DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.242-254 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

Оценка константы Лебега для Чебышевского распределения узлов

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Архангельск, Российская Федерация)

Аннотация. В данной работе предлагается подход к получению оценки константы Лебега для интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в нулях многочленов Чебышева первого рода. Двусторонняя оценка этой константы осуществлена с использованием логарифмической производной от гамма-функции Эйлера и дзета-функции Римана. Выбор узлов интерполирования обусловлен тем, что в этом случае при фиксированном числе узлов Чебышева постоянная Лебега стремится к своему минимальному значению, уменьшая погрешность алгебраического интерполирования и обеспечивая меньшую чувствительность по отношению к ошибкам округления. Выражения для верхней и нижней границ этой постоянной представлены в виде конечных сумм асимптотического знакочередующегося ряда. На основе полученных выражений вычисляются значения этих границ в зависимости от числа узлов интерполяционного процесса и проводится оценка погрешности найденных значений для каждой из границ на основе первого отброшенного слагаемого в конечных суммах асимптотического ряда. Результаты выполненных расчетов представлены в таблицах, в которых приведены отклонения величины константы Лебега от нижней и верхней границ ее оценки, а также погрешности найденных значений в зависимости от числа узлов Чебышева. С использованием численных методов показано, что с увеличением числа этих узлов происходит быстрое сближение значений границ полученной двусторонней оценки для постоянной Лебега. Представленные результаты могут быть использованы в теории интерполяции для оценки нормы оператора, сопоставляющего функции ее интерполяционный полином, и оценки отклонения построенного возмущенного полинома от невозмущенного.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, узлы Чебышева, постоянная Лебега

Для цитирования: Гермидер О. В., Попов В. Н. Оценка константы Лебега для Чебышевского распределения узлов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 242–254. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.242-254

Об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 4), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

Original article

MSC2020 35Q20

Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution of nodes

O. V. Germider, V. N. Popov

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov

Abstract. In this paper an approach to estimation of the Lebesgue constant for the Lagrange interpolation process with nodes in the zeros of Chebyshev polynomials of the first kind is done. Two-sided estimation of this constant is carried out by using the logarithmic derivative of the Euler gamma function and of the Riemann zeta function. The choice of interpolation nodes is due to the fact that with a fixed number of Chebyshev nodes, the Lebesgue constant tends to its minimum value, thus reducing the error of algebraic interpolation and providing less sensitivity to rounding errors. The expressions for the upper and the lower bounds of this constant are represented as finite sums of an asymptotic alternating series. Based on the expressions obtained, these boundaries are calculated depending on the number of nodes of the interpolation process. The error of each of the boundaries' value is estimated based on the first discarded term in the corresponding asymptotic series. The results of the calculations are presented in tables showing deviations of the Lebesgue constant from its lower and upper estimated bounds. Dependence of the values' errors on the number of Chebyshev nodes is depicted in these tables as well. It is numerically shown that with an increase in the number of these nodes, the estimation boundaries rapidly get close to each other. The presented results can be used in the theory of interpolation to estimate the norm of the operator matching a function to its interpolation polynomial and to estimate a deviation of the constructed perturbed polynomial from the unperturbed one.

Keywords: polynomial approximation, Chebyshev nodes, Lebesgue constant

For citation: *O. V. Germider, V. N. Popov.* Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution of nodes. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:4(2023), 242–254. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.242-254

About the authors:

Oksana Vladimirovna Germider, associate Professor of the Department of Engineering Structures, Architecture and Graphics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), Ph.D., ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, o.germider@narfu.ru

Vasily Nikolaevich Popov, Professor, Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

1. Введение

Интерполяция Лагранжа – это классический метод аппроксимации непрерывной на отрезке функции полиномом, значения которого совпадают со значениями интерполируемой функции в некоторых фиксированных точках отрезка, называемых узлами интерполяции [1].

Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f = f(x)$ задана своими значениями f_0, f_1, $\ldots$, f_n в точках x_0, x_1, $\ldots$, x_n. Тогда интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x), \tag{1.1}$$

где $l_k(x)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = \overline{0, n}. \tag{1.2}$$

В случае, когда в узлах интерполяции вычислены приближенные значения $\tilde{f}_k$ функции f с погрешностью, не превышающей величины $\delta > 0$: $|f_k - \tilde{f}_k| < \delta$, то отклонение построенного возмущенного полинома $\tilde{p}_n(x)$ от $p_n(x)$ можно оценить следующим образом:

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| = |\sum_{k=0}^{n}(f_k - \tilde{f}_k) l_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k - \tilde{f}_k||l_k(x)| \leq \delta \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)| =$$
$$= \delta\lambda_n(x) \leq \delta\Lambda_n. \tag{1.3}$$

Здесь $\lambda_n(x)$ и Λ_n – функция и константа Лебега для заданного множества узлов интерполяции $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$:

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|, \tag{1.4}$$

$$\Lambda_n = \max_{x\in[a,\, b]} \lambda_n(x) = \max_{x\in[a,\, b]} \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|. \tag{1.5}$$

Как отмечено в [2], константа Лебега относится к основным характеристикам интерполяционного процесса. Ее значение показывает, во сколько раз возрастает погрешность вычисления интерполяционного полинома Лагранжа по сравнению с погрешностью вычисления функции. Кроме того оценка сверху для константы Лебега позволяет провести анализ скорости приближения непрерывной функции интерполяционными многочленами [1]. Следует заметить, что Λ_n существенно зависит от взаимного расположения узлов интерполяции и ее поведение с увеличением числа узлов может иметь различный характер [1]–[6].

Обозначим

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{1.6}$$

Учитывая, что $\omega'_{n,x}(x_k) = \prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)$, базис Лагранжа (1.2) для Ω_n можно представить в виде

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_{n,x}(x_k)}, \quad k = \overline{0, n}, \tag{1.7}$$

соответственно, перепишем выражение для константы Лебега (1.5) как

$$\Lambda_n = \max_{x\in[a,\, b]} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega'_{n,x}(x_k)} \right|. \tag{1.8}$$

Для того чтобы равномерная норма полинома $\omega_n(x)$ имела минимальное значение на отрезке $[-1, 1]$, в качестве узлов интерполяции выберем нули полинома Чебышева степени $n+1$ [1]:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}\right), \quad k = \overline{0, n}. \tag{1.9}$$

Не нарушая общности ограничимся случаем, когда $x \in [-1,\, 1]$, поскольку

$$u = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad u \in [a,\, b],\ x \in [-1,\, 1],$$

В силу единственности существования интерполяционного многочлена Лагранжа на множестве Ω_n и того факта, что коэффициент при x^{n+1} равен 2^n [7], получаем

$$\omega_n(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x). \tag{1.10}$$

Полагая

$$x = \cos t, \quad x_k = \cos t_k, \quad t_k = \frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0, n}, \tag{1.11}$$

имеем

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)t, \quad T'_{n+1,x}(x_k) = \frac{(n+1)\sin((n+1)t_k)}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^k(n+1)}{\sin t_k}. \tag{1.12}$$

Подставляя (1.10) с учетом (1.12) в (1.8), получаем

$$\Lambda_n = \max_{t\in[0,\, \pi]} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\cos(n+1)t \sin t_k}{(n+1)(\cos t - \cos t_k)} \right|. \tag{1.13}$$

В [1], [8] показано, что функция Лебега

$$\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\cos(n+1)t \sin t_k}{(n+1)(\cos t - \cos t_k)} \right|, \tag{1.14}$$

на отрезке $[0,\, \pi]$ принимает свое наибольшее значение при $t = 0$. Тогда

$$\Lambda_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_k}{2}\right). \tag{1.15}$$

Вычислению константы Лебега на основе (1.15) и посвящена представленная работа. Выбор нулей полинома Чебышева в качестве узлов интерполяции обусловлен сохранением устойчивости к ошибкам округления приближения интерполяционным полиномом.

