scheme with high accuracy for one dimensional unsteady quasi-linear biharmonic problem of second kind: Application to physical problems”, *Siberian Mathematical Journal*, **21**:1 (2018), 65—82 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15372/SJNM20180105

9. O. M. Lytvyn, O. O. Lytvyn, I. S. Tomanova, “Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5”, *Cybernetics and Systems Analysis*, **54** (2018), 994—947. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0097-x

10. Ye. M. Zveryayev, M. D. Kovalenko, D. A. Abrukov, I. V. Men’shova, A. P. Kerzhayev, *O razlozheniyakh po funktsiyam Papkovicha–Fadlya v zadache izgiba plastiny*, Preprinty IPM im. M. V. Keldysha, Moskva, 2019 DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2019-38 (In Russ.), 28 p.

11. V. I. Ryazhskikh, M. I. Slyusarev, M. I. Popov, “Chislennoye integrirovaniye bigarmonicheskogo uravneniya v kvadratnoy oblasti”, *Vestn. S.-Peterburg. un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. Prots. upr.*, **1**:1 (2013), 52–62 (In Russ.).

12. A. D. Tebyakin, A. V. Krysko, M. V. Zhigalov, V. A. Krysko, “Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method)”, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, **22**:4

(2022), 494–505 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505

13. A. Baseri, S. Abbasbandy, E. Babolian, "A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions", *Applied Mathematics and Computation*, **322** (2018), 55—65. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.11.048

14. J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2002, 360 p.

15. S. Liu, G. Trenkler, "Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products", *International Journal of Information and Systems Sciences*, **4**:1 (2008), 160–177.

16. G. Yuksel, O. Isik, M. Sezer, "Error analysis of the Chebyshev collocation method for linear second-order partial differential equations", *International Journal of Computer Mathematics*, **92**:10 (2015), 2121–2138. DOI: https://doi.org/10.1080/00207160.2014.966099

17. O. V. Germider, V. N. Popov, "O reshenii model'nogo kineticheskogo uravneniya ES", *Chebyshevskiy sbornik*, **23**:3 (2022), 37–49 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49

18. G. Chen, Zh. Li, P. Lin, "A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow", *Advances in Computational Mathematics*, **29** (2008), 113–133. DOI: https://doi.org/10.1007/s10444-007-9043-6

Submitted 26.01.2024; Revised 10.02.2024; Accepted 27.02.2024

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.