DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.273-283 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

Надстройки над декартовыми произведениями сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности

С. Х. Зинина[1], А. А. Ноздринов[2], В. И. Шмуклер[2]

[1] *ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)*
[2] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. Одной из конструкций получения потоков на многообразии является построение надстройки над каскадом. В этом случае поток является неособым, то есть не имеет неподвижных точек. С. Смейл показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. Обратное утверждение неверно в общем случае, но, при некоторых предположениях сопряженность диффеоморфизмов равносильна эквивалентности надстроек. Так, в работе Дж. Икегами показано, что критерий работает в случае, когда диффеоморфизм задан на многообразии, чья фундаментальная группа не допускает эпиморфизм в группу $\mathbb{Z}$. Там же построены примеры не сопряженных диффеоморфизмов окружности, надстройки над которыми эквивалентны. В работе И. В. Голиковой и О. В. Починки рассмотрены надстройки над диффеоморфизмами окружностей и доказано, что полным инвариантом эквивалентности надстроек над сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами является равенство периодов периодических точек, порождающих их диффеоморфизмов. В то же время из результата А. Г. Майера известно, что для сопряженности сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов необходимым также является совпадение чисел вращения. В тоже время, надстройки над меняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены соотвествующие диффеоморфизмы окружностей. В работе С. Х. Зининой и П. И. Починки доказано, что надстройки над меняющими ориентацию декартовыми произведениями диффеоморфизмов окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены соответствующие диффеоморфизмы торов. В настоящей работе получен классификационный результат для надстроек над декартовыми произведениями сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружностей.

Ключевые слова: многообразие, надстройка над диффеоморфизмом, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности, число вращения, декартово произведение диффеоморфизмов

Для цитирования: Зинина С. Х., Ноздринов А. А., Шмуклер В. И. Надстройки над декартовыми произведениями сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 273–283. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.273-283

Об авторах:
Зинина Светлана Халиловна, старший преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, zininaskh@math.mrsu.ru

Ноздринов Алексей Александрович, аспирант, стажер-сследователь лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1223-7334, lex87@bk.ru
Шмуклер Валерия Ильинична, аспирант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3125-1825, shmukler9797@mail.ru

Original article

MSC2020 37D15

Superstructures over Cartesian products of orientation-preserving rough circle transformations

S. Kh. Zinina[1], A. A. Nozdrinov[2], V. I. Shmukler[2]

[1] *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*
[2] *Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. One of the constructions for obtaining flows on a manifold is building a superstructure over a cascade. In this case, the flow is non-singular, that is, it has no fixed points. C. Smale showed that superstructures over conjugate diffeomorphisms are topologically equivalent. The converse statement is not generally true, but under certain assumptions the conjugacy of diffeomorphisms is tantamount to equivalence of superstructures. Thus, J. Ikegami showed that the criterion works in the case when a diffeomorphism is given on a manifold whose fundamental group does not admit an epimorphism into the group $\mathbb{Z}$. He also constructed examples of non-conjugate diffeomorphisms of a circle whose superstructures are equivalent. In the work of I. V. Golikova and O. V. Pochinka superstructures over diffeomorphisms of circles are examined. It is also proven in this paper that the complete invariant of the equivalence of superstructures over orientation-preserving diffeomorphisms is the equality of periods for periodic points generating their diffeomorphisms. For the other side, it is known from the result of A.G. Mayer that the coincidence of rotation numbers is also necessary for conjugacy of orientation-preserving diffeomorphisms. At the same time, superstructures over orientation-changing diffeomorphisms of circles are equivalent if and only if the corresponding diffeomorphisms of circles are topologically conjugate. Work of S. Kh. Zinina and P. I. Pochinka proved that superstructures over orientation-changing Cartesian products of diffeomorphisms of circles are equivalent if and only if the corresponding diffeomorphisms of tori are topologically conjugate. In this paper a classification result is obtained for superstructures over Cartesian products of orientation-preserving diffeomorphisms of circles.

