МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.11-19
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.17

О линейных пространствах двудольных графов

В. Е. Алексеев, **Д. В. Захарова**

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В статье рассматриваются симметрические линейные пространства двудольных графов (СЛПДГ), т. е. множество двудольных графов с фиксированными долями, замкнутое относительно симметрической разности и перестановок вершин в каждой доле. В работе получено структурное описание всех СЛПДГ. Симметрические линейные пространства двудольных графов делят на тривиальные (четыре СЛПДГ) и нетривиальные. Нетривиальные, в свою очередь, подразделяют на два семейства: серия C, состоящая только из биполных графов (графов, являющихся дизъюнктным объединением двух полных двудольных графов (крылья графа)) и серия D, состоящая из множества графов, у которых степени вершин в одной доле имеют одинаковую четность, а в другой могут быть любыми. Доказано, что любое СЛПДГ серии D совпадает с одним из девяти множеств, заданных четностями степеней вершин. Для СЛПДГ серии C (множество биполных графов) получено, что любое двустороннее СЛПДГ (т. е. содержащее графы, оба крыла которых имеют непустые доли) является пересечением множества всех биполных графов с множеством всех графов с четным числом ребер или каким-нибудь из пространств серии D.

Ключевые слова: граф, линейные пространства графов, двудольные графы, изоморфизм графов, симметрическая разность графов

Для цитирования: Алексеев В. Е., Захарова Д. В. О линейных пространствах двудольных графов // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 11–19. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.11-19

Об авторах:

Алексеев Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1533-0697

Захарова Дарья Владимировна, старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0009-0008-8040-7164, darya.zakharova@itmm.unn.ru

Original article

MSC2020 05C30, 05C60, 05C75

On linear spaces of bipartite graphs

V. E. Alekseev, **D. V. Zakharova**

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The article considers symmetric linear spaces of bipartite graphs (SLSBG), i.e. the set of bipartite graphs with fixed lobes closed with respect to the symmetric difference and permutations of vertices in each lobe. The operation of symmetric difference itself is introduced in this work. The paper provides a structural description of all SLSBG. Symmetric linear spaces of bipartite graphs are divided into trivial (four SLSBG) and nontrivial. Nontrivial ones, in turn, are divided into two families. The first is C-series consisting only of bicomplete graphs, i.e. graphs that are a disjunct union of two complete bipartite graphs graph wings). The second family is D-series that includes graphs in which the degrees of vertices in one lobe have the same parity, and in the other lobe these degrees may be arbitrary. It is proved that every SLSBG of the D-series coincides with one of nine sets defined by the parity of the vertices' degrees. For the SLSBG of the C-series it is obtained that every two-sided SLSBG (i.e., containing graphs whose both wings have nonempty lobes) is the intersection of the set of all bicomplete graphs with the set of all graphs with an even number of edges or with any space of the D-series.

Keywords: graph, linear spaces of graphs, bipartite graph, graph isomorphism, symmetric difference of graphs

For citation: *V. E. Alekseev, D. V. Zakharova.* On linear spaces of bipartite graphs. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:1(2024), 11–19. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.11-19

About the authors:

Vladimir E. Alekseev, D.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1533-0697

Darya V. Zakharova, Senior Lecturer, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0008-8040-7164, darya.zakharova@itmm.unn.ru

1. Введение

Рассматриваются обыкновенные графы (неориентированные графы без петель и кратных ребер).Основную терминологию можно найти в [1–2]. В данной работе продолжается исследование симметрических линейных пространств графов, которое было начато в работах [3–4]. Рассматриваются множества графов, которые являются замкнутыми относительно сложения по модулю 2. Определение изоморфизма и операции суммы по модулю два для произвольных графов можно посмотреть, например, в [5–7]. В работе [4] были описаны все линейные пространства графов, замкнутые относительно изоморфизма (СЛПГ). В данной работе получен аналогичный результат для двудольных графов.

