Математика

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.111-122 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением при производной

Е. В. Десяев, П. А. Шаманаев

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. В банаховом пространстве методами теории ветвления построено периодическое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с малым возмущением при производной (возмущенное уравнение). При условии наличия полного обобщенного жорданова набора доказана единственность этого периодического решения. Показано, что при равенстве нулю малого параметра и при выполнении некоторых условий периодическое решение возмущенного уравнения переходит в семейство периодических решений невозмущенного уравнения. Результат получен с помощью представления возмущенного уравнения в виде операторного уравнения в банаховом пространстве и применения теории обобщенных жордановых наборов и модифицированного метода Ляпунова-Шмидта, сводящий исходную задачу к исследованию разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве. При этом разрешающая система распадается на две неоднородные системы линейных алгебраических уравнений, которые при $\varepsilon \neq 0$ имеют единственные решения, а при $\varepsilon = 0$ – $2n$-параметрические семейства вещественных решений, соответственно.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, малый параметр при производной, модифицированный метод Ляпунова-Шмидта, обобщенные жордановы наборы, разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

Для цитирования: Десяев Е. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением при производной // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 111–122. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.111-122

Об авторах:

Десяев Евгений Васильевич, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2583-6966, desyaev@rambler.ru

Шаманаев Павел Анатольевич, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

Original article

MSC2020 34G10

On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation at the derivative

E. V. Desyaev, P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. In a Banach space, using branching theory methods, a periodic solution of a linear inhomogeneous differential equation with a small perturbation at the derivative (perturbed equation) is constructed. Under the condition of presence of a complete generalized Jordan set, the uniqueness of this periodic solution is proven. It is shown that when a small parameter is equal to zero and certain conditions are met, the periodic solution of the perturbed equation transforms into the family of periodic solutions of the unperturbed equation. The result is obtained by representing the perturbed equation as an operator equation in Banach space and applying the theory of generalized Jordan sets and modified Lyapunov-Schmidt method. As is known, the latter method reduces the original problem to study of the Lyapunov-Schmidt resolving system in the root subspace. In this case, the resolving system splits into two inhomogeneous systems of linear algebraic equations, that have unique solutions at $\varepsilon \neq 0$, and $2n$-parameter families of real solutions at $\varepsilon = 0$, respectively.

Keywords: differential equations in Banach spaces, small parameter at the derivative, modified Lyapunov-Schmidt method, generalized Jordan sets, Lyapunov-Schmidt resolving system in the root subspace

For citation: *E. V. Desyaev, P. A. Shamanaev.* On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation at the derivative. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:3(2023), 111–122. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.111-122

About the authors:

Evgeniy V. Desyaev, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2583-6966, desyaev@rambler.ru

Pavel A. Shamanaev, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

1. Введение

Основные положения теории ветвления были заложены в работах [1–2]. В дальнейшем эти подходы были распространены на уравнения в банаховых пространствах и получили названия методы Ляпунова-Шмидта [3]. Этим методам посвящено большое количество работ [4–8]. Наиболее полный обзор по методам Ляпунова-Шмидта содержится в [9].

В настоящей работе метод Ляпунова-Шмидта применяется для нахождения периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением при производной в банаховом пространстве.

2. Постановка задачи

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$(A_0+\varepsilon A_1)\,\frac{dx}{dt}=B_0x-f(t), \tag{2.1}$$

где $x\in E_1$, A_0, A_1 и B_0 - плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, причем A_0 – вырожденный или тождественный оператор, функция $f\in E_2$ непрерывна и периодична $f(t+T)=f(t)$, $T>0$, ε – малый вещественный параметр. Предполагается, что операторы $A_0: E_1\supset D_{A_0}\to E_2$ и $B_0\colon E_1\supset D_{B_0}\to E_2$ не имеют общих нуль-элементов, а также выполнены условия: $D_{B_0}\subset D_{A_0}$ и A_0 подчинен B_0, т. е. $\|A_0x\|\leqslant\|B_0x\|+\|x\|$ на D_{B_0} или $D_{A_0}\subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A_0, т. е. $\|B_0x\|\leqslant\|A_0x\|+\|x\|$ на D_{A_0}, что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам [3].