2. Вычисление константы Лебега

Разложим функцию $\operatorname{ctg} t$ в ряд Маклорена на $(0, \pi/2)$ [9]

$$\operatorname{ctg} t = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i-1} t^{2i-1}, \tag{2.1}$$

где c_{2i-1} выражаются через числа Бернулли B_{2i} как

$$c_0 = 1, \quad c_{2i-1} = -\frac{2^{2i}|B_{2i}|}{(2i)!}, \quad i \geq 1. \tag{2.2}$$

Для нахождения чисел Бернулли в (2.2) применяем рекуррентную формулу [10]

$$\frac{B_1}{(2i)!} + \sum_{j=0}^{i} \frac{B_{2j}}{(2(i-j)+1)!(2j)!} = 0,\ B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}, i \geq 1. \tag{2.3}$$

В результате

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}|B_{2i}|}{(2i)!} t^{2i-1}. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (1.15), получаем

$$\Lambda_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^{-1} + R_{1,n}, \tag{2.5}$$

$$R_{1,n} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i-1}|B_{2i}|4^{1-i}}{(n+1)^{2i}(2i)!} \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^{2i-1}. \tag{2.6}$$

Оценим первый член ряда (2.5). Обозначим

$$F_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^{-1}. \tag{2.7}$$

Применяя свойство функции $\Psi(x) = \dfrac{\mathrm{d} \ln \Gamma(x)}{\mathrm{d}x}$ [11]

$$\Psi(1+x) = \Psi(x) + \frac{1}{x}, \tag{2.8}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, перепишем выражение (2.7) в виде

$$2F_{0,n} = \Psi\left(n+1+\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right). \tag{2.9}$$

Воспользовавшись формулой [12], для вычисления значения $\Psi(1/2)$

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \cos\left(\frac{2\pi pk}{q}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \ln(2q) - \gamma, \tag{2.10}$$

где $[q/2]$ – целая часть $q/2$, q и p – натуральные числа и $p < q$. Находим значение $\Psi(1/2)$:

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2. \tag{2.11}$$

Учитывая выражение Бине [10]

$$\Psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\exp(-tx)\mathrm{d}t, \tag{2.12}$$

и разложение в ряд Маклорена подынтегральной функции, стоящей в скобках [10]

$$\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i}t^{2i-1}}{(2i)!}, \tag{2.13}$$

получаем

$$\Psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} B_{2i}\frac{1}{ix^{2i}} - \\ - \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{B_{2i}t^{2i-1}}{(2i)!}\right)\exp(-tx)\mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_{2i}x^{-2i}i^{-1}$ является знакочередующимся и асимптотическим, поэтому ограничиваем суммирование на члене ряда с индексом q, за которым последующие начинают неограниченно расти. Найдем q из неравенства

$$\frac{|B_{2(q+1)}|qx^{2q}}{|B_{2q}|(q+1)x^{2(q+1)}} \leq 1. \tag{2.15}$$

Учитывая, что числа Бернулли через дзета-функцию Римана $\zeta(x)$ выражаются как

$$|B_{2i}| = \frac{2\zeta(2i)(2i)!}{(2\pi)^{2i}}, \quad i \geq 1, \tag{2.16}$$

имеем

$$\frac{|B_{2(q+1)}|qx^{2q}}{|B_{2q}|(q+1)x^{2(q+1)}} = \frac{\zeta(2(q+1))2q(2q-1)x^{2q}}{(2\pi)^2\zeta(2q)x^{2(q+1)}}. \tag{2.17}$$

Учитывая, что $\zeta(2(q+1))/\zeta(2q) \leq 1$, при $x = \frac{1}{2}+n+1$ $(n \geq 1)$ получаем

$$\frac{2q(2q-1)\left(\frac{1}{2}+n+1\right)^{2q}}{(2\pi)^2\left(\frac{1}{2}+n+1\right)^{2(q+1)}} \leq 1.$$

Откуда

$$q_n = \left[\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{16\pi^2\left(\frac{1}{2}+n+1\right)^2+1}\right)\right], \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует, что значение q_n увеличивается с ростом n.