Определение 1.1. *Под двудольным графом понимается граф, множество вершин которого уже разбито на две доли A и B, а множество ребер – подмножество декартова произведения $A \times B$, т. е. $G = (A, B, E)$, где $E \subseteq A \times B$.*

Определение 1.2. *Двудольные графы $G_1 = (A, B, E_1)$ и $G_2 = (A', B', E_2)$ двудольно изоморфны, если существуют биекции $f_1 : A \to A'$, $f_2 : B \to B'$, такие что $(x_1, x_2) \in E_1$ тогда и только тогда, когда $(f_1(x_1), f_2(x_2)) \in E_2$.*

Далее под изоморфизмом понимается двудольный изоморфизм.

В дальнейшем считаем, что одна доля двудольного графа является подмножеством множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, а другая – подмножеством множества $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$. Множество всех таких графов обозначим через $G(A, B)$. Предполагаем, что $l \geq 3$, $r \geq 3$. Ребро (a_i, b_j) будем кратко записывать как (i, j), полагая, что первый элемент пары всегда есть индекс элемента из множества A, второй – из B. Будем использовать обозначения $O_{l,r} = (A, B, \varnothing)$ и $K_{p,q} = (X, Y, X \times Y)$, где $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $Y = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$. Если G – двудольный граф, долями которого являются подмножества множеств A и B, то через GO обозначаем граф из $G(A, B)$, полученный добавлением к G отсутствующих вершин в качестве изолированных.

Определение 1.3. *Сумма по модулю 2 двух двудольных графов с одинаковыми долями $G_1 = (A, B, E_1)$ и $G_2 = (A, B, E_2)$ есть граф $G_1 \oplus G_2 = (A, B, (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1))$.*

Определение 1.4. *Множество двудольных графов с фиксированными долями A и B назовем симметрическим линейным пространством двудольных графов (СЛПДГ), если оно замкнуто относительно суммы по модулю 2 и двудольного изоморфизма.*

Нужно отметить, что двудольные графы, изоморфные в обычном смысле, могут не быть двудольно изоморфными. Поэтому СЛПДГ, вообще говоря, не является симметрическим линейным пространством графов, как оно определено в [2]. В данной статье дается описание всех СЛПДГ.

Если $G_1, \ldots, G_k$ – графы из $G(A, B)$, то через $[G_1, \ldots, G_k]$ будем обозначать замыкание множества $\{G_1, \ldots, G_k\}$ относительно суммы по модулю 2 и переименования вершин в долях, т. е. минимальное СЛПДГ, содержащее все эти графы.

2. Предварительная классификация

Очевидно, все множество $G(A, B)$, множество $\{O_{l,r}\}$, и множество $\{O_{l,r}, K_{l,r}\}$, являются СЛПДГ. Легко также видеть, что сумма по модулю 2 двух графов, каждый из которых имеет четное число ребер, – тоже граф с четным числом ребер. Поэтому множество всех графов из $G(A, B)$ с четным числом ребер, которое будем обозначать $E0$, тоже есть СЛПДГ. Отметим, что не существует СЛПДГ, промежуточных между $G(A, B)$ и $E0$. Эти четыре СЛПДГ будем называть *тривиальными*. Остальные (нетривиальные) СЛПДГ разделим на два семейства.

Определение 2.1. *Двудольный граф назовем биполным, если он является дизъюнктным объединением двух полных двудольных графов (двудольный граф, у которого одна доля – пустое множество, тоже считается полным двудольным).*

Таким образом, граф $O_{l,r}$ – биполный. Граф $K_{l,r}$ также считаем биполным. Если нетривиальное СЛПДГ состоит только из биполных графов, будем говорить, что оно принадлежит серии C, в противном случае – серии D. Далее эти два семейства рассматриваются по отдельности.

Полезной будет следующая структурная характеристика биполных графов. Семейство биполных двудольных графов – наследственный класс, т. е. замкнут относительно удаления вершин. Поэтому он может быть охарактеризован запрещенными графами – минимальными по отношению «быть порожденным подграфом» графами, не содержащимися в нем [8]. Покажем, что множество минимальных запрещенных подграфов состоит из двух графов.

Пусть F_1 и F_2 – двудольные графы с долями $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$ и множествами ребер соответственно $\{(1,1)\}$ и $\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$.

