DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.284-298 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.64

О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга

С. В. Сидоров, Г. В. Уткин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Работа посвящена проблеме распознавания подобия матриц над кольцом целых чисел для некоторых семейств матриц. А именно, рассматриваются нильпотентные верхние треугольные матрицы максимального ранга, у которых только первая и вторая супердиагонали ненулевые. Получено несколько необходимых условий подобия таких матриц матрицам вида $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ с одной ненулевой супердиагональю (обобщение жордановой клетки $J_n(0) = \mathrm{superdiag}(1, 1, \ldots, 1)$). Эти условия сформулированы в простых терминах делимости и наибольших общих делителей матричных элементов. Результат получен посредством сведения задачи распознавания подобия к задаче решения в целых числах системы линейных уравнений и применения известных необходимых условий подобия для произвольных матриц. При некоторых дополнительных условиях на элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ первой супердиагонали матрицы A доказано, что A подобна матрице $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ независимо от значений элементов второй супердиагонали. Кроме того, для рассматриваемых матриц третьего и четвёртого порядков получены легко проверяемые необходимые и достаточные условия подобия матрице вида $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Ключевые слова: подобие матриц, жорданова форма, нормальная диагональная форма Смита, кольцо целых чисел, нильпотентная матрица

Для цитирования: Сидоров С. В., Уткин Г. В. О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 284–298. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.284-298

Об авторах:

Сидоров Сергей Владимирович, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

Уткин Герман Владимирович, лаборант кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4794-2591, german.utkingu@gmail.com

Original article

MSC2020 15A04, 15A18, 15A21, 15B36

On the Similarity over the Ring of Integers of Certain Nilpotent Matrices of Maximal Rank

S. V. Sidorov, G. V. Utkin

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. This paper is devoted to the problem of matrix similarity recognition over the ring of integers for some families of matrices. Namely, nilpotent upper triangular matrices of maximal rank are considered such that only first and second superdiagonals of these matrices are non-zero. Several necessary conditions are obtained for similarity of such matrices to matrices of the form $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ with a single non-zero superdiagonal, that is a generalization of the Jordan cell $J_n(0) = \mathrm{superdiag}(1, 1, \ldots, 1)$. These conditions are formulated in simple terms of divisibility and greatest common divisors of matrix elements. The result is obtained by reducing the problem of similarity recognition to the problem of solving in integers a system of linear equations and applying the known necessary similarity conditions for arbitrary matrices. Under some additional conditions on the elements $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ of the first superdiagonal of matrix A, it is proven that the matrix A is similar to matrix $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ regardless of the values of the elements of the second superdiagonal. Moreover, for the considered matrices of the third and the fourth orders, easily verifiable necessary and sufficient similarity conditions are obtained describing their similarity to a matrix of the form $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Keywords: similarity of matrices, Jordan form, Smith normal diagonal form, ring of integers, nilpotent matrix

For citation: *S. V. Sidorov, G. V. Utkin.* On the Similarity over the Ring of Integers of Certain Nilpotent Matrices of Maximal Rank. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:4(2023), 284–298. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.284-298

About the authors:

Sergey V. Sidorov, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

German V. Utkin, Laboratory Assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), Bachelor of Applied Computer Science, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4794-2591, german.utkingu@gmail.com

1. Введение

Задача подобия матриц над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ является естественным обобщением классической задачи о подобии матриц над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Матрица $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ над полем $\mathbb{Q}$, если $B = X^{-1}AX$ для некоторой матрицы $X \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, $\det X \neq 0$.

Напомним, что через $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ обозначается множество целочисленных матриц, имеющих определитель 1 или -1. Матрицу $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ будем называть унимодулярной.

Определение 1.1. *Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, если существует такая матрица $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, что $AX = XB$. При этом матрица X называется трансформирующей матрицей.*

Если матрица A подобна над $\mathbb{Z}$ матрице B, то будем обозначать это $A \sim B$.

Определение 1.2. *Классом подобия $K_{\mathbb{Z}}(A)$ матрицы $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ над $\mathbb{Z}$ называется множество всех целочисленных матриц, которым матрица A подобна над $\mathbb{Z}$, т. е.*

$$K_{\mathbb{Z}}(A) = \{B \in \mathbb{Z}^{n\times n} \mid A \sim B\}.$$

Впервые алгоритмическая разрешимость задачи распознавания подобия матриц над $\mathbb{Z}$ была доказана независимо в [1–2]. В [3] получен новый алгоритм распознавания подобия в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, основанный на идеях из [2]. В [4] решена проблема целочисленного подобия для нильпотентных и полупростых матриц; в [5] — для матриц с характеристическим многочленом, свободным от квадратов; в [6] разработан алгоритм для матриц конечного порядка в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$; в [7] описано множество классов подобия в $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$.