Keywords: manifold, superstructure over a diffeomorphism, orientation-preserving diffeomorphism of a circle, number of rotations, Cartesian product of diffeomorphisms

For citation: *S. Kh. Zinina, A. A. Nozdrinov, V. I. Shmukler.* Superstructures over Cartesian products of orientation-preserving rough circle transformations. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:4(2023), 273–283. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.273-283

About the authors:
Svetlana Kh. Zinina, Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X,zininaskh@math.mrsu.ru
Alexey A. Nozdrinov,Post-graduate student, Intern researcher at the Laboratory of Dynamic Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1223-7334, lex87@bk.ru
Valeria I. Shmukler, Post-graduate student, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3125-1825, shmukler9797@mail.ru

1. Декартово произведение сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности

1.1. Сохраняющие ориентацию грубые преобразования окружности

А. Г. Майером в рамках исследования грубости и типичности диффеоморфизмов окружности в работе [6] было доказанно, что класс грубых диффеоморфизмов совпадает с классом диффеоморфизмов имеющих конечное число периодических гиперболических точек, эти же диффеоморфизмы типичны в множестве всех диффеоморфизмов окружности. Приведем лишь классификационные результаты работы [6] для сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности.

Предложение 1.1. *Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности. Тогда*

1. *Множество $Per(f)$ состоит из $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) периодических орбит, каждая из которых имеет период k. Занумеруем периодические точки множества $Per(f)$: $p_0, p_1, ..., p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$, начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $f(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$ и $l \in \{1, ..., k-1\}$ для $k > 1$; числа (k, l) являются взаимно простыми. Заметим, что число l не зависит от выбора точки p_0 (см. Рис. 1.1).*
2. *Два диффеоморфизма f и f' с параметрами n, k, l и n', k', l', соответственно, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n'$ и $k = k'$ и либо $l = l'$ (если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию), либо $l = k' - l'$ (сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).*

Обозначим через $f_{n,k,l} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с параметрами n, k, l.

1.2. Декартовы произведения сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружностей

Обозначим через G класс диффеоморфизмов вида:

$$\phi = f_1 \times f_2 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2,$$

где $f_1 = f_{n_1,k_1,l_1}, f_2 = f_{n_2,k_2,l_2} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$— грубые сохраняющие ориентацию преобразования окружностей.

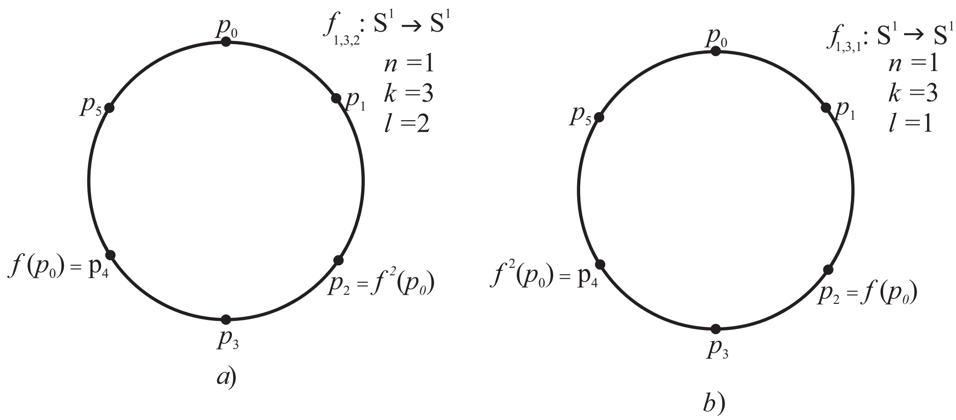

Рис. 1.1. Сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности:
a) диффеоморфизм $f_{1,3,2}$; b) диффеоморфизм $f_{1,3,1}$

Fig 1.1. Orientation-preserving diffeomorphisms of the circle:
a) diffeomorphism $f_{1,3,2}$; b) diffeomorphism $f_{1,3,1}$

Непосредственно из пункта 1) предложения 1 вытекают следующие свойства диффеоморфизмов данного класса.