Пусть $\sigma^0_{A_0}(B_0)$ – A_0-спектр оператора B_0, лежащий на мнимой оси и состоящий из конечного числа ненулевых точек $\pm i\alpha_\sigma$, $\alpha_\sigma=\alpha m_\sigma$, $\alpha=\frac{2\pi}{T}$, $\sigma=\overline{1,r}$, где m_σ – натуральные числа без нетривиальных общих делителей. Пусть далее числу $i\alpha_\sigma$ отвечает n_σ A_0-собственных элементов u_{k_σ}, то есть $B_0u_{k_\sigma}=i\alpha_\sigma A_0u_{k_\sigma}$, $k_\sigma\in N_\sigma$, $\sigma=\overline{1,r}$. Здесь $N_1=\{1,2,\dots,n_1\}$, $N_2=\{n_1+1,\dots,n_1+n_2\}$, ..., $N_r=\{n_1+\dots+n_{r-1}+1,\dots,n\}$. $n=n_1+\dots+n_r$. Следовательно A_0-собственными элементами, отвечающими соответствующим числам $-i\alpha_\sigma$, будут $\bar u_{k_\sigma}$, то есть $B_0\overline{u}_{k_\sigma}=-i\alpha_\sigma A_0\overline{u}_{k_\sigma}$, $k_\sigma\in N_\sigma$, $\sigma=\overline{1,r}$. Аналогично для A_0^*-собственных элементов v_{k_σ} и $\overline{v}_{k_\sigma}$, отвечающими соответствующим числам $i\alpha_\sigma$ и $-i\alpha_\sigma$, сопряжённого оператора B_0^* справедливо $B_0^*v_{k_\sigma}=i\alpha_\sigma A_0^*v_{k_\sigma}$, $B_0^*\overline{v}_{k_\sigma}=-i\alpha_m A_0^*\overline{v}_{k_\sigma}$, $k_\sigma\in N_\sigma$, $\sigma=\overline{1,r}$.

Тогда линейное однородное уравнение

$$A_0\frac{dy}{dt}=B_0y. \tag{2.2}$$

имеет $2n$ T-периодических решений вида $\varphi_{k_\sigma}=u_{k_\sigma}e^{i\alpha_\sigma t}$, $\bar\varphi_{k_\sigma}=\bar u_{k_\sigma}e^{-i\alpha_\sigma t}$, $k_\sigma\in N_\sigma$, $\sigma=\overline{1,r}$. Соответственно уравнение, сопряжённое к (2.2), имеет $2n$ T-периодических решений вида $\psi_{k_\sigma}=v_{k_\sigma}e^{i\alpha_\sigma t}$, $\bar\psi_{k_\sigma}=\bar v_{k_\sigma}e^{-i\alpha_\sigma t}$, $k_\sigma\in N_\sigma$, $\sigma=\overline{1,r}$.

Ставится задача [3]: при достаточно малых ε найти все $T-$периодические решения $x(t,\varepsilon)$ уравнения (2.1), удовлетворяющие условию $x(t,0)=z(t)$, где $z(t)$ — $T-$периодические решения уравнения

$$A_0\frac{dz}{dt}=B_0z-f(t). \tag{2.3}$$

3. Построение разрешающей системы с помощью модифицированного метода Ляпунова-Шмидта

Для решения поставленной задачи представим уравнение (2.1) в виде

$$\mathcal{B}_0x=f(t)+\varepsilon C_1x,\quad \mathcal{B}_0x\equiv B_0x-A_0\frac{dx}{dt},\quad C_1\,x\equiv A_1\frac{dx}{dt}, \tag{3.1}$$

и применим модифицированный метод Ляпунова-Шмидта, приводящий к исследованию разрешающих систем в корневом подпространстве [7].