Зачастую задача распознавания подобия над $\mathbb{Z}$ упрощается, если все собственные значения матриц лежат в $\mathbb{Z}$. Например, в [8] получен квазиполиномиальный алгоритм распознавания подобия над $\mathbb{Z}$ для матриц, имеющих целочисленный спектр и жорданова форма которых не содержит клеток одинакового порядка для одного и того же собственного числа. Также в [8] получена верхняя оценка числа классов подобия, если алгебраическая кратность всех собственных чисел равна 1. Кроме того, помимо разработки алгоритмов распознавания подобия интересны и другие аспекты рассматриваемой задачи — нахождение критериев подобия для каких-то специальных классов матриц и исследование структуры классов подобия (в частности, нахождение канонических матриц). Например, в работах [9–12] исследованы классы подобия над $\mathbb{Z}$ матриц 2-го и 3-го порядков. Отметим, что классификация матриц относительно подобия над $\mathbb{Z}$ возникает в топологии (см., например, [13, 14]).

Поскольку отношение подобия матриц над $\mathbb{Z}$ есть отношение эквивалентности, то вместо фразы «матрица A подобна над $\mathbb{Z}$ матрице B» можно говорить просто «матрицы A и B подобны над $\mathbb{Z}$». Очевидно, что если $A \sim B$, то A подобна B над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Обратное неверно. Таким образом, подобие матриц над $\mathbb{Q}$ — необходимое (но не достаточное!) условие для подобия над $\mathbb{Z}$. Простейшие контрпримеры можно посмотреть, например, в [12; 15; 16]. Переход от поля $\mathbb{Q}$ к кольцу $\mathbb{Z}$ сильно усложняет задачу распознавания подобия и нахождения трансформирующей матрицы. Класс подобия матрицы A над $\mathbb{Q}$, не совпадает с $K_{\mathbb{Z}}(A)$, а является объединением некоторого семейства классов подобия над $\mathbb{Z}$. Это семейство может быть как конечным, так и счётным (см. [12]).

Существует много других необходимых условий подобия над $\mathbb{Z}$ ([12]). Рассмотрим некоторые из этих условий, требуемых для исследования. Напомним, что квадратные матрицы A и B называются эквивалентными над $\mathbb{Z}$, если существуют такие $P, Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, что $PAQ = B$ (аналогично для неквадратных матриц). Очевидно, что если $A \sim B$, то A и B эквивалентны над $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\Delta_k(A)$ наибольший общий делитель (НОД) всех миноров k-го порядка матрицы A. Известно, что критерием эквивалентности матриц A и B над $\mathbb{Z}$ является равенство НОД миноров соответствующих порядков (см. [17, 18]). Таким образом, если $A \sim B$, то $\Delta_k(A) = \Delta_k(B)$ для любого $k = 1, \ldots, n$.

Из работ Г. Фробениуса известно, что если все собственные числа матрицы A лежат в $\mathbb{Z}$, то A подобна над $\mathbb{Q}$ жордановой форме. Как показывают примеры в [12, 15], принадлежность всех собственных значений кольцу $\mathbb{Z}$ не достаточна для подобия жордановой форме (даже для (2×2)-матриц). В работе [15] получены необходимые и достаточные условия подобия над $\mathbb{Z}$ жордановой клетке $J_n(\alpha)$. Если характеристический многочлен матрицы A имеет вид $\det(A - \lambda E) = (\alpha - \lambda)^n$, то без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 0$ (т. е. матрица A нильпотентна), поскольку $A \sim B \iff (A - \alpha E) \sim (B - \alpha E)$. Поэтому естественным является вопрос, при каких условиях нильпотентная матрица подобна некоторому обобщению жордановой клетки, а именно, матрице $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, в которой отличны от 0 только элементы первой супердиагонали (очевидно, что $J_n(0) = \mathrm{superdiag}(1, 1, \ldots, 1)$). В статье мы частично отвечаем на этот вопрос. Далее ограничимся рассмотрением верхних треугольных нильпотентных матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, имеющих максимальный ранг (а именно, $\mathrm{rank}(A) = n - 1$). Треугольный вид нильпотентной матрицы не ограничивает общность, поскольку любая нильпотентная матрица подобна над $\mathbb{Z}$ некоторой верхней треугольной матрице (см. [16]). Все такие матрицы подобны над $\mathbb{Q}$ жордановой клетке, для них характеристический многочлен λ^n совпадает с минимальным многочленом. Другая характеризация матриц такого вида — все элементы $a_{i,i+1}$ первой наддиагонали (супердиагонали) отличны от нуля. Как будет показано далее, это свойство элементов супердиагонали накладывает дополнительные ограничения (помимо принадлежности $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$) на вид трансформирующих матриц.