Предложение 1.2. ([2], *теорема 1.1) Пусть ϕ и ϕ' — диффеоморфизмы из класса G. Тогда*

1. *Для любого диффеоморфизма ϕ множество $Per(\phi)$ состоит из $4n_1n_2k_1k_2$ периодических точек, из которых $2n_1n_2k_1k_2$ седловых, $n_1n_2k_1k_2$ стоковых и $n_1n_2k_1k_2$ источниковых. Все $4n_1n_2k_1k_2$ периодических точек имеют период $HOK(k_1; k_2)$.*

2. *Диффеоморфизмы ϕ и ϕ' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда диффеоморфизмы f_i, f'_i топологически сопряжены (с точностью до перенумерации компонент).*

2. Эквивалентность надстроек над сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей

Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M^n \to M^n$ и ξ^t — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$ такой, что $\xi^t(x, r) = (x, r + t)$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x, r) = (\phi(x), r - 1)$. Положим $G = \{g^k \ , k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_\phi = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_{_\phi} : M^n \times \mathbb{R} \to M_\phi$ естественную проекцию и через ϕ^t поток на многообразии M_ϕ, заданный формулой $\phi^t(x) = p_{_\phi}(\xi^t(p_{_\phi}^{-1}(x)))$. Поток ϕ^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* ϕ (см., например, Рис. 2.2).

Пусть $f = f_{n,k,l}$, $f' = f_{n',k',l'}$ и $f^t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ Настройка над f. Очевидно, что поток f^t имеет ровно n периодических орбит. В работе [1] доказанно, что f эквивалентно f' тогда и только тогда, когда $n = n'$. Для доказательства этого результата использовались известные ранее классификационные результаты изложенные в работах [7] и [5]. Для

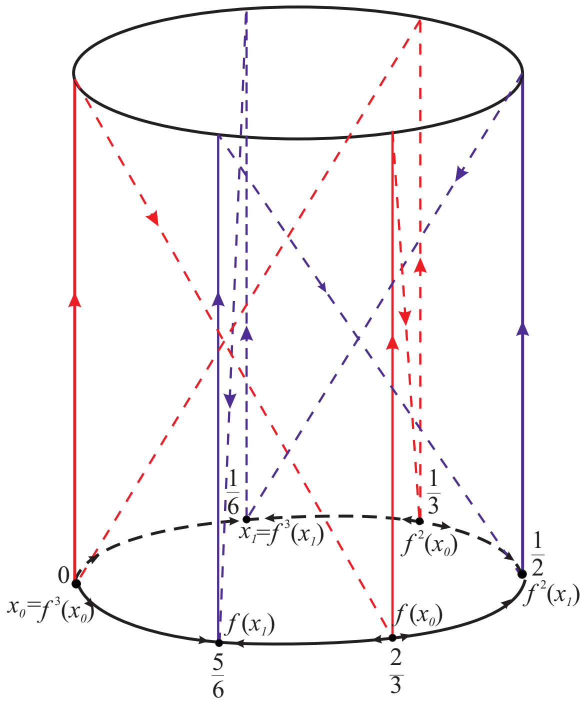

Рис. 2.2. Надстройка над диффеоморфизмом $f_{1,3,2}$

Fig 2.2. The superstructure over the diffeomorphism $f_{1,3,2}$

полноты изложения в данной работе мы приводим доказательство этого факта методом, допускающим многомерное обобщение.

Теорема 2.1. *Потоки f^t и $f'^t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = n'$.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть надстройки f^t и f'^t топологически эквивалентны. Значит существует гомеоморфизм, переводящий все орбиты потока f^t в орбиты потока f'^t, в том числе периодические в периодические. Тогда $n = n'$.