Здесь операторы $\mathcal{B}_0$ и C_1 отображают пространство $\mathcal{X}$ T-периодических непрерывно-дифференцируемых по t функций со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 \dotplus i\, E_1$ в пространство $\mathcal{Z}$ T-периодических непрерывно-дифференцируемых по t функций со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 \dotplus i\, E_2$. Значение функционала e на элементе x задаётся равенством

$$\ll x, e \gg = \frac{1}{T}\int_0^T \langle x(t), e(t)\rangle dt, \quad x \in \mathcal{X},\ \ e \in \mathcal{X}^* \ \ (x \in \mathcal{Z},\, e \in \mathcal{Z}^*).$$

Пространства нулей операторов $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_0^*$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(\mathcal{B}_0) = span\{\varphi_{k_\sigma}^{(1)},\ \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}, \quad k_\sigma \in N_\sigma,\ \sigma = \overline{1,r}\},\\ &\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) = span\{\psi_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\psi}_{k_\sigma}^{(1)}, \quad k_\sigma \in N_\sigma,\ \sigma = \overline{1,r}\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Согласно [3] для каждого элемента $\varphi_{k_\sigma}^{(1)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ определим A_1-жорданову цепочку с помощью уравнений

$$\mathcal{B}_0\varphi_{k_\sigma}^{(1)} = 0,\ \ \mathcal{B}_0\varphi_{k_\sigma}^{(j)} = A_1\varphi_{k_\sigma}^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, p_{k_\sigma}},\ k_\sigma \in N_\sigma,\ \sigma = \overline{1,r},$$

причём будем предполагать, что не все числа $\ll A_1\varphi_{k_\sigma}^{(p_{k_\sigma})}, \psi_{s_\nu}^{(1)} \gg$, $s_\nu \in N_\nu$, $\nu = \overline{1,r}$ равны нулю.

Аналогично для каждого элемента $\psi_{k_\sigma}^{(j)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ определим A_1^*-жорданову цепочку с помощью уравнений

$$\mathcal{B}_0^*\psi_{s_\nu}^{(1)} = 0,\ \mathcal{B}_0^*\psi_{s_\nu}^{(l)} = A_1^*\psi_{s_\nu}^{(l-1)}, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}},\ s_\nu \in N_\nu,\ \nu = \overline{1,r}.$$

Аналогично, предположим, что не все числа $\ll A_1^*\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})}, \varphi_{k_\sigma}^{(1)} \gg$, $k_\sigma \in N_\sigma$, $\sigma = \overline{1,r}$ равны нулю.

В предположении, что обобщенные жордановы наборы $\left\{\varphi_{k_\sigma}^{(j)},\ j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1,r}\right\}$, $\left\{\psi_{s_\nu}^{(l)},\ l = \overline{1, p_{s_\nu}}, s_\nu \in N_\nu, \nu = \overline{1,r}\right\}$ являются полными, выберем их так, чтобы выполнялись условия биортогональности [6]

$$\begin{aligned} &\ll \varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = \delta_{k_\sigma s_\nu}\delta_{jl}, \quad \ll z_{k_\sigma}^{(j)},\, \psi_{s_\nu}^{(l)} \gg = \delta_{k_\sigma s_\nu}\delta_{jl},\\ &\gamma_{s_\nu}^{(l)} = A_1^*\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+1-l)}, \quad z_{k_\sigma}^{(j)} = A_1\varphi_{k_\sigma}^{(p_{k_\sigma}+1-j)},\\ &j = \overline{1, p_{k_\sigma}},\, l = \overline{1, p_{s_\nu}},\, k_\sigma \in N_\sigma,\, s_\nu \in N_\nu,\ \sigma, \nu = \overline{1,r}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\delta_{k_\sigma s_\nu}$, δ_{jl} – символы Кроннекера.

Каждый из наборов элементов $\{\varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)},\ j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1,r}\}$ и $\{z_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{z}_{k_\sigma}^{(j)},\ j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1,r}\}$ является линейно независимым и формирует базис соответствующих корневых подпространств $E_1^{2K} = span\{\varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)},\ j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1,r}\}$ и $E_2^{2K} = span\{z_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{z}_{k_\sigma}^{(j)},\ j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1,r}\}$. Здесь $K = \sum\limits_{\sigma=1}^{r}\sum\limits_{k_\sigma \in N_\sigma} p_{k_\sigma}$.