2. Верхние треугольные нильпотентные матрицы

Для *некоторых* классов исходных матриц A и B *любая* трансформирующая матрица $X = (x_{ij})$ имеет верхний треугольный вид, т. е. $x_{ij} = 0$ при $i > j$. Кроме того, в силу унимодулярности матрицы X её диагональные элементы x_{ii} будут при этом удовлетворять условию $x_{ii} \in \{-1, 1\}$. Таким образом, в этом случае задача распознавания подобия матриц упрощается, поскольку условия $AX = XB$, $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ будут равносильны разрешимости в целых числах хотя бы одной из 2^n систем уравнений

$$\sum_{k=1}^{j} a_{ik} x_{kj} = \sum_{k=i}^{n} x_{ik} b_{kj},\ x_{ii} \in \{-1, 1\},\ (i, j = 1, \ldots, n)$$

(для каждого набора диагональных элементов $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn} \in \{-1, 1\}$). Нахождение целочисленных решений систем линейных уравнений — классическая задача. Самый известный алгоритм её решения — приведение матрицы системы к нормальной диагональной форме Смита ([18]).

Одним из таких классов матриц являются верхние треугольные нильпотентные матрицы, в которых все элементы первой супердиагонали отличны от 0.

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — целочисленные нильпотентные верхние треугольные матрицы порядка n максимального ранга $n - 1$, т. е. при любых $1 \leq j \leq i \leq n$ имеем $a_{ij} = b_{ij} = 0$, причём $a_{i,i+1} \neq 0$, $b_{i,i+1} \neq 0$ для любого $1 \leq i \leq n - 1$. Тогда если $A \sim B$, то*

1. $a_{i,i+1} = \pm b_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, n - 1$;

2. *Любая трансформирующая матрица $X = (x_{ii})$ является верхней треугольной, причём $x_{ii} = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть $AX = XB$ и $X = (x_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ — трансформирующая матрица. Тогда X — верхняя треугольная матрица ([4], с. 117, Утверждение 4.22). Поскольку $\det(X) \in \{-1, 1\}$, то $x_{ii} \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда из условия $AX = XB$ следует, что

$$a_{i,i+1}x_{i+1,i+1} = x_{ii}b_{i,i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

стало быть, $a_{i,i+1} = \pm b_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.
Доказательство завершено.

Доказанная Лемма позволяет свести задачу распознавания подобия для нильпотентных матриц максимального ранга к решению в целых числах системы линейных уравнений.

Лемма 2.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная нильпотентная верхняя треугольная матрица порядка n максимального ранга $n-1$ т. е. при любых $1 \leq j \leq \leq i \leq n$ имеем $a_{ij} = 0$, причём $a_{i,i+1} \neq 0$ для любого $1 \leq i \leq n-1$. Тогда существует такая нильпотентная верхняя треугольная матрица матрица $C = (c_{ij})$, что $A \sim C$ и*

$$c_{i,i+1} = \begin{cases} a_{i,i+1}, & \text{если } a_{i,i+1} > 0, \\ -a_{i,i+1}, & \text{если } a_{i,i+1} < 0 \end{cases}$$

для любого $1 \leq i \leq n-1$.

Доказательство. Будем искать диагональную матрицу Y, такую что $AY = YC$. Тогда $a_{i,i+1}y_{i+1,i+1} = y_{i,i}c_{i,i+1} = y_{i,i}\varepsilon_i a_{i,i+1}$, где ε_i — знак элемента a_{i+1}, т. е.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1, & \text{если } a_{i,i+1} > 0, \\ -1, & \text{если } a_{i,i+1} < 0. \end{cases}$$

Поскольку $a_{i,i+1} \neq 0$, то равенство $AY = YC$ для диагональной матрицы Y равносильно условиям $y_{i+1,i+1} = \varepsilon_i y_{i,i}$. Положив $y_{1,1} = 1$, получим $y_{i+1,i+1} = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Таким образом, $C = Y^{-1}AY$, где $Y = \mathrm{diag}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1})$.
Доказательство завершено.

Эта Лемма показывает, что без ограничения общности можно рассматривать верхние треугольные нильпотентные матрицы максимального ранга, в которых все элементы первой наддиагонали положительны.

3. Матрицы специального вида: с одной и двумя ненулевыми супердиагоналями

В работе будем исследовать, при каких условиях подобны над $\mathbb{Z}$ нильпотентные матрицы A и B вида

$$
\begin{gathered}
A=\begin{pmatrix}
0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix},\\
B=\begin{pmatrix}
0 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где $a_i \neq 0$, $c_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n-1)$.

Последнюю матрицу будем обозначать $B = \mathrm{superdiag}(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$.