$\Leftarrow$ Пусть $n = n'$. Построим гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность потоков f^t и f'^t. Представим тор в виде

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times [0,1]/f,$$

пологая, что $(s,1) \sim (f(s),0), s \in \mathbb{S}^1$. Обозначим через $p_{_f} : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Положим $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Обозначим через $\pi : \Pi \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ – накрытие, определенное формулой

$$\pi(x,y) = (e^{i2\pi x}, y).$$

Положим $P_f = p_{_f} \circ \pi : \Pi \to \mathbb{T}^2$ и $L_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{l}{k}y\right\}$. Выберем образующие a и b, параллель и меридиан на торе $\mathbb{T}^2$ следующим образом (см. Рис. 2.3):

$$a = P_f(L_f) = \{e^{i2\pi y},\, y \in [0,1)\},\, b = P_f(Ox) = \{e^{i2\pi x},\, x \in [0,1)\}.$$

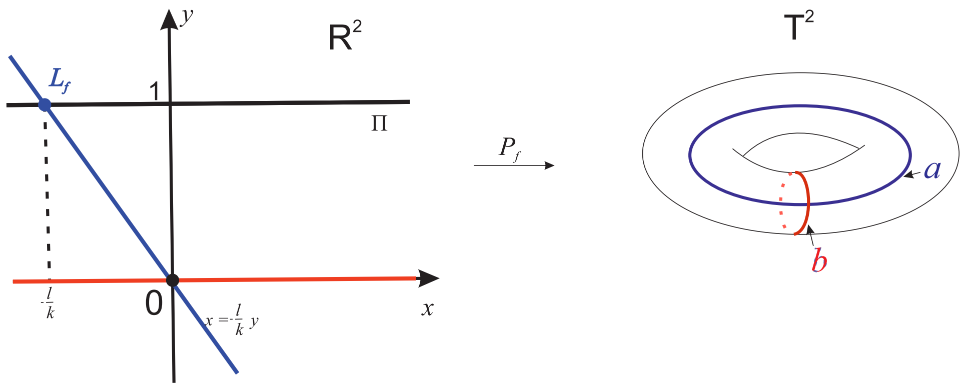

Рис. 2.3. Образующие на торе

Fig 2.3. Generators on the torus

Положим
$$z(x,y) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}) \in \mathbb{T}^2.$$

Тогда каждая периодическая орбита потока f^t является узлом на торе, имеющим гомотопический тип $\langle k,l\rangle$ в выбранной системе образующих. Из определения надстройки следует, что эти узлы являются существенными. Тогда существует алгебраический автоморфизм $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\varphi_*(\langle k,l\rangle) = \langle 1,0\rangle$ (см., например, [9]).

Рассмотрим поток $\tilde{f}^t = \varphi f^t \varphi^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Тогда его периодические траектории имеют гомотопический тип параллели $\langle 1,0\rangle$, а меридиан b является секущей к его траекториям, как и все узлы вида $b_{y_0} = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : y = y_0\}$. Тогда для каждого $y \in [0,1)$ корректно определен диффеоморфизм $\xi_y : b \to b_y$, ставящий в соответствие точке $z = (x,0) \in b$ первую точку пересечения $\xi_y(z)$ орбиты потока $\tilde{f}^t$, проходящей через точку z, с узлом b_y. Обозначим через $g_f : b \to b$ отображение Пуанкаре на меридиане (см. Рис 2.4). По построению оно является грубым преобразованием окружности с $2n$ неподвижными точками.