Вводя регуляризатор Шмидта [3]

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \ll \cdot, \gamma_{k_\sigma}^{(1)} \gg z_{k_\sigma}^{(1)} + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \ll \cdot, \bar{\gamma}_{k_\sigma}^{(1)} \gg \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)},$$

запишем уравнение (3.1) в виде системы

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_0 x = \varepsilon C_1 x + \sum\limits_{\sigma=1}^{r} \sum\limits_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} z_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)}] + f(t), \\ \xi_{s_\nu,\,l} = \ll x, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg, \ \ \bar{\xi}_{s_\nu,\,l} = \ll x, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg, \\ l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \ \ k_\sigma \in N_\sigma, \ \ s_\nu \in N_\nu, \ \ \sigma, \nu = \overline{1, r}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Решение системы (3.4) будем искать в виде

$$x = w + v, \quad v = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \sum_{j=1}^{p_{k_\sigma}} [\xi_{k_\sigma,j} \varphi_{k_\sigma}^{(j)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,j} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}]. \tag{3.5}$$

Подставляя выражение (3.5) в первое уравнение системы (3.4), получим

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 w + \widetilde{\mathcal{B}}_0 v = \varepsilon C_1 w + \varepsilon C_1 v + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} z_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)}] + f(t).$$

Согласно обобщённой леммы Шмидта [3] для регуляризатора Шмидта существует обратный оператор $\Gamma_0 = \widetilde{\mathcal{B}}_0^{-1}$. Учитывая, что $\Gamma_0 z_{k_\sigma}^{(1)} = \varphi_{k_\sigma}^{(1)}$, $\Gamma_0 \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)} = \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}$, находим

$$[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1] w = -[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1] v + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \Gamma_0 f(t).$$

Пусть для ε выполняется условия $|\varepsilon| \le \rho_0 < ||\Gamma_0 C_1||^{-1}$, тогда оператор $[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1}$ существует и

$$w = -v + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \Gamma_0 f(t). \tag{3.6}$$

Учитывая равенство $[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} = I + \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} w = -v + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \\ + \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \\ + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \Gamma_0 f(t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

С учётом выражения (3.5) и равенства $[I-\varepsilon\Gamma_0 C_1]^{-1}\Gamma_0=\Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}$, находим

$$w=-\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\sum_{j=2}^{p_{k_\sigma}}[\xi_{k_\sigma,j}\varphi_{k_\sigma}^{(j)}+\bar{\xi}_{k_\sigma,j}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}]+$$
$$+\varepsilon\Gamma_0 C_1[I-\varepsilon\Gamma_0 C_1]^{-1}\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}[\xi_{k_\sigma,1}\varphi_{k_\sigma}^{(1)}+\bar{\xi}_{k_\sigma,1}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}]+$$
$$+\Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}f(t). \quad (3.8)$$

Учитывая равенства

$$(\Gamma_0 A_1)^j\varphi_{k_\sigma}^{(1)}=\varphi_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)},\ (\Gamma_0 A_1)^j\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}=\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)},\quad j=1,2,...,\quad (3.9)$$
$$k_\sigma\in N_\sigma,\ \sigma=\overline{1,r},$$

где r_{k_σ} – остаток от деления j на p_{k_σ}, получим

$$(\Gamma_0 C_1)^j\varphi_{k_\sigma}^{(1)}=(i\alpha_\sigma)^j\varphi_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)},\ (\Gamma_0 C_1)^j\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}=(-i\alpha_\sigma)^j\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)},\quad (3.10)$$
$$j=1,2,...;\ k_\sigma\in N_\sigma,\ \sigma=\overline{1,r}.$$