Поскольку $B_{2i} = (-1)^{i+1}|B_{2i}|$ $(i \geq 1)$, а при $n = 1$ значение q_n равно 8, то для любого $x = \frac{1}{2} + n + 1$ $(n \geq 1)$ имеем следующую оценку

$$\Psi_{n,0} + \Psi_{n,2m_1-1} \leq \Psi\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) \leq \Psi_{n,0} + \Psi_{n,2m_1},\ 2 \leq 2m_1 \leq q_n, \tag{2.19}$$

где

$$\Psi_{n,0} = -\ln(2) + \ln(3+2n) - \frac{1}{3+2n},$$

$$\Psi_{n,l} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{2} + n + 1\right)^{-2i}\frac{B_{2i}}{i}. \tag{2.20}$$

Подставляя (2.11) и (2.19) в (2.9), имеем

$$F^*_{0,n} + \frac{1}{2}\Psi_{n,2m-1} \leq F_{0,n} \leq F^*_{0,n} + \frac{1}{2}\Psi_{n,2m}, \tag{2.21}$$

$$F^*_{0,n} = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(3+2n) - \frac{1}{2(3+2n)}. \tag{2.22}$$

Для нахождения членов с $i \geq 1$ в (2.6) введем обозначения

$$F_{2i-1,n} = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^{2i-1}, \tag{2.23}$$

$$\hat{s}_{j,n} = \sum_{k=1}^{n}k^j, \quad j = 2i-1. \tag{2.24}$$

Тогда

$$F_{2i-1,n} = \hat{s}_{j,2(n+1)} - 2^j\hat{s}_{j,n+1}. \tag{2.25}$$

Применяя к (2.25) формулу [13]

$$\hat{s}_{j,n-1} = j!\sum_{k=0}^{j}\frac{B_k n^{j+1-k}}{k!(j+1-k)!}, \tag{2.26}$$

с учетом $B_{2k+1} = 0$ $(k \geq 1)$ имеем

$$F_{2i-1,n} = \frac{(2i)!4^{i-1}}{i}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{B_{2k}(n+1)^{2i-2k}\left(2^{1-2k}-1\right)}{(2k)!(2i-2k)!}. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.23) и (2.27) в (2.6), приходим к следующему выражению для $R_{1,n}$:

$$R_{1,n} = -\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{B_{2k}\left(2^{1-2k}-1\right)}{(n+1)^{2k}(2k)!(2i-2k)!} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(1-2^{1-2j})}{(n+1)^{2j}(2j)!}\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{|B_{2i}|\pi^{2i}\prod_{q=1}^{2j-1}(2i-q)}{(2i)!}. \tag{2.28}$$

Интегрируя (2.4) по t и подставляя значение $t = \pi/2$, получаем

$$\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!}.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!} = 2\ln\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.29}$$

Последовательно дифференцируя (2.4) $2j-1$ раз по t ($j \geq 1$), находим

$$\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{|B_{2i}|\pi^{2i}\prod\limits_{q=1}^{2j-1}(2i-q)}{(2i)!} =$$

$$= -\left(\mathrm{ctg}^{(2j-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2^{2j-1}|B_{2j}|}{j}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} - (2j-1)!. \tag{2.30}$$

Для получения значений производных функции $\mathrm{ctg}\, t$ в точке $\pi/2$ воспользуемся ее разложением в ряд Фурье

$$\mathrm{ctg}\, t = \frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\pi i} + \frac{1}{t+\pi i}\right), \quad 0 < t < \pi. \tag{2.31}$$