Аналогичные обозначения со штрихом введем для потока f'^t. В силу предложения 1.1, существует гомеоморфизм $\tilde{h} : b \to b$, сопрягающий отображения g_f и $g_{f'}$. Для любой точки $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ определим гомеоморфизм $\tilde{H} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ формулой
$$\tilde{H}(x,y) = \tilde{h}\xi'_y \xi_y^{-1}.$$

Тогда искомый гомеоморфизм h, осуществляющий эквивалентность потоков f^t, f'^t определяется формулой
$$h = \varphi' \tilde{H} \varphi.$$

Доказательство завершено.

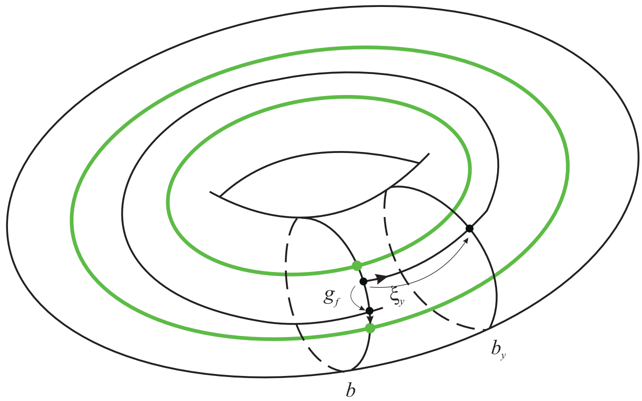

Рис. 2.4. Отображение Пуанкаре на меридиане

Fig 2.4. Poincare mapping on the meridian

3. Динамика надстроек над декартовым произведением грубых преобразований окружностей

Пусть $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ – надстройка над диффеоморфизмом $\phi = f_{n_1,k_1,l_1} \times f_{n_2,k_2,l_2} \in G$. Обозначим через n_{ϕ^t} число всех периодических орбит, через m_{ϕ^t} — число стоковых, через k_{ϕ^t} — источниковых, через l_{ϕ^t} — седловых орбит потока ϕ^t. Положим $N = n_1 n_2$, $K = k_1 k_2$, $\Delta =$ НОД(k_1, k_2).

Лемма 3.1. *Для любого потока $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ справедливо следующее:*

1. *Объемлющее многообразие гомеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$.*

2. *Число периодических орбит определяется формулами:*

$$n_{\phi^t} = 4N\Delta, l_{\phi^t} = 2N\Delta, m_{\phi^t} = N\Delta, k_{\phi^t} = N\Delta.$$

Доказательство.

1. По построению диффеоморфизм ϕ индуцирует изоморфизм фундаментальной группы, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 2.6 в [4], многообразие M_ϕ гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – тождественное отоброжение тора, заданное матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $(x,1) \sim (\varphi(x), 0)$. Таким образом M_ϕ гомеоморфно $\mathbb{T}^3$.

2. Непосредственно следует из предложения 1.2.

Доказательство завершено.

4. Эквивалентность надстроек над декартовым произведением окружностей

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Потоки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $n_i = n'_i$, $i = 1, 2$ (с точностью до перенумерации компонент) и $\Delta = \Delta'$.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть надстройки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны. Тогда, в силу леммы 3.1, существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, переводящий все орбиты потока ϕ^t в орбиты потока ϕ'^t, в том числе периодические в периодические. Откуда $N\Delta = N'\Delta'$. Из свойств гомеоморфизма, осуществляющего эквивалентность потоков следует, что гомеоморфизм h переводит замыкания инвариантных многообразий седловых орбит потока ϕ^t в аналогичные замыкания потока ϕ'^t с сохранением устойчивости. Все такие замыкания формируют два семейства торов (попарно непересекающихся внутри одного семейства), в каждом из которых $2n_1\Delta$, $2n_2\Delta$, $2n'_1\Delta'$, $2n'_2\Delta'$ компонент связности. Тогда с точностью до перенумерации

$$\begin{cases} n_1 n_2 \Delta = n'_1 n'_2 \Delta', \\ n_1 \Delta = n'_1 \Delta', \\ n_2 \Delta = n'_2 \Delta'. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \Delta = \Delta', \\ n_1 = n'_1, \\ n_2 = n'_2. \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Пусть

$$\begin{cases} \Delta = \Delta', \\ n_1 = n'_1, \\ n_2 = n'_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

