

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.342-360

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.64:539.3

## Исследование различных функций влияния в перидинамике

Ю. Н. Дерюгин<sup>1,2</sup>, М. В. Ветчинников<sup>1</sup>, Д. А. Шишканов<sup>1,2</sup><sup>1</sup> ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» (г. Саров, Российская Федерация)<sup>2</sup> ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», (г. Саранск, Российская Федерация)

**Аннотация.** Перидинамика – нелокальный численный метод для решения задач разрушения, основанный на интегральных уравнениях. Предполагается, что частицы в континууме, наделенные объемом, взаимодействуют друг с другом на конечном расстоянии, как в молекулярной динамике. Функция влияния в перидинамических моделях используется для ограничения силы, действующей на частицу, и корректировки прочности связи в зависимости от расстояния между частицами. Она удовлетворяет определенным условиям непрерывности и описывает поведение нелокального взаимодействия. В статье проводится исследование различных типов функции влияния в перидинамических моделях на примере трехмерных задач упругости и разрушения. В ходе проделанной работы были описаны модели разрушения на основе связи и на основе состояния, используемые в Сандийской лаборатории, представлены 6 типов функции влияния для модели на основе связи и 2 типа функции для модели на основе состояния, получены соответствующие формулы вычисления жесткости связи. Для тестирования использовались задача о распространении сферически-симметричной упругой волны, имеющая аналитическое решение, и качественная задача разрушения хрупкого диска под действием сферического ударника. Приведены графики радиального смещения, показаны растровые изображения результатов моделирования.

**Ключевые слова:** перидинамика, молекулярная динамика, функция влияния, функция жесткости связи, нелокальное взаимодействие, горизонт взаимодействия, связь

**Для цитирования:** Дерюгин Ю. Н., Ветчинников М. В., Шишканов Д. А. Исследование различных функций влияния в перидинамике // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 342–360. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>

*Об авторах:*

**Дерюгин Юрий Николаевич**, главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Ветчинников Максим Владимирович**, начальник научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738>, [vetchinnikov\\_max@mail.ru](mailto:vetchinnikov_max@mail.ru)

© Ю. Н. Дерюгин, М. В. Ветчинников, Д. А. Шишканов



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

**Шишканов Дмитрий Алексеевич**, математик научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

*Original article*

MSC2020 74B05, 74R10

## Investigation of different influence functions in peridynamics

Yu. N. Deryugin<sup>1,2</sup>, M. V. Vetchinnikov<sup>1</sup>, D. A. Shishkanov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> FSUE RFNC – VNIIEF (Sarov, Russian Federation)

<sup>2</sup> National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

**Abstract.** Peridynamics is a non-local numerical method for solving fracture problems based on integral equations. It is assumed that particles in a continuum are endowed with volume and interact with each other at a finite distance, as in molecular dynamics. The influence function in peridynamic models is used to limit the force acting on a particle and to adjust the bond strength depending on the distance between the particles. It satisfies certain continuity conditions and describes the behavior of non-local interaction. The article investigates various types of influence function in peridynamic models on the example of three-dimensional problems of elasticity and fracture. In the course of the work done, the bond-based and state-based fracture models used in the Sandia Laboratory are described, 6 types of influence functions for the bond-based model and 2 types of functions for the state-based model are presented, and the corresponding formulas for calculating the stiffness of the bond are obtained. For testing, we used the problem of propagation of a spherically symmetric elastic wave, which has an analytical solution, and a qualitative problem of destruction of a brittle disk under the action of a spherical impactor. Graphs of radial displacement are given, raster images of simulation results are shown.

**Keywords:** peridynamics, molecular dynamics, influence function, bond stiffness function, nonlocal interactions, interaction horizon, bond

**For citation:** Yu. N. Deryugin, M. V. Vetchinnikov, D. A. Shishkanov. Investigation of different influence functions in peridynamics. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 342–360. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>

*About the authors:*

**Yuriy N. Deryugin**, Chief Researcher, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Maxim V. Vetchinnikov**, Head of research laboratory, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738> [vetchinnikov\\_max@mail.ru](mailto:vetchinnikov_max@mail.ru)

**Dmitry A. Shishkanov**, research laboratory mathematician, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), postgraduate, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

## 1. Введение

Перидинамика – нелокальная теория твердого тела, в которой используются интегральные уравнения движения [1],[2]. Предполагается, что частицы в континууме, наделенные объемом, взаимодействуют друг с другом в пределах замкнутого горизонта, подобно молекулярной динамике.

Статья является продолжением исследования, проведенного в [3], где тестирование перидинамических моделей разрушения на основе связи и на основе состояния проводилось на примере одномерных задач упругости и задач разрушения. Результаты в [3] показали, что необходимо дополнительное исследование способов задания функции влияния.

Цель исследования, проведенного в рамках данной работы, заключалась в тестировании реализованных ранее [3] моделей перидинамики, используя новые типы функции влияния. Задачами исследования являлись изучение перидинамических моделей разрушения на основе связи - PMB (Prototype Microelastic Brittle), и на основе состояния – LPS (Linear Peridynamic Solid), вывод формул для задания функций жесткости связи PMB модели, тестирование метода на примере трехмерных задач упругости [4] и разрушения.

Реализация [3] моделей Сандийской лаборатории [5] проводилась в рамках комплекса программ молекулярной динамики MoDyS (Molecular Dynamic Simulation) [6]. Внедрение метода перидинамики в MoDyS позволит в дальнейшем осуществить идею гибридного моделирования [7], которая даст возможность более точно описать возникновение и эволюцию разрушений.

## 2. Метод перидинамики

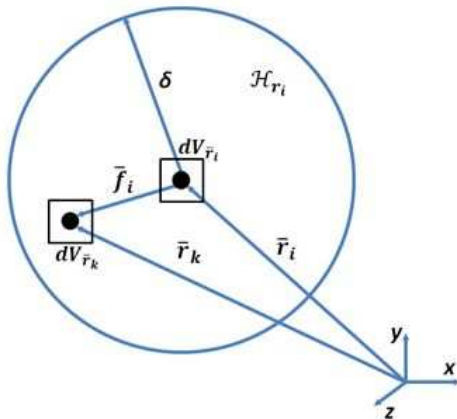
Перидинамическая теория, введена Силингом [8] для решения задач механики твердого тела. Твердое тело представляется набором дискретных частиц с номером  $i$ , каждая из которых обладает массой –  $m_i$ , плотностью –  $\rho_i$ , начальными координатами –  $\vec{r}_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$ . Дискретный вектор смещений  $\vec{u}_i(u_i^x, u_i^y, u_i^z)$  описывает движение деформируемой среды. Взаимодействие между частицами происходит внутри замкнутого горизонта –  $\delta$  и задается на конечном расстоянии в виде связи (рис. 2.1).