Аналогично, для сопряжённых операторов $\Gamma_0^*A_1^*$ и $\Gamma_0^*C_1^*$, справедливы равенства

$$(\Gamma_0^*A_1^*)^l\psi_{s_\nu}^{(1)}=\psi_{s_\nu}^{(q_{s_\nu}+1)},\ (\Gamma_0^*A_1^*)^l\bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)}=\bar{\psi}_{s_\nu}^{(q_{s_\nu}+1)},\quad (3.11)$$
$$(\Gamma_0^*C_1^*)^l\varphi_{s_\nu}^{(1)}=(-i\alpha_\nu)^l\psi_{s_\nu}^{(r_{s_\nu}+1)},\ (\Gamma_0^*C_1^*)^l\bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)}=(i\alpha_\nu)^l\bar{\psi}_{s_\nu}^{(r_{s_\nu}+1)},\quad (3.12)$$
$$l=1,2,...;\ s_\nu\in N_\nu,\ \nu=\overline{1,r},$$

где q_{s_ν} – остаток от деления l на p_{s_ν}.

Тогда для элементов $\varphi_{k_\sigma}^{(1)}$, $\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}$ справедливы выражения

$$\varepsilon\Gamma_0 C_1[I-\varepsilon\Gamma_0 C_1]^{-1}\varphi_{k_\sigma}^{(1)}=\frac{1}{1-(i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}[i\alpha_\sigma\varepsilon\varphi_{k_\sigma}^{(2)}+(i\alpha_\sigma\varepsilon)^2\varphi_{k_\sigma}^{(3)}+...+(i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}\varphi_{k_\sigma}^{(1)}],\quad (3.13)$$

$$\varepsilon\Gamma_0 C_1[I-\varepsilon\Gamma_0 C_1]^{-1}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}=$$
$$=\frac{1}{1-(-i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}[-i\alpha_\sigma\varepsilon\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(2)}+(-i\alpha_\sigma\varepsilon)^2\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(3)}+...+(-i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}].\quad (3.14)$$

Подставляя выражение (3.5) во второе и третье уравнение системы (3.4), и учитывая условия биортогональности (3.3), разрешающая система примет вид

$$\begin{cases} -\ll w,\gamma_{s_\nu}^{(l)}\gg=0,\\ -\ll w,\bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)}\gg=0,\\ l=\overline{1,p_{s_\nu}},\ s_\nu\in N_\nu,\ \nu=\overline{1,r}\,; \end{cases}\qquad \text{или}\qquad \begin{cases} -\ll w,\gamma_{s_\nu}^{(1)}\gg=0,\\ -\ll w,\gamma_{s_\nu}^{(l)}\gg=0,\\ -\ll w,\bar{\gamma}_{s_\nu}^{(1)}\gg=0,\\ -\ll w,\bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)}\gg=0,\\ l=\overline{2,p_{s_\nu}},\ s_\nu\in N_\nu,\ \nu=\overline{1,r}. \end{cases}\quad (3.15)$$

Подставляя выражение (3.8) для w в разрешающую систему (3.15), получим

$$\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\sum_{j=2}^{p_{k_\sigma}}\Big[\xi_{k_\sigma,j}\ll\varphi^{(j)}_{k_\sigma},\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg+\bar\xi_{k_\sigma,j}\ll\bar\varphi^{(j)}_{k_\sigma},\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg\Big]-$$
$$-\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\xi_{k_\sigma,1}\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0B_1]^{-1}\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg-$$
$$-\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\bar\xi_{k_\sigma,1}\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\bar\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg=\ll\Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}f,\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg,$$
$$l=\overline{1,p_{s_\nu}},\ s_\nu\in N_\nu,\ \nu=\overline{1,r}\,; \tag{3.16}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\sum_{j=2}^{p_{k_\sigma}}\Big[\xi_{k_\sigma,j}\ll\varphi^{(j)}_{k_\sigma},\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg+\bar\xi_{k_\sigma,j}\ll\bar\varphi^{(j)}_{k_\sigma},\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg\Big]-$$
$$-\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\xi_{k_\sigma,1}\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0B_1]^{-1}\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg-$$
$$-\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\bar\xi_{k_\sigma,1}\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\bar\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg=\ll\Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}f,\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg,$$
$$l=\overline{1,p_{s_\nu}},\ s_\nu\in N_\nu,\ \nu=\overline{1,r}\,. \tag{3.17}$$