Последовательно дифференцируя (2.31) по t, получаем

$$\mathrm{ctg}^{(2j-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(1-2^{2j})2^{2j-1}}{j}|B_{2j}|, \qquad j \geq 1. \tag{2.32}$$

Подставляя (2.29) и (2.30) в (2.28) и учитывая (2.32), имеем

$$R_{1,n} = -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(1-2^{1-2j})}{j(n+1)^{2j}}\left(\frac{\pi^{2j}(2^{2j}-2)|B_{2j}|}{(2j)!} - 1\right). \tag{2.33}$$

Ряд (2.33) является знакочередующимся и асимптотическим. Используя (2.16), восстанавливаем предельное значение j

$$j_n = \left[\frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{16\pi^2\left(n+1\right)^2 + 1}\right)\right] - 1. \tag{2.34}$$

Из (2.34) следует, что для $n = 1$ значение j_n равно 6 и увеличивается с ростом n.

Подставляя (2.7) и (2.33) в (2.5) и учитывая (2.20)-(2.22), окончательно приходим к следующей оценке для Λ_n

$$m_n \leq \Lambda_n \leq M_n, \tag{2.35}$$

$$m_n = m_n^* - \frac{2^{4l+2}B_{4l+2}}{\pi(2l+1)(2n+3)^{4l+2}}, \tag{2.36}$$

$$M_n = m_n^* + \frac{B_{4l+2}}{(2l+1)\pi}\left(\frac{(1-2^{-1-4l})}{(n+1)^{4l+2}}\left(\frac{\pi^{4l+2}(2^{4l+2}-2)|B_{4l+2}|}{(4l+2)!} - 1\right)\right), \tag{2.37}$$

$$m_n^* = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) + \ln(3+2n) - \frac{1}{3+2n}\right) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2l}\frac{B_{2j}}{j}\left(\frac{(1-2^{1-2j})}{(n+1)^{2j}}\left(\frac{\pi^{2j}(2^{2j}-2)|B_{2j}|}{(2j)!}-1\right)-\frac{2^{2j}}{(2n+3)^{2j}}\right), \quad 2l-1<j_n. \quad (2.38)$$

3. Анализ полученных результатов

Проведем сравнение двусторонней оценки (2.35) со значениями самой константы Лебега (1.15), а также с аналогичными результатами, представленными в [3], [5] и [14].

Согласно [5] константа Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по узлам Чебышева имеет следующую оценку [3], [5]:

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) + \ln(1+n)\right) + \alpha_n, \quad (3.1)$$

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{72(n+1)^2}. \quad (3.2)$$

В [14] получено асимптотическое представление Λ_n:

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) + \ln(1+n)\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{(n+1)^{2i}}, \quad (3.3)$$

где коэффициенты A_i находятся как [3], [14]

$$A_i = \frac{4\cdot(-1)^{i-1}(1-2^{1-2i})(2i-1)!\zeta(2i)}{\pi(2\pi)^{2i}}\left(1+\sum_{j=1+i}^{\infty}\frac{(2j-1)!\zeta(2j)}{(2j-2i)!(2i-1)!2^{2j-1}}\right). \quad (3.4)$$

В таблице 3.1 представлены результаты вычислений отклонений величины Λ_n от нижней и верхней границ ее оценки (2.35) при различных значениях n. Расчеты выполнены на основании (2.36)-(2.38) при $l = 1$. Там же приведены соответствующие значения отклонений, восстановленные по формулам (3.1)-(3.4). При использовании (3.3) и (3.4) суммирование в (3.3) ограничено $i = 1$ для верхней границы и $i = 2$ для нижней границы, в (3.4) – значением $j = (i+1) + 10$.