В перидинамике используются интегральные уравнения, которые позволяют избежать пространственных производных, не существующих на поверхностях разрыва в задачах разрушения.

Основные аппроксимационные соотношения метода задаются векторами относительного положения частиц  $\vec{\xi}_i = \vec{r}_k - \vec{r}_i$  и относительного смещения  $\vec{\eta}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$ , удовлетворяющих условию  $|\vec{\xi}_i| < \delta$ .

Уравнение движения задается в виде:

$$\rho_i \ddot{\vec{u}}(\vec{r}_i, t) = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k - \vec{u}_i, \vec{r}_k - \vec{r}_i) dV_{\vec{r}_k} + \vec{b}(\vec{r}_i, t), \quad (2.1)$$



**Рис. 2.1.** Взаимодействие частиц в пределах замкнутого горизонта:  $\delta$  — горизонт взаимодействия;  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$  — координаты частиц  $i$  и  $k$ ;  $\mathcal{H}_{r_i}$  — множество соседей частицы  $i$ ;  $dV_{r_i}$ ,  $dV_{r_k}$  — объемы частиц  $i$  и  $k$ ;  $\vec{f}_i$  — сила, определяющая взаимодействие частиц  $i$  и  $k$ .

**Fig 2.1.** Particles interaction within closed horizon:  $\delta$  — interaction horizon;  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$  — coordinate of particles  $i$  and  $k$ ;  $\mathcal{H}_{r_i}$  — neighbors ensemble of particle  $i$ ;  $dV_{r_i}$ ,  $dV_{r_k}$  — volumes of particles  $i$  and  $k$ ;  $\vec{f}_i$  — interaction force of particles  $i$  and  $k$ .

где  $\vec{b}$  — граничные условия.

Плотность энергии деформирования:

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}_{r_i}} \vec{w}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) dV_{r_k}, \tag{2.2}$$

где  $\vec{w} = \vec{w}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i)$  — энергия связи между частицами.

Дифференцирование энергии связи в общем виде определяет силу межчастичного взаимодействия:

$$\vec{f}_i(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{\eta}_i}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|} \quad \forall \vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i. \tag{2.3}$$

Формула 2.3 и уравнение движения 2.1 образуют замкнутую систему уравнений перидинамики. Подробнее теория перидинамики описана в [1], [2], [9].

### 3. РМВ модель

Сила задается в следующем виде:

$$\vec{f}_i(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) = c^{mod} s \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|}, \quad s < s_0, \tag{3.1}$$

где  $c^{mod}$  — жесткость связи,  $s_0$  — критерий разрыва связи,  $s$  — деформация связи:

$$s = \frac{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i| - |\vec{\xi}_i|}{|\vec{\xi}_i|}, \quad (3.2)$$

и  $\mu$  — скалярная функция, которая принимает значения 1 или 0, определяется формулой

$$\mu \left( r_i, t, \vec{\xi}_i \right) = \begin{cases} 1, & s \left( t', \vec{\xi}_i \right) < s_0, \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \\ 0, & s \left( t', \vec{\xi}_i \right) \geq s_0, \quad \forall 0 \leq t' \leq t. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для данной модели характерной особенностью является использование коэффициента Пуассона  $\nu = \frac{1}{4}$ . Упругая константа  $c^{mod}$  задает жесткость связи [9].

#### 4. Жесткость связи и функция влияния

В общем случае, жесткость связи — это функция, зависящая от длины связи и горизонта взаимодействия, удовлетворяющая условиям непрерывности [10]

$$c^{mod} \left( \vec{\xi}_i, \delta \right) = c\omega \left( \vec{\xi}_i, \delta \right), \quad (4.1)$$

где  $\omega \left( \vec{\xi}_i, \delta \right)$  — функция влияния, задающая взаимодействие частиц в связи,  $c$  — постоянное значение функции.

В [3] рассматривались наиболее часто встречающиеся типы функций жесткости связи для одномерного случая. Рассмотрим теперь различные типы функции влияния из [11] (см. таблицу 4.1) и получим для них функции жесткости связи, характерные трехмерной постановке задач.

**Таблица 4.1.** Типы функции влияния  $\omega \left( \left| \vec{\xi}_i \right| \right)$  из [11]

Тип функции	$\omega \left( \left  \vec{\xi}_i \right  \right)$
Постоянная	1
Треугольная	$1 - \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}$
Квадратичная	$\left( 1 - \left( \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta} \right)^2 \right)^2$
Полуэллиптическая	$1 - \left( \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta} \right)^2$
Экспоненциальная	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}}$
Гауссова	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i ^2}{\delta^2}}$

Для однородных деформаций в трехмерных задачах значение жесткости связи выводится в [9]. Полагая, что  $s = \frac{|\vec{\eta}_i|}{|\vec{\xi}_i|} = \frac{\eta}{\xi}$  и используя 3.1 и 2.3, получаем  $w = \frac{c^{mod}\eta^2}{2\xi} = \frac{c^{mod}s^2\xi}{2}$ . Тогда, учитывая определение 4.1, плотность энергии деформации 2.2 переписывается в виде

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left( \frac{c\omega s^2 \xi}{2} \right) 4\pi \xi^2 d\xi. \quad (4.2)$$

Запишем общий вид плотности энергии деформации в классической теории:

$$W_i^{CCM} = \frac{1}{2} \{ \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + 2G (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \}, \quad (4.3)$$

где  $\lambda$  — первый коэффициент Ламе,  $G$  — модуль сдвига.

Для изотропного упругого случая  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = s$ , тогда 4.3 переписывается в виде

$$W_i^{CCM} = \frac{1}{2} \{ \lambda (3s)^2 + 2G (3s^2) \} = \frac{3}{2} (3\lambda + 2G) s^2. \quad (4.4)$$

Учитывая, что  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  и  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , получаем

$$W_i^{CCM} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2. \quad (4.5)$$

Константа функции жесткости связи  $c$  для функций влияния из таблицы 4.1 получается из сравнения  $W_i^{CCM} = W_i^{PD}$  следующим образом:

1) если  $\omega$  — постоянная, то

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left( \frac{cs^2\xi}{2} \right) 4\pi\xi^2 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{4}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{4} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{6E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.7)$$

2) если  $\omega$  — треугольная, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta \left( 1 - \frac{\xi}{\delta} \right) \xi^3 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{20}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{20} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{30E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.9)$$

3) если  $\omega$  — квадратичная, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta \left( 1 - 2 \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^2 + \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^4 \right) \xi^3 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{24}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{24} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{36E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.11)$$

4) если  $\omega$  — полуэллиптическая, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta \left( 1 - \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^2 \right) \xi^3 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{12}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{12} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{18E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.13)$$