Л е м м а 2.1. *Двудольный граф является биполным тогда и только тогда, когда в нем нет порожденных подграфов, изоморфных F_1 или F_2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, каждый из графов F_1, F_2 не является биполным и это верно для любого графа, содержащего какой-нибудь из них в качестве порожденного подграфа. Следовательно, биполные графы не могут иметь порожденных подграфов, изоморфных F_1 или F_2. Докажем обратное. Пусть G – граф, не являющийся пустым, в котором нет порожденных подграфов, изоморфных F_1 или F_2. Рассмотрим его невырожденную (не являющуюся изолированной вершиной) компоненту связности. Допустим, эта компонента не является полным двудольным графом, тогда в ней есть две несмежные вершины из разных долей. В кратчайшем пути, соединяющем эти вершины, первые четыре вершины порождают подграф, изоморфный F_2, что невозможно. Следовательно, в графе G каждая невырожденная компонента связности есть полный двудольный граф. Допустим, имеются две невырожденные компоненты. Если бы существовала вершина, не принадлежащая этим компонентам, то, добавив к ней одну вершину из одной компоненты и две смежные вершины из другой, получили бы порожденный подграф F_1. Следовательно, весь граф состоит из этих двух компонент и, значит, он биполный. Если же невырожденная компонента только одна, то все изолированные вершины находятся в одной доле, иначе опять образовался бы порожденный подграф F_1. Значит, и в этом случае граф G биполный.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3. Серия D – множество графов, с одинаковыми степенями вершин в одной из долей

Пусть α и β – элементы множества $\{0, 1, *\}$. Обозначим через $D(\alpha, \beta)$ множество всех графов из $G(A, B)$, у которых степени вершин в доле A

- все четны, если $\alpha = 0$;
- все нечетны, если $\alpha = 1$;
- могут быть любыми, если $\alpha = *$,

и аналогичный смысл имеет параметр β для доли B. Например, $D(*, 1)$ есть множество графов, у которых все вершины в доле B имеют нечетные степени. Введем еще значение параметра eq, означающее, что в соответствующей доле степени всех вершин имеют одинаковую четность, и положим

- $D(0, eq) = D(0,0) \cup D(0,1)$;
- $D(eq, 0) = D(0,0) \cup D(1,0)$;
- $D(eq) = D(0,0) \cup D(1,1)$;
- $D(eq, eq) = D(0,0) \cup D(0,1) \cup D(1,0) \cup D(1,1)$;
- $D(eq, *) = D(0,*) \cup D(1,*)$;
- $D(*, eq) = D(*,0) \cup D(*,1)$.

Т е о р е м а 3.1. *Любое СЛПДГ серии D совпадает с одним из следующих множеств: $D(0,0)$, $D(0,*)$, $D(*,0)$, $D(0,eq)$, $D(eq,0)$, $D(eq)$, $D(eq,eq)$, $D(eq,*)$, $D(*,eq)$.*

То, что каждое из этих множеств является СЛПДГ, следует из того легко проверяемого факта, что при сложении графов по модулю 2 четности степеней вершин также складываются по модулю 2. Ни одно из них не состоит только из биполных графов, значит, все они относятся к серии D. Остаток этого раздела посвящен доказательству того, что других СЛПДГ серии D не существует.

Л е м м а 3.1. *Любое СЛПДГ серии D содержит граф $K_{2,2}O$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим какое-нибудь СЛПДГ, состоящее не только из биполных графов. По лемме 2.1 в нем имеется граф G, в котором множество $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ порождает подграф F_1 или F_2. Допустим, что это F_1. Обозначим через G' граф, получаемый из графа G переименованием вершин посредством транспозиции (a_1, a_2), G'' – посредством транспозиции (b_1, b_2), G''' – применением обеих транспозиций. Рассмотрим граф $G^0 = G \oplus G' \oplus G'' \oplus G'''$. Всякое ребро между вершинами, не принадлежащими множеству $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, принадлежит каждому из четырех слагаемых, а ребро, соединяющее вершину из этого множества с вершиной вне него, принадлежит ровно двум слагаемым. Поэтому ни одно из таких ребер не содержится в графе G^0, следовательно, $G^0 = K_{2,2}O$. Это рассуждение дословно переносится на случай, когда в графе G имеется порожденный подграф, изоморфный F_2.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Л е м м а 3.2. $[K_{2,2}O] = D(0,0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 3.1 следует, что $[K_{2,2}O] \subseteq D(0,0)$. Докажем обратное включение. Пусть $G \in D(0,0)$. Если G не пустой, возьмем в нем вершину $x_1 \in A$ ненулевой степени. Имеется не менее двух вершин, смежных с x_1, пусть y_1, y_2 – такие вершины. Степень вершины y_1 тоже не меньше 2, пусть x_2 – смежная с ней вершина, отличная от x_1. Подграф, порожденный вершинами x_1, x_2, y_1, y_2, содержит не менее 3 ребер. Если граф G сложить с графом, полученным из $K_{2,2}O$ таким переименованием вершин, чтобы эти два графа имели три одинаковых ребра, получим граф, имеющий меньше ребер, чем граф G. Повторяя эти действия, в конце концов получим пустой граф, т.е. G будет разложен в сумму графов, изоморфных $K_{2,2}O$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Приступаем к доказательству теоремы 3.1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X – СЛПДГ серии D, содержащее графы, имеющие вершины нечетной степени. В зависимости от того, как распределены такие вершины, рассмотрим следующие случаи (с точностью до симметрии между A и B).