Таблица 3.1. Значения $\Lambda_n - m_n$ и $M_n - \Lambda_n$ в зависимости от n
Table 3.1. Values of $\Lambda_n - m_n$ and $M_n - \Lambda_n$ depending on n

n	$\Lambda_n - m_n$			$M_n - \Lambda_n$		
	(2.34)	[5]	[14]	(2.34)	[5]	[14]
1	$3.1\cdot10^{-5}$	$1.0\cdot10^{-2}$	$6.1\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$4.9\cdot10^{-4}$	$4.9\cdot10^{-4}$
5	$5.0\cdot10^{-8}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$1.0\cdot10^{-7}$	$3.4\cdot10^{-8}$	$6.7\cdot10^{-6}$	$6.7\cdot10^{-6}$
10	$1.3\cdot10^{-9}$	$3.6\cdot10^{-4}$	$2.9\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-9}$	$6.0\cdot10^{-7}$	$6.0\cdot10^{-7}$
15	$1.4\cdot10^{-10}$	$1.7\cdot10^{-4}$	$3.9\cdot10^{-10}$	$1.3\cdot10^{-10}$	$1.3\cdot10^{-7}$	$1.3\cdot10^{-7}$
20	$2.8\cdot10^{-11}$	$9.9\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-10}$	$2.6\cdot10^{-11}$	$4.5\cdot10^{-8}$	$4.5\cdot10^{-8}$
30	$2.7\cdot10^{-12}$	$4.5\cdot10^{-5}$	$3.3\cdot10^{-11}$	$2.6\cdot10^{-12}$	$9.5\cdot10^{-9}$	$9.5\cdot10^{-9}$

Для оценки погрешности полученных значений границ от Λ_n обозначим через $r_{l,n}$ первое отброшенное слагаемое в сумме (2.36), и через $\mathcal{R}_{l,n}$ – в (2.37). Тогда

$$r_{l,n} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{B_{4l+2}}{2l+1}\left(\frac{(1-2^{-1-4l})}{(n+1)^{4l+2}}\left(\frac{\pi^{4l+2}(2^{4l+2}-2)|B_{4l+2}|}{(4l+2)!}-1\right)\right)- -\frac{2^{4l+4}B_{4l+4}}{(2l+2)(2n+3)^{4l+4}}\right), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{R}_{l,n} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{B_{4(l+1)}}{2l+2}\left(\frac{(1-2^{-3-4l})}{(n+1)^{4(l+1)}}\left(\frac{\pi^{4(l+1)}(2^{4(l+1)}-2)|B_{4(l+1)}|}{(4l+4)!}-1\right)\right)- -\frac{2^{4l+2}B_{4l+2}}{(2l+1)(2n+3)^{4l+2}}\right). \quad (3.6)$$

Значения $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$ приведены таблице 3.2 при различных значениях n.

Таблица 3.2. Значения $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$ в зависимости от n
Table 3.2. Values of $r_{1,n}$ and $\mathcal{R}_{1,n}$ depending on n

n	$r_{1,n}$	$\mathcal{R}_{1,n}$
1	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$-2.1 \cdot 10^{-5}$
5	$5.2 \cdot 10^{-8}$	$-3.5 \cdot 10^{-8}$
10	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$-1.1 \cdot 10^{-9}$
15	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$-1.3 \cdot 10^{-10}$
20	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$-2.6 \cdot 10^{-11}$
30	$2.7 \cdot 10^{-12}$	$-2.6 \cdot 10^{-12}$

Из таблиц 3.1 и 3.2 видно, что $\Lambda_n - m_n$ и $M_n - \Lambda_n$ не превосходят по абсолютной величине $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$, соответственно.