Лемма 3.1. *Пусть A и B — матрицы вида (3.1). Тогда*

$$A \sim B \implies A \sim \mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

Доказательство. Поскольку $A \sim B$, то по Лемме 2.1 имеем $c_i = \pm a_i$, $(i = 1, \dots, n-1)$. Если обозначить через ε_i знак элемента a_i, то $c_i = \varepsilon_i a_i$ и $B = \mathrm{superdiag}(\varepsilon_1 a_1, \varepsilon_2 a_2, \dots, \varepsilon_n a_{n-1})$. Но $B \sim C = \mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Действительно, $BY = YC$ для $Y = \mathrm{diag}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1})$. В силу транзитивности отношения подобия имеем $A \sim \mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Доказательство завершено.

Таким образом, далее мы будем рассматривать нильпотентные матрицы A и B следующего вида:

$$
\begin{gathered}
A=\begin{pmatrix}
0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix},\\
B=\begin{pmatrix}
0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ — ненулевые целые числа. Нас будет интересовать вопрос, при каких условиях эти матрицы подобны над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Отметим, что матрица A

вида (3.2) подобна над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ жордановой клетке, т. е. матрице $\operatorname{superdiag}(1, 1, \ldots, 1)$.

Необходимое условие подобия $\Delta_1(A) = \Delta_1(B)$ для матриц вида (3.2) равносильно тому, что НОД$(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$ делится на НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Без ограничения общности можно считать, что НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = 1$.

По Лемме 2.1 любая трансформирующая матрица X будет верхней треугольной с 1 и -1 по диагонали. Кроме того, поскольку $a_{i,i+1}x_{i+1,i+1} = x_{ii}a_{i,i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, то $x_{ii} = x_{i+1,i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Следовательно, $x_{i,i} = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$ или $x_{i,i} = -1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Не умаляя общности, можно считать, что $x_{i,i} = 1$, поскольку если $AX = XB$, то и $A \cdot (-X) = (-X) \cdot B$. Таким образом, если $A \sim B$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица вида:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n-2)} & x_1^{(n-1)} \\ 0 & 1 & x_2^{(1)} & \ddots & x_2^{(n-3)} & x_2^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & x_3^{(n-4)} & x_3^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_{n-1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(здесь $x_i^{(j)}$ — i-й элемент j-й наддиагонали, т. е. в стандартных обозначениях $x_i^{(j)} = x_{i,i+j}$).

При конкретных значениях элементов матриц A и B вида (3.2) распознавание их подобия с алгоритмической точки зрения не представляет трудностей, поскольку сводится к решению системы линейных диофантовых уравнений. Как упоминалось выше, для решения таких систем можно использовать, например, метод приведения матрицы системы к нормальной диагональной форме Смита. Однако поставлена задача получить критерий подобия матриц вида (3.2) в терминах свойств элементов самих матриц.

Рассмотрим подробнее, как выглядит система уравнений $AX = XB$ для рассматриваемых матриц.

$$\begin{aligned} a_i x_{i+1}^{(1)} + b_i &= x_i^{(1)} a_{i+1}, \ (i = 1, \ldots, n-2), \\ a_i x_{i+1}^{(2)} + b_i x_{i+2}^{(1)} &= x_i^{(2)} a_{i+2}, \ (i = 1, \ldots, n-3), \\ a_i x_{i+1}^{(3)} + b_i x_{i+2}^{(2)} &= x_i^{(3)} a_{i+3}, \ (i = 1, \ldots, n-4), \\ &\ldots \\ a_i x_{i+1}^{(n-3)} + b_i x_{i+2}^{(n-4)} &= x_i^{(n-3)} a_{i+n-3}, \ (i = 1, 2), \\ a_1 x_2^{(n-2)} + b_1 x_3^{(n-3)} &= x_1^{(n-2)} a_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

В этой системе $(n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ уравнений и $(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 = \dfrac{n(n-1)}{2} - 1$ неизвестных ($x_1^{(n-1)}$ явно не входит). Видим, что система состоит из $(n-2)$ подсистем, причём k-я подсистема содержит $(n-k-1)$ уравнений. Кроме того, первая подсистема — неоднородная, остальные — однородные.

В качестве примера запишем систему (3.3) при $n = 6$:

$$\begin{aligned}
&a_i x_{i+1}^{(1)} + b_i = x_i^{(1)} a_{i+1},\ (i = 1, 2, 3, 4),\\
&a_i x_{i+1}^{(2)} + b_i x_{i+2}^{(1)} = x_i^{(2)} a_{i+2},\ (i = 1, 2, 3),\\
&a_i x_{i+1}^{(3)} + b_i x_{i+2}^{(2)} = x_i^{(3)} a_{i+3},\ (i = 1, 2),\\
&a_1 x_2^{(4)} + b_1 x_3^{(3)} = x_1^{(4)} a_5,
\end{aligned}$$