Учитывая выражения (3.13), (3.14), и условия биортогональности (3.3), вычислим при $l=1$

$$\begin{aligned}&\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\gamma^{(1)}_{s_\nu}\gg=\frac{(i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}{1-(i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}\delta_{k_\sigma,\,s_\nu},\\&\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\bar\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\bar\gamma^{(1)}_{s_\nu}\gg=\frac{(-i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}{1-(-i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}\delta_{k_\sigma,\,s_\nu},\end{aligned}\tag{3.18}$$

при $l=\overline{2,p_{s_\nu}}$

$$\begin{aligned}&\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg=\frac{(i\alpha\varepsilon)^{l-1}}{1-(i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}\delta_{k_\sigma,\,s_\nu},\\&\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\bar\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg=\frac{(-i\alpha\varepsilon)^{l-1}}{1-(-i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}\delta_{k_\sigma,\,s_\nu}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Здесь, $|\varepsilon|\le\rho_1<1$. Аналогично, находим

$$\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\bar\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg=0,\quad\ll\varepsilon\Gamma_0C_1[I-\varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\varphi^{(1)}_{k_\sigma},\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}\gg=0.$$

С учётом равенств

$$\Gamma_0^*\gamma^{(1)}_{s_\nu}=\psi^{(1)}_{s_\nu},\Gamma_0^*\bar\gamma^{(1)}_{s_\nu}=\bar\psi^{(1)}_{s_\nu},\Gamma_0^*\gamma^{(l)}_{s_\nu}=\psi^{(p_{s_\nu}+2-l)}_{s_\nu},\Gamma_0^*\bar\gamma^{(l)}_{s_\nu}=\bar\psi^{(p_{s_\nu}+2-l)}_{s_\nu},\quad l=\overline{2,p_{s_\nu}}$$

представим правую часть разрешающей системы (3.15) в виде

$$
\begin{aligned}
&\ll \Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}f, \gamma_{s_\nu}^{(1)} \gg = \ll f, [I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\psi_{s_\nu}^{(1)} \gg,\\
&\ll \Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}f, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = \ll f, [I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+2-l)} \gg,\\
&\ll \Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}f, \bar\gamma_{s_\nu}^{(1)} \gg = \ll f, [I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\bar\psi_{s_\nu}^{(1)} \gg,\\
&\ll \Gamma_0[I-\varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}f, \bar\gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = \ll f, [I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\bar\psi_{s}^{(p_{s_\nu}+2-l)} \gg .
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Учитывая равенства (3.12), получим

$$
\begin{aligned}
&[I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\psi_{s_\nu}^{(1)} = \frac{1}{1-(-i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}}} h_{s_\nu,1},\\
&h_{s_\nu,1} = \psi_{s_\nu}^{(1)} + (-i\alpha_\nu\varepsilon)\psi_{s_\nu}^{(2)} + \ldots + (-i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})},\\
&[I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+2-l)} = \frac{1}{1-(i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}}} h_{s_\nu,l}, \quad l=\overline{2,p_{s_\nu}},\ \nu=\overline{1,r},\\
&h_{s_\nu,l} = \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+2-l)} + (-i\alpha_\nu\varepsilon)\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+3-l)} + \ldots + (-i\alpha_\nu\varepsilon)^{l-2}\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})} +\\
&+(-i\alpha_\nu\varepsilon)^{l-1}\psi_{s_\nu}^{(1)} + \ldots + (-i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+1-l)}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&[I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\bar\psi_{s_\nu}^{(1)} = \frac{1}{1-(i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}}} \bar h_{s_\nu,1},\\
&\bar h_{s_\nu,1} = \bar\psi_{s_\nu}^{(1)} + (i\alpha_\nu\varepsilon)\bar\psi_{s_\nu}^{(2)} + \ldots + (i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}\bar\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})},\\
&[I-\varepsilon\Gamma_0^* C_1^*]^{-1}\bar\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+2-l)} = \frac{1}{1-(i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}}} \bar h_{s_\nu,l}, \quad l=\overline{2,p_{s_\nu}},\ \nu=\overline{1,r},\\
&\bar h_{s_\nu,l} = \bar\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+2-l)} + (i\alpha_\nu\varepsilon)\bar\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+3-l)} + \ldots + (i\alpha_\nu\varepsilon)^{l-2}\bar\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})} +\\
&+(i\alpha_\nu\varepsilon)^{l-1}\bar\psi_{s_\nu}^{(1)} + +(i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}\bar\psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+1-l)}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Вводя обозначения