1. В каждой доле любого графа из X степени всех вершин имеют одинаковую четность.

   1.1. Во всех графах из X все вершины доли A имеют четные степени, а в доле B степени всех вершин имеют одинаковую четность, причем в X есть такой граф G, в котором степени всех вершин из доли B нечетны (т. е. $G \in D(0,1)$). Таким образом, $X \subseteq D(0,eq)$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство. Напомним, что $D(0,0) \subseteq X$, поэтому остается показать, что $D(0,1) \subseteq X$. Пусть H – произвольный граф из $D(0,1)$. Тогда $G \oplus H = F \in D(0,0)$. Отсюда $H = G \oplus F \in X$.

   1.2. В каждом графе из X степени всех вершин имеют одинаковую четность, причем в X имеется граф G, у которого все степени нечетны. Таким образом, $X \subseteq D(eq)$. Обратное включение доказывается точно так же, как в п. 1.1, только $D(0,1)$ нужно заменить на $D(1,1)$.

   1.3. В каждом графе из X степени всех вершин каждой доли имеют одинаковую четность (но степени вершин из разных долей могут быть разной четности), причем в X имеются графы $G_1 \in D(0,1)$ и $G_2 \in D(1,0)$. Таким образом, $X \subseteq \subseteq D(eq,eq)$. Как и в п. 1.1 доказываются включения $D(0,1) \subseteq X$, $D(1,0) \subseteq X$ и $D(1,1) \subseteq X$, из которых следует $D(eq,eq) \subseteq X$.

2. В X имеется граф, у которого в одной из долей (может быть, в обеих) имеются вершины со степенями разной четности.

   2.1. Во всех графах из X все вершины доли A имеют четные степени, а в доле B могут быть вершины нечетной степени, причем в X есть такой граф, в котором доля B содержит вершины как четной, так и нечетной степени. Таким образом, $X \subseteq D(0,*)$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство. Пусть $G \in X$ – граф, в котором вершина b_1 имеет четную степень, а вершина b_2 – нечетную, а граф G' получен из G транспозицией (b_1, b_2). Тогда в графе $H = G \oplus G'$ в доле B все вершины, кроме b_1 и b_2, изолированные, а вершины b_1 и b_2 имеют одинаковые окрестности и нечетные степени. Складывая этот граф с несколькими графами, изоморфными графу $K_{2,2}O$ (принадлежащему, напомним, множеству X), можно получить граф $K_{2,1}O$, который, таким образом, содержится в X. Очевидно, любой граф из $D(0,*)$ раскладывается в сумму графов, изоморфных $K_{2,1}O$. Следовательно, $D(0,*) \subseteq X$.

   2.2. В каждом графе из X степени всех вершин доли A имеют одинаковую четность и в X имеется граф G_1, у которого эти степени нечетны, и граф G_2, у которого в доле B есть вершины со степенями разной четности. Таким образом, $X \subseteq D(eq,*)$. Включение $D(0,*) \subseteq X$ доказывается точно так же, как в п. 2.1. Пусть $H \in D(1,*)$. Тогда $H \oplus G_1 = F \in D(0,*)$, отсюда $H = G_1 \oplus F \in X$.