и соответствующую расширенную матрицу

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|cccc|ccc|cc|c}
x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} & x_5^{(1)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_1^{(4)} & x_2^{(4)} &
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccc|cccc|ccc|cc|c}
a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1\\
0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2\\
0 & 0 & a_4 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3\\
0 & 0 & 0 & a_5 & -a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4\\
\hline
0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & a_3 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & a_4 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & a_5 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & a_4 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & a_5 & -a_2 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & a_5 & -a_1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

Т е о р е м а 3.1. *(критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений, см.* [18, с. 51]*) Пусть $P \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ — матрица ранга m и $b \in \mathbb{Z}^m$. Тогда система $Px = b$ имеет целочисленные решения тогда и только тогда, когда каждый минор порядка m расширенной матрицы (P, b) делится на $\Delta_m(P)$.*

В следующей теореме приведены некоторые достаточные условия подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (3.2).

Т е о р е м а 3.2. *Если $a_2, \ldots, a_{n-2} \in \{-1, 1\}$, $a_1, a_{n-1} \neq 0$, НОД$(a_1, a_{n-1}) = 1$, то для любых $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2} \in \mathbb{Z}$ матрицы A и B вида (3.2) подобны над $\mathbb{Z}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если записать матрицу системы $AX - XB = 0$, то в её основной матрице найдутся два ранговых минора, равных по модулю $a_2 \cdot a_3^2 \cdot \ldots \cdot a_{n-2}^{n-3} \cdot a_{n-1}^{n-2}$ и $a_1^{n-2} \cdot a_2^{n-3} \cdot \ldots \cdot a_{n-2}$. В условиях теоремы они будут равны a_{n-1}^{n-2} и a_1^{n-2}, поэтому НОД$(a_{n-1}^{n-2}, a_1^{n-2})$ = НОД$(a_1, a_{n-1}) = 1$. Следовательно, НОД всех ранговых миноров будет равен 1, поэтому при любых $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2} \in \mathbb{Z}$ система $AX - XB = 0$ будет совместна в целых числах по Теореме 3.1.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Т е о р е м а 3.3. *(необходимые условия подобия) Если матрицы A и B вида (3.2) подобны над $\mathbb{Z}$, то выполняются следующие условия:*

1. *b_i делится на НОД(a_i, a_{i+1}) для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-2$.*
2. *$a_i b_{i+1} + b_i a_{i+2}$ делится на $a_{i+1} \cdot$ НОД(a_i, a_{i+2}) для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку A и B подобны, то существует унитреугольная матрица X, такая что $AX = XB$. Разобьём матрицы A, B, X на блоки следующим образом:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & A_i & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right),\ X = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & X_i & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right),\ B = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & B_i & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right),$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & b_i \\ 0 & 0 & a_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i^{(1)} & x_i^{(2)} \\ 0 & 1 & x_{i+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & a_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $AX = XB$, то $A_iX_i = X_iB_i$, $X_i \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$. Таким образом, A_i и B_i тоже подобны над $\mathbb{Z}$. Следовательно, $\Delta_1(A_i) = \Delta_1(B_i)$. Имеем $\Delta_1(B_i) = \text{НОД}(a_i, a_{i+1})$, $\Delta_1(A_i) = \text{НОД}(a_i, a_{i+1}, b_i) = \text{НОД}(\Delta_1(B_i), b_i)$, поэтому равенство $\Delta_1(A_i) = \Delta_1(B_i)$ равносильно тому, что b_i делится на $\Delta_1(B_i)$, т. е. $b_i \,\vdots\, \text{НОД}(a_i, a_{i+1})$.

Теперь пусть

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & b_i & 0 \\ 0 & 0 & a_{i+1} & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i^{(1)} & x_i^{(2)} & x_i^{(3)} \\ 0 & 1 & x_{i+1}^{(1)} & x_{i+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & x_{i+2}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разбивая аналогичным образом матрицы A, B, X на блоки, получаем, что $A_i \sim B_i$. Однако тогда квадраты этих матриц A_i^2, B_i^2 тоже подобны над $\mathbb{Z}$. Поскольку

$$A_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_ia_{i+1} & a_ib_{i+1} + b_ia_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+1}a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_ia_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+1}a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $A_i^2 \sim B_i^2$, то $\Delta_1(A_i^2) = \Delta_1(B_i^2)$. Имеем

$$\Delta_1(B_i^2) = \text{НОД}(a_ia_{i+1}, a_{i+1}a_{i+2}) = a_{i+1} \cdot \text{НОД}(a_i, a_{i+2}),$$

$$\Delta_1(A_i^2) = \text{НОД}(a_ia_{i+1}, a_{i+1}a_{i+2}, a_ib_{i+1} + b_ia_{i+2}) = \text{НОД}(\Delta_1(B_i^2), a_ib_{i+1} + b_ia_{i+2}),$$