5) если  $\omega$  — экспоненциальная, то

$$W_i^{PD} = \pi c s^2 \int_0^\delta e^{-\frac{\xi}{\delta}} \xi^3 d\xi = 2\pi c s^2 \delta^4 \left(3 - \frac{8}{e}\right), \quad (4.14)$$

$$2\pi c s^2 \delta^4 \left(3 - \frac{8}{e}\right) = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{3eE}{4(1-2\nu)\pi\delta^4 3e-8}, \quad (4.15)$$

6) если  $\omega$  — гауссова, то

$$W_i^{PD} = \pi c s^2 \int_0^\delta e^{-\frac{\xi^2}{\delta^2}} \xi^3 d\xi = \pi c s^2 \delta^4 \frac{e-2}{2e}, \quad (4.16)$$

$$\pi c s^2 \delta^4 \frac{e-2}{2e} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{3eE}{(1-2\nu)\pi\delta^4 e-2}. \quad (4.17)$$

Тогда функции жесткости связи с учетом вычисленных констант с 4.6 – 4.17 получаются в соответствии с 4.1 (см. таблицу 4.2).

**Таблица 4.2.** Типы функции жесткости связи для трехмерного случая

Тип функции	$\omega\left(\left \vec{\xi}_i\right \right)$	c	$c^{mod}\left(\left \vec{\xi}_i\right , \delta\right)$
Постоянная	1	$\frac{6E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{6E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$
Треугольная	$1 - \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}$	$\frac{30E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{30E}{(1-2\nu)\pi\delta^4} \left(1 - \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)$
Квадратичная	$\left(1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2\right)^2$	$\frac{36E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{36E}{(1-2\nu)\pi\delta^4} \left(1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2\right)^2$
Полуэллиптическая	$1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2$	$\frac{18E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{18E}{(1-2\nu)\pi\delta^4} \left(1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2\right)$
Экспоненциальная	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}}$	$\frac{3eE}{4(1-2\nu)\pi\delta^4 3e-8}$	$\frac{3eE}{4(1-2\nu)\pi\delta^4 3e-8} \left(e^{-\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}}\right)$
Гауссова	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i ^2}{\delta^2}}$	$\frac{3eE}{(1-2\nu)\pi\delta^4 e-2}$	$\frac{3eE}{(1-2\nu)\pi\delta^4 e-2} \left(e^{-\frac{ \vec{\xi}_i ^2}{\delta^2}}\right)$

На рисунке 4.1 видно, что функция влияния в 4.1 уменьшает жесткость взаимодействия частиц при увеличении длины связи. Все типы функции жесткости связи, кроме постоянной, уменьшаются при  $|\vec{\xi}_i| \rightarrow \delta$ .

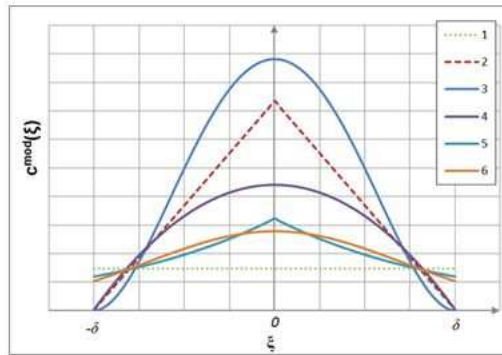
## 5. LPS модель

Данная модель является обобщением РМВ модели [13] и применяется для материалов с любым коэффициентом Пуассона [12].

Сила межчастичного взаимодействия  $\vec{f}_i$  определяется следующими образом:

$$\vec{f}_i = \frac{2dK\theta}{m_i} \omega|\vec{\xi}_i| + 2\alpha\omega\varepsilon, \quad s < s_0, \quad (5.1)$$

где  $K$  — модуль объёмного сжатия,  $\theta$  — относительное смещение,  $\varepsilon$  — девиатор тензора деформации,  $\alpha$  — константа,  $\omega$  — функция влияния,  $d$  — размерность пространства,



**Рис. 4.1.** Типы функции влияния из таблицы 4.1: 1 — постоянная; 2 — треугольная; 3 — квадратичная; 4 — полуэллиптическая; 5 — гауссова; 6 — экспоненциальная.

**Fig 4.1.** Influence function types in the table 4.1: 1 — constant; 2 — triangle; 3 — quadratic; 4 — semi-elliptical; 5 — Gaussian; 6 — exponential.

$s$  — деформация связи 3.2,  $m_i$  — массовый объем частицы, который определяется следующей формулой:

$$m_i = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega |\vec{\xi}_i|^2 dV_{\vec{r}_k}. \tag{5.2}$$

Растяжение связи  $e$  представляется в виде суммы шаровой и девиаторной части:

$$e = e^i + \varepsilon, e^i = \frac{\theta |\vec{\xi}_i|}{3}, \tag{5.3}$$

$$\theta [\vec{r}_i, t] = \frac{d}{m_i} \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega |\vec{\xi}_i| e [\vec{r}_i, t] dV_{\vec{r}_k}. \tag{5.4}$$

Константа  $\alpha$  для трехмерных задач 5.6 получается из сравнения плотности энергии перидинамики 5.5 с энергией классической теории [14].

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{1}{2} \alpha \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega \varepsilon^2 dV_{\vec{r}_k}, \tag{5.5}$$

$$\alpha = \frac{15G}{m}. \tag{5.6}$$

В [3] было показано, что при использовании сферической функции влияния  $\omega = \frac{1}{|\xi_i|}$  и коэффициента Пуассона  $\nu = \frac{1}{4}$  LPS модель полностью совпадает с РМВ.

## 6. Силы межчастичного взаимодействия с малым радиусом действия

При построении дискретной модели интегральные уравнения перидинамики 2.1 записываются в виде конечных сумм



$$\rho_i \ddot{u}_i^n = \sum_{k \in H_i} \vec{f}_i \left( \vec{u}_k^n - \vec{u}_i^n, \vec{r}_k^0 - \vec{r}_i^0 \right) \Delta V_k + \vec{b}_i^n. \quad (6.1)$$

В рассмотренных выше моделях частицы перестают взаимодействовать после разрыва связи. Чтобы избежать перекрытия частиц после потери связи [5], [7], вводится отталкивающая сила межчастичного взаимодействия:

$$\vec{f}_s \left( \vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i \right) = \min \left\{ 0, \frac{c_s}{\delta} \left( |\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i| - d_{ki} \right) \right\} \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|}, \quad (6.2)$$

где  $d_{ki}$  — расстояние между частицами  $k$  и  $i$  после разрыва связи,  $c_s$  — константа в виде

$$c_s = 15c^{mod}. \quad (6.3)$$

В случае, когда частицы подвергаются внешнему давлению, расстояние между ними после разрыва связи можно определить в виде

$$d_{ki} = \min \{ 0.9|\vec{\xi}_i|, 1.35\Delta x \}. \quad (6.4)$$

Тогда, сила межчастичного взаимодействия в 6.1 будет выглядеть как

$$\vec{f}_i = \begin{cases} \vec{T}_i, & s \left( t', \vec{\xi}_i \right) < s_0 \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \\ \vec{f}_s, & s \left( t', \vec{\xi}_i \right) \geq s_0 \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \end{cases} \quad (6.5)$$

где  $\vec{T}_i$  — сила взаимодействия частиц до разрыва.