   2.3. В X имеется граф G_1, у которого в доле A есть вершины со степенями разной четности, и граф G_2, у которого в доле B есть вершины со степенями разной четности. Как в п. 2.1. доказывается, что X содержит графы $K_{1,2}O$ и $K_{2,1}O$. Легко видеть, что из этих двух графов можно «собрать» любой граф с четным числом ребер. Но тогда либо $X = E0$ либо $X = G(A,B)$, в любом случае X не принадлежит серии D.

Доказательство завершено.

Отметим, что среди множеств, упоминаемых в формулировке теоремы 3.1, могут быть одинаковые. Например, если l четно, а r нечетно, то $D(eq) = D(0, eq) = D(0, 0)$, $D(eq, eq) = D(eq, 0)$, а если оба параметра нечетны, то $D(0, eq) = D(eq, 0) = D(0, 0)$, $D(eq, eq) = D(eq)$.

4. Серия C – биполные графы

Два полных двудольных подграфа, составляющих биполный граф, будем называть его *крыльями*. Сумма двух биполных графов – всегда биполный граф, так что множество всех биполных графов из $G(A, B)$ образует СЛПДГ, его будем обозначать $2C$. В нем есть два очевидных подпространства: $C(A)$ состоит из всех биполных графов, у которых у одного из крыльев одной из долей является все множество B (а у второго крыла, следовательно, одна доля пустая), аналогично определяется $C(B)$ (граф $K_{l,r}$ принадлежит обоим). Легко видеть, что у $C(A)$ есть единственное нетривиальное подпространство $C(A, 0)$, состоящее из всех графов множества $C(A)$, у которых степени всех вершин из B четны, аналогично у $C(B)$. Далее рассмотрим другие подпространства пространства $2C$. Их будем называть *двусторонними*.

Теорема 4.1. *Любое двустороннее СЛПДГ является пересечением* $2C$ *с* $E0$ *или каким-нибудь из пространств серии* D.

Лемма 4.1. *Каждое двустороннее СЛПДГ содержит графы* $K_{2,r}O$ *и* $K_{l,2}O$.

Доказательство. Пусть G – биполный граф, у которого оба крыла имеют непустые доли в множестве A, причем вершины a_1 и a_2 принадлежат разным крыльям. Пусть G' – граф, полученный из G транспозицией этих вершин. Тогда $G \oplus G' = K_{2,r}O$. Аналогично получается $K_{l,2}O$.

Доказательство завершено.

Обозначим через $K^+_{i,j}$ биполный граф, одним из крыльев которого является граф $K_{i,j}$.

Лемма 4.2. *Каждое двустороннее СЛПДГ содержит графы* $K^+_{2p,r-2q}$ *для всех* $p \leq l/2$, $q \leq r/2$.

Доказательство. Пусть G_i – граф, полученный из $K_{2,r}O$ переименованием вершин в соответствии с транспозициями (a_1, a_{2i-1}), (a_2, a_{2i}), а H_i получается из $K_{l,2}O$ в соответствии с транспозициями (b_1, b_{2i-1}), (b_2, b_{2i}). Тогда $G_1 \oplus \ldots G_p \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_q = K^+_{2p,r-2q}$.

Доказательство завершено.

Докажем теорему 4.1

Доказательство. Рассмотрим три случая в зависимости от четности чисел l и r. Пусть X – двустороннее СЛПДГ.

1. l и r четны. Из леммы 4.2 следует, что X содержит все биполные графы, у которых степени всех вершин четны. Если в X нет графов с нечетными степенями, то $X = 2C \cap D(0, 0)$. Заметим, что X не может содержать графов, у которых в одной доле есть вершины со степенями разной четности. Поэтому, придерживаясь плана, примененного в доказательстве теоремы 3.1, достаточно рассмотреть только пункт 1 этого плана. Все рассуждения, проведенные при доказательстве этого

пункта в теореме 3.1, почти буквально переносятся на рассматриваемый случай и мы их опускаем. Результатом являются множества: $2C \cap D(0, eq)$, $2C \cap D(eq, 0)$, $2C \cap D(eq)$, $2C \cap D(eq, eq)$, причем последнее совпадает с $2C$.