поэтому равенство $\Delta_1(A_i^2) = \Delta_1(B_i^2)$ равносильно тому, что $a_ib_{i+1} + b_ia_{i+2}$ делится на $\Delta_1(B_i^2)$, т. е. $(a_ib_{i+1} + b_ia_{i+2})$ делится на $a_{i+1} \cdot \text{НОД}(a_i, a_{i+2})$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

У т в е р ж д е н и е 3.1. *Пусть НОД*$(a_k, a_{k+2}) = 1$ *и* $(a_kb_{k+1} + b_ka_{k+2}) \,\vdots\, a_{k+1}$. *Тогда*

1. b_k *делится на НОД*(a_k, a_{k+1});
2. b_{k+1} *делится на НОД*(a_{k+1}, a_{k+2}).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $(a_kb_{k+1} + b_ka_{k+2}) \,\vdots\, a_{k+1}$, т. е. $a_kb_{k+1} + b_ka_{k+2} = = a_{k+1}x$ для некоторого $x \in \mathbb{Z}$, поэтому $b_ka_{k+2} \,\vdots\, \text{НОД}(a_k, a_{k+1})$ и $a_kb_{k+1} \,\vdots\, \text{НОД}(a_{k+1}, a_{k+2})$.

Условие НОД$(a_k, a_{k+2}) = 1$ влечёт НОД$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) = 1$, поэтому $b_k \,\vdots\,$ НОД(a_k, a_{k+1}) и $b_{k+1} \,\vdots\,$ НОД(a_{k+1}, a_{k+2}).

Доказательство завершено.

Таким образом, если НОД$(a_i, a_{i+2}) = 1$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-3$, то из второго необходимого условия Теоремы 3.3 вытекает первое.

4. Критерии подобия для матриц малых порядков

4.1. Матрицы порядка 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равенство $AX = XB$ равносильно в этом случае уравнению $b_1 + a_1 y_2 = a_2 y_1$, которое имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда b_1 делится на НОД(a_1, a_2). Заметим, что для матриц третьего порядка из условий Теоремы 3.3 остаётся только первое условие (а именно, b_1 делится на НОД(a_1, a_2)), которое является критерием подобия в этом случае.

Теорема 4.1. *Пусть $n = 3$ и $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. Тогда матрицы A и B вида (3.2) подобны над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда b_1 делится на НОД(a_1, a_2).*

4.2. Матрицы порядка 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 0 & 1 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Для (4×4)-матриц условия Теоремы 3.3 следующие:

1. $b_1 \,\vdots\,$ НОД(a_1, a_2), $b_2 \,\vdots\,$ НОД(a_2, a_3).
2. $a_1 b_2 + b_1 a_3$ делится на $a_2 \cdot$ НОД(a_1, a_3).

Эти условия не являются достаточными для подобия над $\mathbb{Z}$, что показывает следующий пример.

Пример 4.1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & r & 0 \\ 0 & 0 & r & r \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где p, r — различные простые числа. Для этих матриц условия Теоремы 3.3 выполняются, но A и B не подобны. Действительно, $\Delta_2(A) \neq \Delta_2(B)$, поскольку $\Delta_2(A) =$ $=$ НОД$(pr, p^2, r^2) = 1$, а $\Delta_2(B) =$ НОД$(pr, p^2) = p$.

Заметим, что если НОД$(a_1, a_3) = 1$ (отсюда, в частности, следует, что НОД$(a_1, a_2, a_3) = 1$), то необходимые условия Теоремы 3.3 становятся достаточными. Кроме того, первое условие вытекает из второго по Утверждению 3.1.

Т е о р е м а 4.2. *Рассмотрим матрицы вида (3.2) при $n = 4$. Пусть НОД$(a_1, a_2, a_3) = 1$, $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Тогда*

$$A \sim B \iff \begin{array}{l} \text{1) } (a_1b_2 + b_1a_3) \vdots a_2; \\[2ex] \text{2) } b_1b_2 \vdots \text{НОД}(a_1, a_3). \end{array}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $AX = XB$ для X вида (4.1) равносильно системе

$$\begin{cases} a_2y_1 - a_1y_2 = b_1, \\ a_3y_2 - a_2y_3 = b_2, \\ a_3z_1 - a_1z_2 = b_1y_3, \end{cases}$$

которую можно записать в матричном виде $Px = b$, где

$$P = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & a_3 & -a_1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3)$, то ранг матрицы P равен 3. Таким образом, по теореме 3.1 система $Px = b$ совместна над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда все миноры порядка 3 матрицы (P, b) делятся на НОД миноров порядка 3 матрицы P, т. е. на $\Delta_3(P)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_3(P) = \text{НОД}(a_2a_3b_1, a_2a_3^2, a_1a_2a_3, a_2^2a_3, a_1a_2^2, a_1^2a_2) = \\ = a_2 \cdot \text{НОД}(a_3b_1, a_3^2, a_1a_3, a_2a_3, a_1a_2, a_1^2) = \\ = a_2 \cdot \text{НОД}(a_3 \cdot \text{НОД}(b_1, a_1, a_2, a_3), a_1a_2, a_1^2) = \\ = a_2 \cdot \text{НОД}(a_3, a_1 \cdot \text{НОД}(a_1, a_2)) = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3) \end{aligned}$$

(последнее равенство справедливо, поскольку a_3 и НОД(a_1, a_2) взаимно простые).