## 7. Корректировка объемов частиц в дискретной области

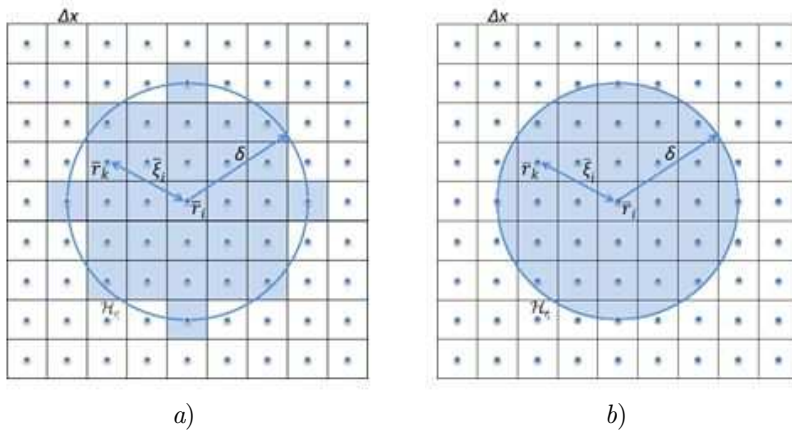
Пусть  $\delta = 3\Delta x$ , тогда в дискретном уравнении движения частицы  $\vec{r}_i^t$  6.1 суммирование идет по частицам, представленным на рисунке 7.1 а). Учитывая, что в классической теории область интегрирования сплошная (см. рисунок 7.1 б)), то объемы частиц на границе области  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  в перидинамике будут влиять на точность результатов численного интегрирования.

В литературе по перидинамике [2], [9] представлен способ улучшения аппроксимации, который основан на корректировке объемов частиц, расположенных на границе области соседей  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ . Для этого вводится линейная масштабирующая функция объема частицы:

$$\Delta V_k = k(\vec{\xi}_i) \Delta x^3, \quad (7.1)$$

где  $k(\vec{\xi}_i)$  — масштабирующая функция:

$$k(\vec{\xi}_i) = \begin{cases} \frac{\delta + \frac{\Delta x}{2} - |\vec{\xi}_i|}{\Delta x}, & \delta - \frac{\Delta x}{2} \leq |\vec{\xi}_i| \leq \delta, \\ 1, & |\vec{\xi}_i| \leq \delta - \frac{\Delta x}{2}, \\ 0, & |\vec{\xi}_i| > \delta. \end{cases} \quad (7.2)$$



**Рис. 7.1.** Объемы частиц в пределах области интегрирования частицы  $i$ : а) — в перидинамике, б) — в классической теории.

**Fig 7.1.** Particles volumes within the integration domain of particle  $i$ : а) — in peridynamics, б) — in classical theory.

### 8. Тестовые расчеты

В [3] показана сходимость метода перидинамики на примере одномерной задачи упругости при уменьшении  $\delta$ . Однако, для задач механики сплошной среды можно выбрать любое достаточно малое значение  $\delta$ , так как с помощью жесткости связи корректируется поведение нелокального взаимодействия частиц и результаты моделирования можно согласовывать с экспериментальными данными для любого значения  $\delta$  [8]. Таким образом, результаты расчетов также будут зависеть от способа задания жесткости связи и выбора функции влияния.

В расчетах мы ограничились использованием функций влияния из таблицы 4.1 и, соответственно, заданием функций жесткости связи из таблицы 4.2. Значение для  $\delta$  выбрано с учетом [9].

Для тестирования нелокального метода использовались упругая задача, имеющая аналитическое решение и качественная задача на разрушение хрупкого материала.

### 9. Сферически-симметричная расходящаяся упругая волна

Рассматривается распространение расходящейся упругой волны. Постановка задачи и точное решение взяты из [4].

Геометрия задачи:  $r_0 \leq |x| \leq r_1$ ,  $r_0 \leq |y| \leq r_1$ ,  $r_0 \leq |z| \leq r_1$ ,  $r_0 = 1$  см,  $r_1 = 40$  см.

Граничные условия ставятся на гранях внутреннего куба ( $|x| = r_0$ ,  $|y| = r_0$ ,  $|z| = r_0$ ):  $w_x(x, y, z, t) = \frac{x}{r} w_r(r, t)$ ,  $w_y(x, y, z, t) = \frac{y}{r} w_r(r, t)$ ,  $w_z(x, y, z, t) = \frac{z}{r} w_r(r, t)$

Параметры источника: период колебаний  $T = 10^{-5}$  с, амплитуда колебаний  $w_0 = 0.01$  см.

Свойства материала для расчета по РМВ модели: коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ , плотность  $\rho_0 = 7.85$  г/см<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 200$  ГПа.

Свойства материала для расчета по LPS модели: коэффициент Пуассона  $\nu = 0.33$ , плотность  $\rho_0 = 7.85 \text{ г/см}^3$ , модуль Юнга  $E = 200 \text{ ГПа}$ .

Конец счета при  $t = 7 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ .

Расчеты проведены в декартовой системе координат, поэтому рассчитанные параметры для сравнения с аналитикой были переведены в сферическую систему координат. Радиальные компоненты скорости и смещения вычислены по формулам:

$$u_r(r, t) = \frac{u_x(x, y, z, t)x + u_y(x, y, z, t)y + u_z(x, y, z, t)z}{r}, \tag{9.1}$$

$$w_r(r, t) = \frac{w_x(x, y, z, t)x + w_y(x, y, z, t)y + w_z(x, y, z, t)z}{r}. \tag{9.2}$$