$$
\beta_{s_\nu} = (i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}}, \tag{3.23}
$$

$$
\theta_{s_\nu,l} = \frac{(i\alpha_\nu\varepsilon)^{l-1}}{1-(i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}}}, \tag{3.24}
$$

$$
l=\overline{1,p_{s_\nu}},\ s_\nu\in N_\nu,\ \nu=\overline{1,r}.
$$

и учитывая (3.18), (3.19), (3.21) и (3.22), разрешающая система (3.16)-(3.17) примет вид

$$
\begin{cases}
\beta_{s_\nu}\theta_{s_\nu,1}\xi_{s_\nu,1} & = & - & \ll f, \bar\theta_{s_\nu,1}h_{s_\nu,1} \gg, \quad l=1,\\
\xi_{s_\nu,l} - \theta_{s_\nu,l}\xi_{s_\nu,1} & = & & \ll f, \bar\theta_{s_\nu,1}h_{s_\nu,l} \gg, \quad l=\overline{2,p_{s_\nu}},\\
\bar\beta_{s_\nu}\bar\theta_{s_\nu,1}\bar\xi_{s_\nu,1} & = & - & \ll f, \theta_{s_\nu,1}\bar h_{s_\nu,1} \gg, \quad l=1,\\
\bar\xi_{s_\nu,l} - \bar\theta_{s_\nu,l}\bar\xi_{s_\nu,1} & = & & \ll f, \theta_{s_\nu,1}\bar h_{s_\nu,l} \gg, \quad l=\overline{2,p_{s_\nu}},\\
s_\nu\in N_\nu, \quad \nu=\overline{1,r}.
\end{cases}
\tag{3.25}
$$

Разрешающая система (3.25) представляет собой две сопряженные неоднородные системы линейных алгебраических уравнений относительно $\xi_{s_\nu,l}$ и $\bar{\xi}_{s_\nu,l}$, $l=\overline{1,p_{s_\nu}}$, $s_\nu\in N_\nu$, $\nu=\overline{1,r}$. При $\varepsilon\neq 0$ эта система имеет единственное решенение.

Так как в решение входят только $\xi_{s_\nu,1}$ и $\bar{\xi}_{s_\nu,1}$, ограничимся их вычислением. При $\varepsilon\neq 0$ из первого и третьего уравнения разрешающей системы (3.25) находим

$$\begin{aligned}
\xi_{s_\nu,1} &= -\frac{1}{\beta_{s_\nu}}\ll f,h_{s_\nu,1}\gg= \\
&= -\frac{1}{\beta_{s_\nu}}(c_{s_\nu,1}+c_{s_\nu,2}(i\alpha_\nu\varepsilon)+c_{s_\nu,3}(i\alpha_\nu\varepsilon)^2+...++c_{s_\nu,p_{s_\nu}}(i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}), \\
\bar{\xi}_{s_\nu,1} &= -\frac{1}{\bar{\beta}_{s_\nu}}\ll f,\bar{h}_{s_\nu,1}\gg= \\
&= -\frac{1}{\bar{\beta}_{s_\nu}}(\bar{c}_{s_\nu,1}+\bar{c}_{s_\nu,2}(-i\alpha_\nu\varepsilon)+\bar{c}_{s_\nu,3}(-i\alpha_\nu\varepsilon)^2+...+\bar{c}_{s_\nu,p_{s_\nu}}(-i\alpha_\nu\varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}), \\
& c_{s_\nu,l}=\ll f,\psi_{s_\nu}^{(l)}\gg,\ \bar{c}_{s_\nu,l}=\ll f,\bar{\psi}_{s_\nu}^{(l)}\gg,\quad l=\overline{1,p_{s_\nu}},\ s_\nu\in N_\nu,\quad \nu=\overline{1,r}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