Итак,

$$\Delta_3(P) = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3).$$

Перечислим все миноры порядка 3 для расширенной матрицы (P, b), отличные от миноров матрицы P:

$$a_2b_1b_2, \ a_2a_3b_2, \ a_1a_2b_1, \ b_1(a_1b_2 + b_1a_3), \ a_3(a_1b_2 + b_1a_3), \ a_1(a_1b_2 + b_1a_3).$$

Заметим, что величины $a_2a_3b_2, a_1a_2b_1$ заведомо делятся на $\Delta_3(P)$.

Число $a_2b_1b_2$ делится на $\Delta_3(P)$ тогда и только тогда, когда $b_1b_2 \vdots \text{НОД}(a_1, a_3)$.

Остальные три минора делятся на на $\Delta_3(P)$ тогда и только тогда, когда $(a_1b_2+b_1a_3)\cdot$ $\cdot\text{НОД}(b_1, a_1, a_3)$ делится на $a_2\cdot\text{НОД}(a_1, a_3)$. Однако это равносильно тому, что $a_1b_2+b_1a_3$ делится на $a_2\cdot\dfrac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(b_1, a_1, a_3)}$. В свою очередь, в силу взаимной простоты сомножителей

a_2 и $\dfrac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(b_1, a_1, a_3)}$ это равносильно тому, что $a_1b_2 + b_1a_3$ делится на a_2 (поскольку $a_1b_2 + b_1a_3$ заведомо делится на $\dfrac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(b_1, a_1, a_3)}$).
Доказательство завершено.

Следствие 4.1. *(критерий подобия при $n = 4$) Рассмотрим матрицы вида (3.2) при $n = 4$. Пусть $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда*

$$A \sim B \iff \begin{array}{l} \text{1) } b_1 \vdots d,\ b_2 \vdots d; \\ \text{2) } b_1b_2 \vdots (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)); \\ \text{3) } (a_1b_2 + b_1a_3) \vdots da_2. \end{array}$$

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. Условие $A \sim B$ равносильно тому, что $b_i \vdots d$, $i = 1, 2$ и $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$. Поскольку матрицы $\frac{1}{d}A$ и $\frac{1}{d}B$ удовлетворяют условиям Теоремы 4.2, то $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{a_1}{d}\frac{b_2}{d} + \frac{b_1}{d}\frac{a_3}{d}\right) \vdots \frac{a_2}{d}, \quad \frac{b_1}{d}\frac{b_2}{d} \vdots \text{НОД}\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_3}{d}\right).$$

Это равносильно тому, что $(a_1b_2 + b_1a_3) \vdots da_2$, $b_1b_2 \vdots (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3))$. С учётом условия $b_i \vdots d$, $i = 1, 2$ получаем требуемое.
Доказательство завершено.

Следствие 4.2. *Рассмотрим матрицы вида (3.2) при $n = 4$. Пусть $\text{НОД}(a_1, a_3) = 1$, $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Тогда*

$$A \sim B \iff (a_1b_2 + b_1a_3) \vdots a_2.$$

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00194).

Список литературы

1. Sarkisjan R. A. Conjugacy problem for sets of integral matrices // Math. Notes. 1979. Vol. 25, no. 6. pp. 419–426. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01230982

2. Grunewald F. J. Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups // Word Problems II. 1980. Vol. 95. pp. 101–139. DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)71335-1

3. Eick B., Hofmann T., O'Brien E. A. The conjugacy problem in GL($n, \mathbb{Z}$) // J. Lond. Math. Soc. 2019. Vol. 100, no. 3. pp. 731–756. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms.12246