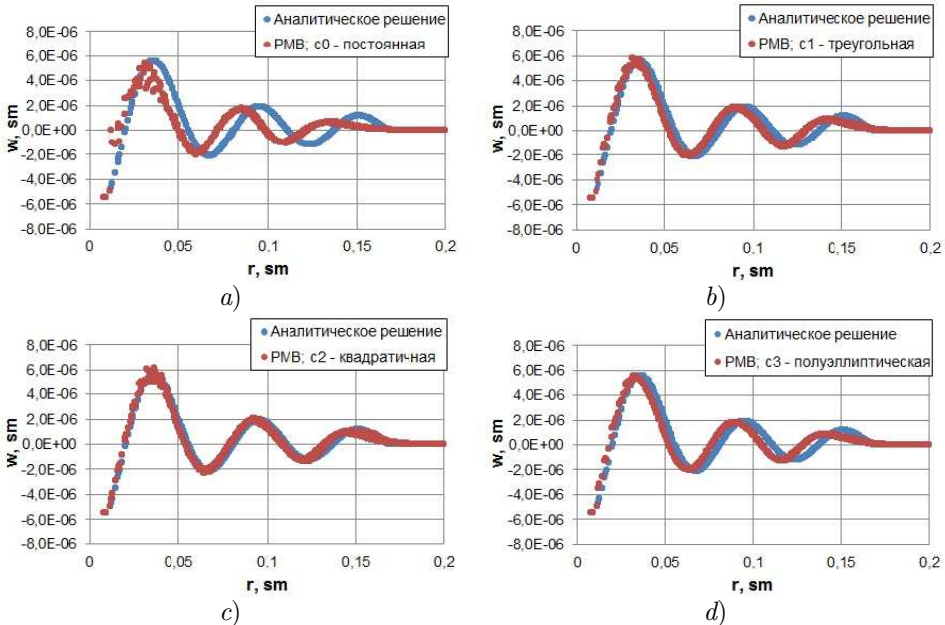
Использовались число частиц  $N = 531414$  и горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015\Delta x$ .

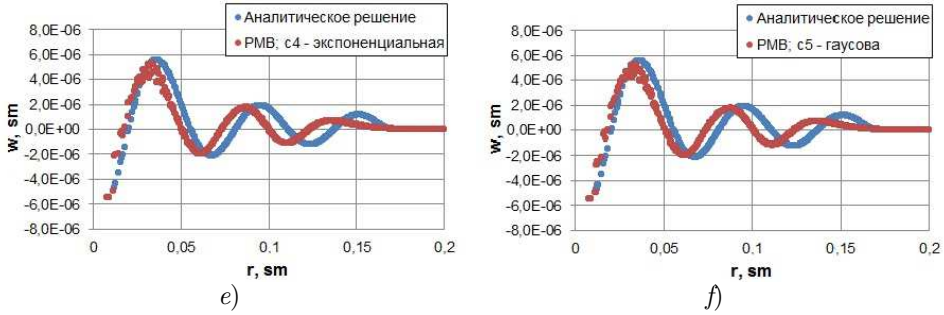
Растровые картины в нелинейной шкале (шпирен-визуализация) изображены на рисунках 9.3, 9.5. Оттенки цветов в шпирен-визуализации соответствуют величине:

$$S = 0.8|\vec{u}|e\left(-5\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|_{max}}\right), \tag{9.3}$$

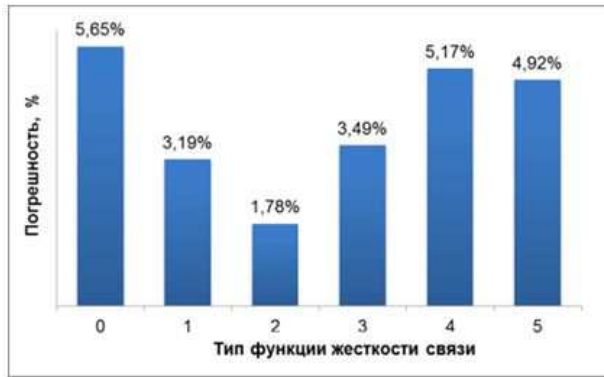
где  $\vec{u}$  — вектор скорости.

Первая серия расчетов проведена с использованием bond-based метода перидинамики. Результаты представлены на рисунках 9.1 – 9.2. Наилучшая сходимость к аналитике наблюдается при использовании квадратичной функции жесткости связи. Погрешность вычислений представлена на рисунке 9.2. По растровым картинам модуля скорости в шпирен-визуализации (см. рисунок 9.3) видно, что сохраняется сферическая симметрия на протяжении всей задачи.



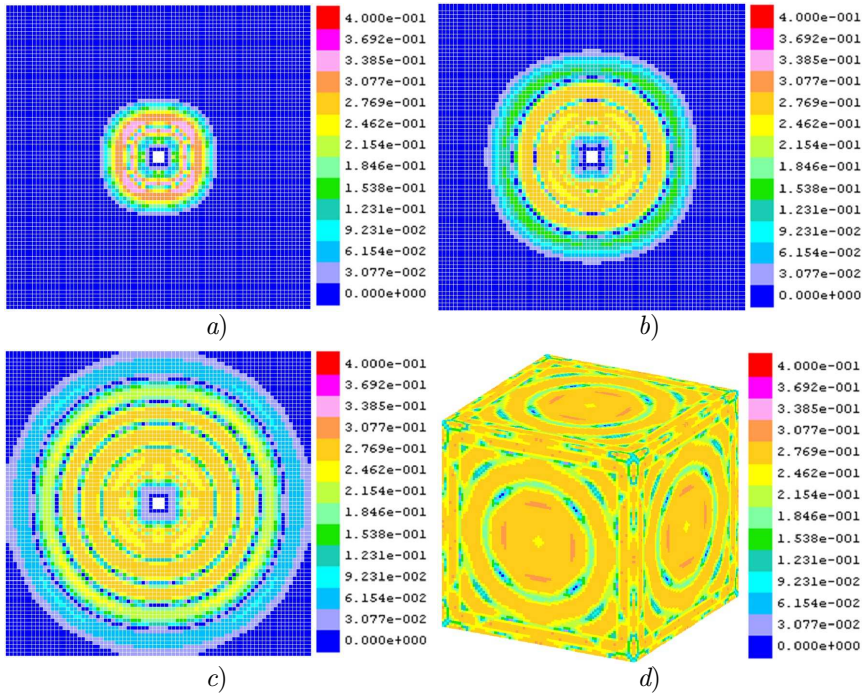


**Рис. 9.1.** Профили смещения в сечении  $Oxy$  на момент времени  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  для различных типов функции жесткости связи.  
**Fig 9.1.** The profile of displacement in cutset  $Oxy$  at time  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  for different bond stiffness function types.