4. Заключение

В работе получена двусторонняя оценка константы Лебега для случая узловых точек, которые являются корнями полиномов Чебышева первого рода. Выражения для верхней и нижней границ оценки представлены в виде суммы членов усеченного асимптотического знакочередующегося ряда с использованием свойств логарифмической производной от гаммы-функции Эйлера и дзета-функции Римана. Проведен анализ полученных выражений. В зависимости от числа узлов интерполяционного процесса найдены предельные значения для индекса суммирования в усеченном асимптотическом ряде. Записаны формулы оценки погрешности вычисления константы Лебега.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 "Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики"

Список литературы

1. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Кн. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 230 с.
2. Ким В. А. Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных L-сплайнов третьего порядка // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341. DOI: https://doi.org/10.1007/s11202-010-0026-3
3. Ibrahimoğlu B. A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // Journal of Inequalities and Applications. 2016. Vol. 93. pp. 1–15. DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3
4. Brutman L. On the Lebesgue function for polynomial interpolation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1978. Vol. 15, Issue 4. pp. 694–704. DOI: https://doi.org/10.1137/0715046
5. Gunttner R. Evaluation of Lebesgue constants // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1980. Vol. 17, Issue 4. pp. 512–520. DOI: https://doi.org/10.1137/0717043
6. Gunttner R. Note on the lower estimate of optimal Lebesgue constants // Acta Mathematica Hungarica. 1994. Vol. 65, Issue 4. pp. 313–317. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01876033
7. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. NY: Chapman and Hall/CRC, 2002. 360 p.
8. Powell M. J. D. On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria // The Computer Journal. 1967. Vol. 9. pp. 404–407. DOI: https://doi.org/10.1093/COMJNL/9.4.404
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.
11. Espinosa O., Moll V. A generalized polygamma function // Integral Transforms and Special Functions. 2004. Vol. 15, Issue 2. pp. 101–115. DOI: https://doi.org/10.1080/10652460310001600573
12. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
13. Sherwood H. Sums of power of integers and Bernoulli numbers // The Mathematical Gazette. 1970. Vol. 54. pp. 272–274.
14. Dzjadik V. K., Ivanov V. V. On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points // Analysis Mathematica. 1983. Vol. 9, Issue 2. pp. 85–97. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01982005

Поступила 03.09.2023; доработана после рецензирования 02.10.2023; принята к публикации 24.11.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. A. Privalov, *Theory of interpolation of functions. Book 1*, Saratov University Publ., Saratov, 1990 (In Russ.), 230 p.
2. V. A. Kim, “Sharp Lebesgue constants for bounded cubic interpolation L-splines”, *Sib. Math. J.*, **51**:2 (2010), 267—276. DOI: https://doi.org/10.1007/s11202-010-0026-3
3. B. A. Ibrahimoğlu, “Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation”, *Journal of Inequalities and Applications*, **93** (2016), 1-15. DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3
4. L. Brutman, “On the Lebesgue function for polynomial interpolation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**:4 (1978), 694–704. DOI: https://doi.org/10.1137/0715046
5. R. Gunttner, “Evaluation of Lebesgue constants”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **17**:4 (1980), 512–520. DOI: https://doi.org/10.1137/0717043
6. R. Gunttner, “Note on the lower estimate of optimal Lebesgue constants”, *Acta Math. Hungar.*, **65**:4 (1994), 313–317. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01876033
7. J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2002, 360 p.
8. M. J. D. Powell, “On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria”, *Comput. J.*, **9** (1967), 404–407. DOI: https://doi.org/10.1093/COMJNL/9.4.404
9. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards (NBS), Washington, 1964, 1060 p.
10. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953, 342 p.
11. O. Espinosa, V. Moll, “A generalized polygamma function”, *Integral Transforms and Special Functions*, **15**:2 (2004), 101–115. DOI: https://doi.org/10.1080/10652460310001600573
12. Y. Luke, *Mathematical functions and their approximations*, Academic Press, Moscow, 1975, 608 p.
13. H. Sherwood, “Sums of power of integers and Bernoulli numbers”, *The Mathematical Gazette*, **54** (1970), 272–274.
14. V. K. Dzjadik, V. V. Ivanov, “On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points”, *Anal. Math.*, **9**:2 (1983), 85–97. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01982005

Submitted 03.09.2023; Revised 02.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.