2. l четно, r нечетно. В этом случае в графах из X все вершины доли B имеют одинаковую четность. Значит, $X \subseteq 2C \cap (D(*, 0) \cup D(*, 1))$. Из леммы 4.2 следует, что $2C \cap D(*, 0) \subseteq X$. Если $X \cap D(*, 1) \neq \varnothing$, то точно так же, как в доказательстве п. 1.1 теоремы 3.1, доказывается, что $2C \cap D(*, 1) \subseteq X$. Таким образом, в этом случае имеются два СЛПГ: $2C \cap D(*, 0)$ и $2C \cap D(*, eq)$.

3. l и r нечетны. В этом случае множество $2C$ есть объединение двух подмножеств: C_1 состоит из биполных графов, у которых в каждом крыле одна доля содержит четное число вершин, другая – нечетное, а C_2 – из тех, у которых в одном крыле обе доли имеют четную мощность, в другом нечетную. Заметим, что $C_1 = 2C \cap E0$. Положим $X_1 = X \cap C_1$, $X_2 = X \cap C_2$. Из леммы 4.2 следует, что $X_1 = C_1$. Нетрудно проверить, что сумма по модулю 2 любых двух графов из C_2 принадлежит C_1. Допустим, $X_2 \neq \varnothing$, $G \in X_2$, а H – любой граф из C_2. Тогда $G \oplus H = F \in C_1 \subseteq X$, отсюда $H = G \oplus F \in X$. Таким образом, в этом случае $X = 2C$.

Доказательство завершено.

Благодарности. Результаты данной работы были получены несколько лет назад совместно с В. Е. Алексеевым, ушедшим из жизни в 2020 г. Я выражаю огромную благодарность Владимиру Евгеньевичу за постановку задачи и научное руководство. Его постоянная поддержка была очень важна на протяжении всего процесса написания статьи.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М., 1990. 384 с.

2. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 383 с.

3. Алексеев В. Е., Захарова Д. В. О симметрических пространствах графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Т. 14, № 1. С. 21–26.

4. Захарова Д. В. Симметрические линейные пространства графов // Дискретная математика. 2011. Т. 23, № 2. С. 104–107. DOI: https://doi.org/10.1515/dma.2011.019

5. Алексеев В. Е., Таланов В. А. Графы. Модели вычислений. Алгоритмы. Н. Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2005. 308 с.

6. Алексеев В. Е., Таланов В. А. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. М.: ИНТУИТ, 2006. 319 с.

7. Алексеев В. Е., Захарова Д. В. Теория графов. Н. Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2018. 118 с.

8. Алексеев В. Е. Исследование количественных и сложностных характеристик наследственных классов графов : дис. на соиск. ... д-ра физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2002. 113 с.

Поступила 11.01.2024; доработана после рецензирования 29.01.2024; принята к публикации 27.02.2024

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov, R. I. Tyshkevich, *Lectures on graph theory*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russ), 384 p.

2. A. A. Zykov, *Basics of graph theory*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ), 383 p.

3. V. E. Alekseev, D. V. Zakharova, "Symmetric spaces of graphs", *Discrete analysis and operations research*, **14**:1 (2007), 24-26 (In Russ).

4. D. V. Zakharova, "Symmetric linear spaces of graphs", *Discrete Mathematics and Applications*, **23**:2 (2011), 104–107 (In Russ). DOI: https://doi.org/10.1515/dma.2011.019

5. V. T. Alekseev, V. A. Talanov, *Graphs. Computing models. Algorithms*, Nizhny Novgorod St. Univ. Publ., 2005 (In Russ).

6. V. E. Alekseev, V. A. Talanov, *Graphs and algorithms. Data structures. Computation models.*, M. INTUIT, 2006 (In Russ).

7. V. E. Alekseev, D. V. Zakharova, *Graph theory*, Nizhny Novgorod St. Univ. Publ., 2018 (In Russ).

8. V. E. Alekseev, *Investigation of quantitative and complexity characteristics of hereditary graph classes*, Doctoral dissertation (Phys.-Math), Nizhny Novgorod, 2002 (In Russ).

Submitted 11.01.2024; Revised 29.01.2024; Accepted 27.02.2024

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.