для потоков ϕ^t, $\phi'^t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$. Построим гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность потоков ϕ^t и ϕ'^t. Представим тор в виде

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times [0, 1]/\phi,$$

полагая, что $(s, 1) \sim (\phi(s), 0)$, $s \in \mathbb{T}^1$. Обозначим через $p_{_\phi} : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{T}^3$ естественную проекцию. Положим $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Обозначим через $\pi : \Pi \to \to \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ – накрытие, определенное формулой

$$\pi(x, y) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}, z).$$

Положим $P_\phi = p_{_\phi} \circ \pi : \Pi \to \mathbb{T}^3$ и $L_\phi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{k_1}{l_1}x = \frac{k_2}{l_2}y = -z\right\}$. Выберем образующие a, b, c на торе $\mathbb{T}^3$ следующим образом:

$$a = P_\phi(L_\phi) = \{e^{i2\pi z},\ z \in [0, 1)\},$$

$$b = P_\phi(Ox) = \{e^{i2\pi x},\ x \in [0, 1)\},\ c = P_\phi(Oy) = \{e^{i2\pi y},\ y \in [0, 1)\}.$$

Положим

$$w(x, y, z) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}, e^{i2\pi z}) \in \mathbb{T}^3.$$

Тогда каждая периодическая орбита потока ϕ^t является узлом на торе, имеющим гомотопический тип $\left\langle \frac{l_1 k_2}{\Delta}, \frac{l_2 k_1}{\Delta}, \frac{k_1 k_2}{\Delta} \right\rangle$ в выбранной системе образующих. Из определения надстройки следует, что эти узлы являются существенными. Тогда существует алгебраический автоморфизм $\varphi : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ такой, что $\varphi_*\left(\langle \frac{l_1k_2}{\Delta}, \frac{l_2k_1}{\Delta}, \frac{k_1k_2}{\Delta}\rangle\right) = \langle 1,0,0\rangle$ (см., например, [9]).

Рассмотрим поток $\tilde{\phi}^t = \varphi\phi^t\varphi^{-1} : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$. Тогда его периодические траектории имеют гомотопический тип параллели $\langle 1,0,0\rangle$, а тор $B = P_\phi(Oxy)$ является секущей к его траекториям, как и все торы вида $B_{z_0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{T}^2 : z = z_0\}$. Тогда для каждого $z \in [0,1)$ корректно определен диффеоморфизм $\xi_z : B \to B_z$, ставящий в соответствие точке $w = (x,y,0) \in B$ первую точку пересечения $\xi_z(w)$ орбиты потока $\tilde{\phi}^t$, проходящей через точку w, с тором B_z. Обозначим через $g_\phi : B \to B$ отображение Пуанкаре на торе B. По построению оно является грубым преобразованием тора с $4N\Delta$ неподвижными точками. При этом неподвижные точки лежат на $2n_2$ $(2n_1)$ окружностях Σ_1 (Σ_2) следов торов, составленных из замыканий двумерных седловых многообразий параллельных осям Ox (Oy), и каждая пара окружностей из множеств Σ_1, Σ_2 пересекается в Δ точках (см. Рис. 4.5).