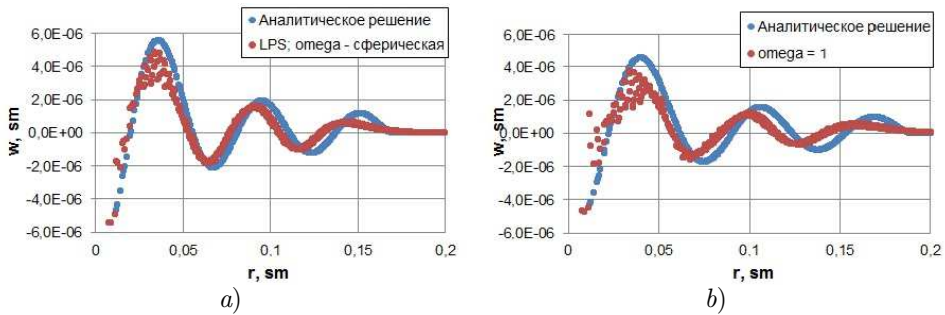
**Рис. 9.2.** Относительная погрешность вычислений на момент времени  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  для функций жесткости связи: 0 — постоянная; 1 — треугольная; 2 — квадратичная; 3 — полуэллиптическая; 4 — экспоненциальная; 5 — гауссова.  
**Fig 9.2.** The relative error of calculations at time  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  for bond stiffness functions: 0 — constant; 1 — triangle; 2 — quadratic; 3 — semi-elliptical; 4 — exponential; 5 — Gaussian.

Вторая серия расчетов проведена state-based методом перидинамики. Результаты, представленные на рисунке 9.4, показывают наилучшую сходимость при использовании сферической функции влияния. Относительная погрешность вычислений на момент времени  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  при использовании сферической функции влияния  $\omega = \frac{1}{|\xi_i|}$  равна 3.36%, а при использовании постоянной функции влияния 4.05%. Сферическая симметрия сохраняется (см. рисунок 9.5).



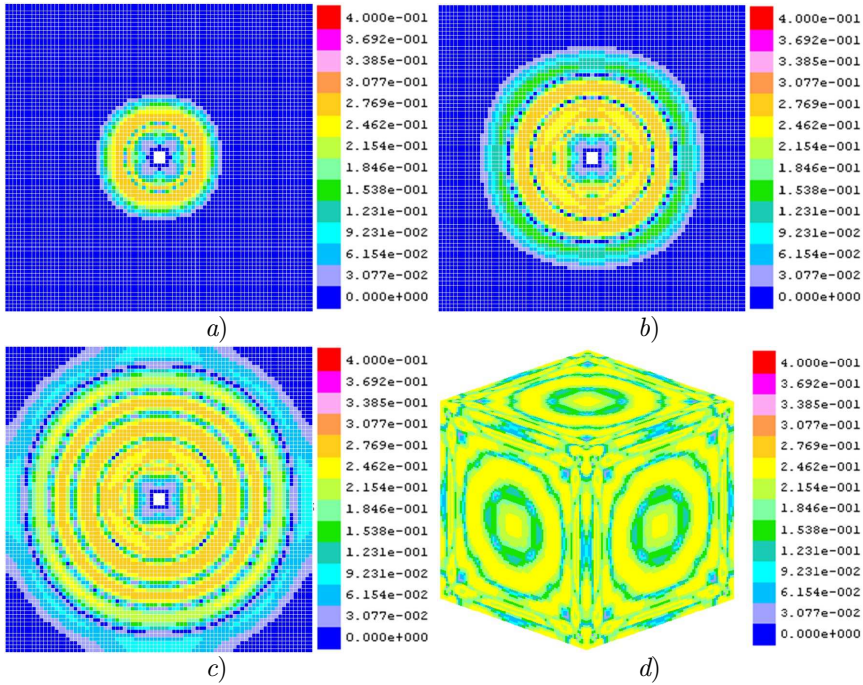
**Рис. 9.3.** Растровые картины модуля скорости в шпирен-визуализации на времена: а)  $t = 1 \cdot 10^{-5}$ , б)  $t = 2 \cdot 10^{-5}$ , в)  $t = 3 \cdot 10^{-5}$ , д)  $t = 7 \cdot 10^{-5}$ . Расчет проводился РМВ моделью перидинамики с использованием квадратичной функции жесткости связи

**Fig 9.3.** Raster pictures of velocity module in the schlieren-visualization at times: а)  $t = 1 \cdot 10^{-5}$ , б)  $t = 2 \cdot 10^{-5}$ , в)  $t = 3 \cdot 10^{-5}$ , д)  $t = 7 \cdot 10^{-5}$ . The computation was performed by the PMB model of peridynamics using the quadratic bond stiffness function



**Рис. 9.4.** Профили смещения в сечении  $Oxy$  на момент времени  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  для двух типов функции влияния

**Fig 9.4.** The profile of displacement in cutset  $Oxy$  at time  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  for two influence function types



**Рис. 9.5.** Растровые картины модуля скорости в шпирен-визуализации на времена: *a)*  $t = 1 \cdot 10^{-5}$ , *b)*  $t = 2 \cdot 10^{-5}$ , *c)*  $t = 3 \cdot 10^{-5}$ , *d)*  $t = 7 \cdot 10^{-5}$ . Расчет проводился LPS моделью перидинамики со сферической функцией влияния  
**Fig 9.5.** Raster pictures of velocity module in the schlieren-visualization at times: *a)*  $t = 1 \cdot 10^{-5}$ , *b)*  $t = 2 \cdot 10^{-5}$ , *c)*  $t = 3 \cdot 10^{-5}$ , *d)*  $t = 7 \cdot 10^{-5}$ . The computation was performed by the LPS model of peridynamics using the spherical influence function

## 10. Разрушение хрупкого диска под действием сферического ударника

Рассматривается поведение хрупкого материала при ударной нагрузке. Постановка задачи взята из [7].

Параметры ударника: диаметр  $d = 0.01$  м, скорость  $v = 100$  м/с.

Параметры материала: диаметр  $D = 0.074$  м, толщина  $H = 0.0025$  м, плотность  $\rho_0 = 2.2$  г/см<sup>3</sup>, модуль объемного сжатия  $K = 14.9$  ГПа, модуль сдвига  $G = 78.07692$  ГПа.

Внешняя сила, действующая на частицы со стороны ударника:

$$f_{out} = \begin{cases} -k_s(r - R)^2, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (10.1)$$

где  $r$  — расстояние от частицы до центра ударника,  $R$  — радиус ударника,  $k_s = 10^{17}$  — константа силы.