4. Husert D. Similarity of integer matrices : PhD Thesis. Paderborn, 2017. 147 p.
5. Marseglia S. Computing the ideal class monoid of an order // J. Lond. Math. Soc. 2019. Vol. 101, no. 3. pp. 984–1007. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms.12294
6. Opgenorth J., Plesken W., Schulz T. Crystallographic algorithms and tables // Acta Cryst. 1998. Vol. 54, no. 5. pp. 517–531. DOI: https://doi.org/10.1107/S010876739701547X
7. Karpenkov O. Multidimensional Gauss reduction theory for conjugacy classes of $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ // J. Theor. Nombres Bordeaux. 2013. Vol. 25, no. 1. pp. 99–109.
8. Сидоров С. В. О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 3. С. 86–94.
9. Appelgate H., Onishi H. The similarity problem 3×3 integer matrices // Linear Algebra Appl. 1982. Vol. 42, no. 2. pp. 159–174. DOI: https://doi.org/10.2307/2043695
10. Сидоров С. В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 1. С. 119–127.
11. Сидоров С. В. Выделение эффективно разрешимых классов в задаче подобия матриц над кольцом целых чисел : дис. … канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2015. 121 с.
12. Шевченко В. Н., Сидоров С. В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. Т. 50, № 4. С. 56–63.
13. Сидоров С. В., Чилина Е. Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307. DOI: https://doi.org/10.15507/2079.6900.23.202103.295-307
14. Gorbatsevich V. V. Compact solvmanifolds of dimension at most 4 // Siberian Mathematical Journal. 2009. Vol. 50, no. 2. pp. 239–252.
15. Сидоров С. В. О подобии некоторых целочисленных матриц с единственным собственным значением над кольцом целых чисел // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 763–770. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11859
16. Newman M. Integral matrices. NY-London: Academic Press, 1972. 223 p.
17. Lazebnik F. On systems of linear Diophantine equations // Mathematics Magazine. 1996. Vol. 69. pp. 261–266. DOI: https://doi.org/10.2307/2690528
18. Schrijver A. Theory of linear and integer programming. Wiley, 1998. 464 p.

Поступила 04.08.2023; доработана после рецензирования 05.10.2023; принята к публикации 24.11.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

S. V. Sidorov, G. V. Utkin. On the similarity over the ring of integers of certain nilpotent matrices of…

References

1. R. A. Sarkisjan, "Conjugacy problem for sets of integral matrices", *Math. Notes*, **25**:6 (1979), 419–426. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01230982

2. F. J. Grunewald, *Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups*, Word Problems II, **95**, 1980, 101–139 DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)71335-1.

3. B. Eick, T. Hofmann, E. A. O'Brien, "The conjugacy problem in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$", *J. Lond. Math. Soc.*, **100**:3 (2019), 731–756. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms.12246

4. D. Husert, *Similarity of integer matrices*, PhD Thesis, University of Paderborn, 2017, 147 p.

5. S. Marseglia, "Computing the ideal class monoid of an order", *J. Lond. Math. Soc.*, **101**:3 (2019), 984–1007. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms.12294

6. J. Opgenorth, W. Plesken, T. Schulz, "Crystallographic algorithms and tables", *Acta Cryst. Sect.*, **54**:5 (1998), 517–531. DOI: https://doi.org/10.1107/S010876739701547X

7. O. Karpenkov, "Multidimensional Gauss reduction theory for conjugacy classes of $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$", *J. Theor. Nombres Bordeaux*, **25**:1 (2013), 99–109.

8. S. V. Sidorov, "Similarity of matrices with integer spectra over the ring of integers", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **55**:3 (2011), 77–84 (In Russ.).

9. H. Appelgate, H. Onishi, "The similarity problem 3×3 integer matrices", *Linear Algebra Appl.*, **42**:2 (1982), 159–174. DOI: https://doi.org/10.2307/2043695

10. S. V. Sidorov, "On similarity of matrices of third order over the ring of integers with reducible characteristic polynomial", *Vestnik Nizhegorodsk. Univ.*, 2009, no. 1, 119–127 (In Russ.).

11. S. V. Sidorov, *Selection of effectively solvable classes in the problem of similarity of matrices over the ring of integers*, PhD Dissertation, Nizhny Novgorod, 2015 (In Russ.).

12. V. N. Shevchenko, S. V. Sidorov, "On the similarity of second-order matrices over the ring of integers", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **50**:4 (2006), 56–63 (In Russ.).

13. S. V. Sidorov, E. E. Chilina, "On non-hyperbolic algebraic automorphisms of the torus", *Zhurnal SVMO*, **23**:3 (2021), 295–307 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079.6900.23.202103.295-307

14. V. V. Gorbatsevich, "Compact solvmanifolds of dimension at most ≤ 4", *Sib. Math. J*, **50**:2 (2009), 239–252.

15. S. V. Sidorov, "On the similarity of certain integer matrices with single eigenvalue over the ring of integers", *Math Notes*, **105** (2019), 756–762 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434619050122

16. M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, 223 p.

17. F. Lazebnik, “On systems of linear Diophantine equations”, *Mathematics Magazine*, **69** (1996), 261–266. DOI: https://doi.org/10.2307/2690528

18. A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley, 1998, 464 p.

Submitted 04.08.2023; Revised 05.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.