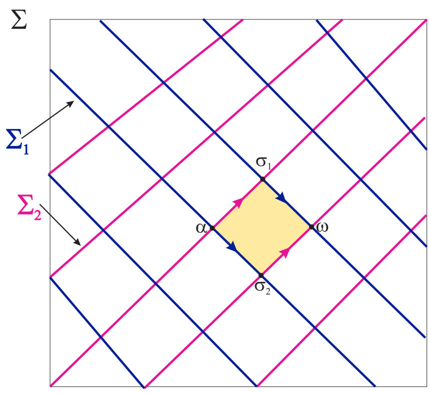

Рис. 4.5. Отображение последования на торе B

Fig 4.5. Sequence map on the torus B

Аналогичные обозначения со штрихом введем для потока ϕ'^t. Из условий 4.1 следует, что существует гомеоморфизм $\tilde{h} : B \to B$, сопрягающий отображения g_ϕ и $g_{\phi'}$. Для любой точки $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ определим гомеоморфизм $\tilde{H} : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ формулой

$$\tilde{H}(x,y) = \tilde{h}\xi'_z\xi_z^{-1}.$$

Тогда искомый гомеоморфизм h, осуществляющий эквивалентность потоков ϕ^t, ϕ'^t определяется формулой

$$h = \varphi'\tilde{H}\varphi.$$

Доказательство завершено.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке РНФ (грант № 23-71-30008).

Список литературы

1. Голикова И. В., Починка О. В. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности // Огарёв-Online. 2020. № 13. URL: https://journal.mrsu.ru/arts/nadstrojki-nad-grubymi-preobrazovaniyami-okruzhnosti (дата обращения: 10.09.2023).

2. Гуревич Е. Я., Зинина С. Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локальными прямыми произведениями // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1, С. 37–47.

3. Ikegami G. On classification of dynamical systems with cross-sections // Osaka Journal of Mathematics. 1969. Vol. 6, No. 2. P. 419–433.

4. Hatcher A. Notes on basic 3-manifold topology. 2007. 61 p.

5. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces // Arnold Mathematical Journal. 2018. Vol. 4, No. 3-4, P. 483–504. DOI: https://doi.org/10.1007/s40598-019-00103-0

6. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Учен. зап. ГГУ. 1939. № 12. С. 215–229.

7. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // Dynamical systems. 1973. P. 389–419.

8. Зинина С. Х., Починка П. И. Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 54–65. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.54-65

9. Rolfsen. D. Knots and links. Mathematics Lecture Series 7. Providence: AMS Chelsea Publ., 1990. 450 p.

10. Smale S. Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms // Ann. Scuola Norm. Sup. 1963. Vol. 17, No. 3. P. 97–116.

11. Smale S. Differentiate dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. P. 747–817. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8101-31

Поступила 05.08.2023; доработана после рецензирования 08.10.2023; принята к публикации 09.11.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. I. V. Golikova, O. V. Pochinka, “Suspension over rough circle transformations”, *Ogarev-Online*, 2020, no. 13 (In Russ.).

2. E. Ya. Gurevich, S. H. Kapkaeva, “On topological classification of gradient-like systems on surfaces, that are locally direct product”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **17**:1 (2015), 37–47 (In Russ.).

3. G. Ikegami, “On classification of dynamical systems with cross-sections”, *Osaka Journal of Mathematics*, **6**:2 (1969), 419–433.

4. A. Hatcher, “Notes on basic 3-manifold topology”, 2007, 61 p.

5. V. Kruglov, D. Malyshev, O. Pochinka, “On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces”, *Arnold Mathematical Journal*, **4**:3-4 (2018), 483—504. DOI: https://doi.org/10.1007/s40598-019-00103-0

6. A. G. Mayer, “Rough transformation of a circle into a circle”, *Scientific notes of Gorky State University*, 1939, no. 12, 215–229 (In Russ.).

7. M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389–419.

8. S. Kh. Zinina, P. I. Pochinka, “Classification of suspensions over cartesian products of orientation-reversing diffeomorphisms of a circle”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **24**:1 (2022), 54–65 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.24.202201.54-65

9. D. Rolfsen, “Knots and links”, *Mathematics Lecture Series 7*, 1990.

10. S. Smale, “Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **17**:3 (1963), 97–116.

11. S. Smale, “Differentiate dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8101-31

Submitted 05.08.2023; Revised 08.10.2023; Accepted 09.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.