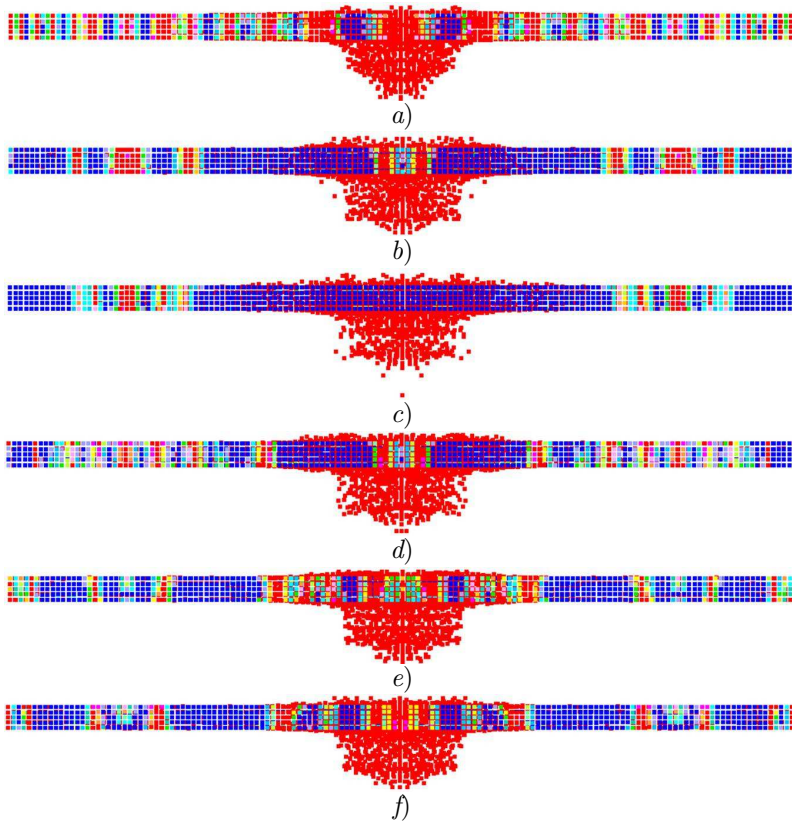
Расчеты проводились bond-based методом перидинамики с числом частиц  $N = 85925$  и горизонтом взаимодействия  $\delta = 3.015\Delta x$ . Конец счета при  $t = 3 \cdot 10^{-5}$  с. Предельное значение деформации связи  $s_0 = 0.0005$ .

Локальное повреждение  $\phi_i$  определяется формулой

$$\phi_i(\vec{r}_i, t) = 1 - \frac{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}}{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} dV_{\vec{r}_k}} \quad (10.2)$$

и принимает значения в диапазоне  $0 \leq \phi_i \leq 1$ , где 0 означает, что материал целый, а 1 означает завершённый разрыв связей частицы со всеми частицами, с которыми она изначально взаимодействовала.

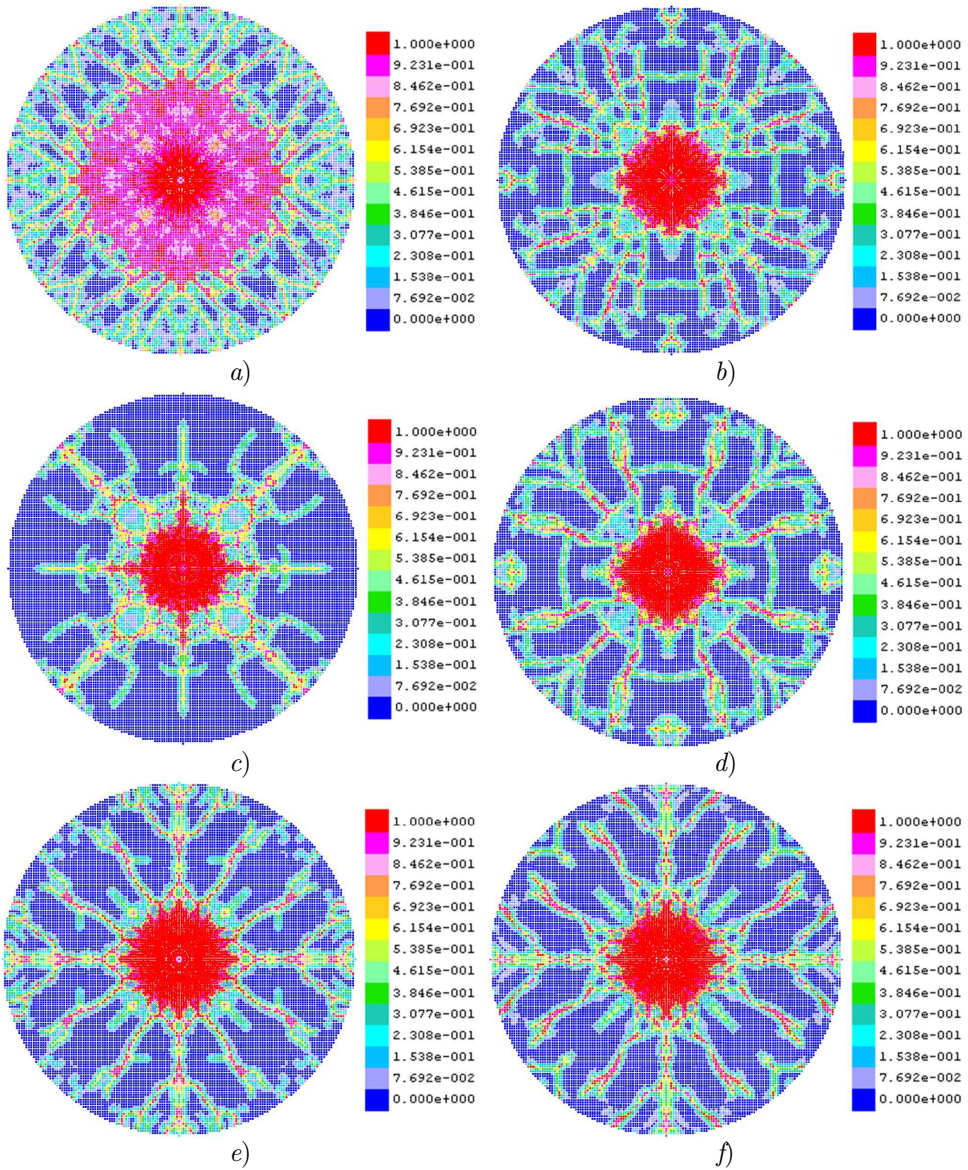
На рисунке 10.1 приведено облако обломков при высокоскоростном ударе по тонкой мишени.



**Рис. 10.1.** Растровые картины облака обломков в задаче разрушения на конечный момент времени для различных типов функции жесткости связи: *a)* постоянная, *b)* треугольная, *c)* квадратичная, *d)* полуэллиптическая, *e)* экспоненциальная, *f)* гауссова

**Fig 10.1.** Raster pictures of fragments cloud in the damage problem at a finite time for the different types of bond stiffness function: *a)* constant; *b)* triangle; *c)* quadratic; *d)* semi-elliptical; *e)* exponential; *f)* Gaussian

На рисунке 10.2 представлена картина разрушения всей цели.



**Рис. 10.2.** Растровые картины верхнего слоя в задаче разрушения на конечный момент времени для различных типов функции жесткости связи: a) постоянная, b) треугольная, c) квадратичная, d) полуэллиптическая, e) экспоненциальная, f) гауссова

**Fig 10.2.** Raster pictures of upper layer in the damage problem at a finite time for the different types of bond stiffness function: a) constant; b) triangle; c) quadratic; d) semi-elliptical; e) exponential; f) Gaussian



Тип функции жесткости связи оказывает заметное влияние на поведение трещин. В данной задаче не рассматривается количественное сравнение с экспериментом, а демонстрируется способность метода моделировать сложные закономерности роста трещин и их взаимодействия.

## 11. Заключение

В данной работе проведено исследование различных типов функции влияния, которая используется в перидинамических моделях для корректировки поведения нелокального взаимодействия частиц. Было исследовано восемь функций влияния для моделей на основе связи и на основе состояния на примере трехмерных задач. В расчетах задачи упругости наблюдается качественное совпадение результатов моделирования с аналитическим решением для реализованных моделей на всем временном интервале, при этом наилучшее приближение к аналитическому решению происходит при счете моделью на основе связи с использованием квадратичной функции жесткости связи. В задаче хрупкого разрушения картина повреждений сильно зависит от выбора типа функции влияния.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bobaru F., Geubelle P. H., Foster J. T., Silling S. A. Handbook of peridynamic modeling. NY: Taylor & Francis, 2016. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>
2. Madenci E., Oterkus E. Peridynamic theory and its applications. NY: Springer, 2014. 297 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>
3. Шишканов Д. А., Ветчинников М. В., Дерюгин Ю. Н. Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел // Журнал Средневожского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
4. Софронов В. Н., Ветчинников М. В., Дёмина М. А. Использование методов гамильтоновой динамики в численных расчетах задач механики сплошной среды // Журнал ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2020. № 4. 17 с.
5. Parks M. L., Seleson P., Plimpton S. J., Lehoucq R. B., Silling S. A. Peridynamics with LAMMPS: A user guide v0.2 Beta. New Mexico, 2008. 28 p.
6. Анисимов А. Н., Грушин С. А., Воронин Б. Л., Копкин С. В., Ерофеев А. М., Демин Д. А., Демина М. А., Здорова М. В., Ветчинников М. В., Еричева Н. С., Коваленко Н. О., Крючков И. А., Кечин А. Г., Дегтярев В. А., Урм В. Я. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010614974. Комплекс программ молекулярно-динамического моделирования (MoDyS). 2010.
7. Parks M. L., Lehoucq R. B., Plimpton S. J., Silling S. A. Implementing peridynamics within a molecular dynamics code // Computer Physics Communications. 2008. Vol. 179. P. 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>

8. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. 2000. Vol. 48, No 1. P. 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
9. Silling S. A., Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // *Computers and Structures*. 2005. Vol. 83, No. 17. P. 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
10. Silling S. A., Zimmermann M., Abeyaratne R. Deformation of a peridynamic bar // *Journal of Elasticity*. 2003. Vol. 73. P.173–190.
11. Chen Z., Ju J. W., Su G., Huang X., Li S., Zhai L. Influence of micro-modulus functions on peridynamics simulation of crack propagation and branching in brittle materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 216. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106498>
12. Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E. Peridynamic states and constitutive modeling // *Journal of Elasticity*. 2007. Vol. 88. P. 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
13. Mitchell J. A., Silling S. A., Littlewood D. J. A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. Vol. 10, no. 5. P. 539–557. DOI: <https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
14. Mitchell J. A. On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’, studies of presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure // Sandia National Laboratories. 2013.
15. Silling S. A., Lehoucq R. B. Convergence of peridynamics to classical elasticity theory // *Journal of Elasticity*. 2008. Vol. 93. P. 13–37.

*Поступила 29.08.2023; доработана после рецензирования 02.10.2023;  
принята к публикации 24.11.2023*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. F. Bobaru, P.H. Geubelle, J.T. Foster, S. A. Silling, *Handbook of peridynamic modeling*, Taylor & Francis, NY, 2016 DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>, 586 p.
2. E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*, New York: Springer, 2014 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>, 297 p.
3. D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin, “Peridynamics method for problems solve of solids destruction.”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **24:4** (2022), 452–468 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
4. V. N. Sofronov, M. V. Vetchinnikov, M. A. Dyemina, “Use of Hamiltonian dynamics methods in computational continuum mechanics”, *Zhurnal VANT*, 2020, no. 4 (In Russ.), 17 p.

5. M.L. Parks, P. Seleson, S. J. Plimpton, R.B. Lehoucq, S.A. Silling, “Peridynamics with LAMMPS: A User Guide v0.2 Beta”, 2008, 28 p.
6. A. N. Anisimov, S. A. Grushin, B. L. Voronin, S. V. Kopkin, A. M. Yerofeev, D. A. Demin, M. A. Demina, M. V. Zdorova, M. V. Vetchinnikov, N. S. Elicheva, N. O. Kovalenko, I. A. Kryuchkov, A. G. Kechin, V. A. Degtyarev, *Certificate of state registration of the computer program No. 2010614974. A complex of molecular dynamic modeling programs (MoDyS)*, 2010 (In Russ.).
7. M. L. Parks, Lehoucq, R. B., S. J. Plimpton, S. A. Silling, “Implementing peridynamics within a molecular dynamics code”, *Computer Physics Communications*, **179** (2008), 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>
8. S. A. Silling, “Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **48**:1 (2000), 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
9. S. A. Silling, E. Askari, “A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics”, *Computers & Structures*, **93**:17 (2005), 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
10. S. A. Silling, M. Zimmermann, R. Abeyaratne, “Deformation of a peridynamic bar”, *Journal of Elasticity*, **73** (2003), 173–190.
11. Z. Chen, J. W. Ju, G. Su, X. Huang, S. Li., L. Zhai, “Influence of micro-modulus functions on peridynamics simulation of crack propagation and branching in brittle materials”, *Engineering Fracture Mechanics*, **216** (2019). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106498>
12. S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, “Peridynamic states and constitutive modeling”, *Journal of Elasticity*, **88** (2007), 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
13. A. J. Mitchell, S. A. Silling, D. J. Littlewood, “A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **20**:5 (2015), 539–557. DOI: <https://dx.doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
14. J. A. Mitchell, “On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’, studies of presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure”, *Sandia National Laboratories*, 2013.
15. S. A. Silling, R. B. Lehoucq, “Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory”, *Journal of Elasticity*, **93** (2008), 13–37.

*Submitted 29.08.2023; Revised 02.10.2023; Accepted 24.11.2023*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.