При $\varepsilon=0$ разрешающая система (3.25) примет вид

$$\begin{cases}
0\cdot\xi_{s_\nu,1} = -\ll f,\psi_{s_\nu,1}\gg, & l=1, \\
\xi_{s_\nu,l} = \ll f,\psi_{s_\nu,l}^{(p_{s_\nu}+2-l)}\gg, & l=\overline{2,p_{s_\nu}}, \\
0\cdot\bar{\xi}_{s_\nu,1} = -\ll f,\bar{\psi}_{s_\nu,1}\gg, & l=1, \\
\bar{\xi}_{s_\nu,l} = \ll f,\bar{\psi}_{s_\nu,l}^{(p_{s_\nu}+2-l)}\gg, & l=\overline{2,p_{s_\nu}}, \\
s_\nu\in N_\nu,\quad \nu=\overline{1,r}.
\end{cases} \tag{3.27}$$

Для того, чтобы разрешающая система (3.27) имела решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\ll f,\psi_{s_\nu,1}\gg=0,\ \ll f,\bar{\psi}_{s_\nu,1}\gg=0,\quad s_\nu\in N_\nu,\quad \nu=\overline{1,r}. \tag{3.28}$$

4. Периодические решения возмущенной и невозмущенной системы

Подставляя формулы (3.26) в выражение (3.5), и учитывая обозначения (3.24) и (3.25), получим T–периодическое решение уравнения (2.1)

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}[\xi_{k_\sigma,1}\varphi_{k_\sigma}^{(1)}+\bar{\xi}_{k_\sigma,1}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}]+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\xi_{k_\sigma,1}\frac{1}{1-(i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}[i\alpha_\sigma\varepsilon\varphi_{k_\sigma}^{(2)}+(i\alpha_\sigma\varepsilon)^2\varphi_{k_\sigma}^{(3)}+...+(i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}\varphi_{k_\sigma}^{(1)}]+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{k_\sigma\in N_\sigma}\xi_{k_\sigma,1}\frac{1}{1-(-i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}[-i\alpha_\sigma\varepsilon\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(2)}+(-i\alpha_\sigma\varepsilon)^2\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(3)}+...+(-i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}]+$$

$$+ [I - \varepsilon\Gamma_0 C_1]^{-1}\Gamma_0 f(t) =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \sum_{j=1}^{p_{k_\sigma}} [\theta_{k_\sigma, j}\xi_{k_\sigma,1}\varphi_{k_\sigma}^{(j)} + \bar{\theta}_{k_\sigma, j}\bar{\xi}_{k_\sigma,1}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}] + [I - \varepsilon\Gamma_0 C_1]^{-1}\Gamma_0 f(t), \quad (4.1)$$

где $\xi_{k_\sigma,1}$, $\bar{\xi}_{k_\sigma,1}$ вычисляются по формулам (3.26).

При $\varepsilon = 0$ из разрешающей системы (3.27) получим $\xi_{k_\sigma,1}^{(1)} = c_k^{(1)}$, $\xi_{k_\sigma,1}^{(2)} = c_{k_\sigma}^{(2)}$, где $c_{k_\sigma}^{(1)}$, $c_{k_\sigma}^{(2)} \in R$ и, учитывая, что T–периодические решения уравнений (2.1) и (2.3) совпадают, находим что они представимы в виде

$$x(t, 0) = z(t) \equiv \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [c_{k_\sigma}^{(1)}\varphi_{k_\sigma}^{(1)} + c_{k_\sigma}^{(2)}\bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \Gamma_0 f(t). \quad (4.2)$$

Благодарности. Авторы благодарят д.ф.-м.н. профессора $\boxed{\text{Б. В. Логинова}}$ за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Lyapunov A. M. Sur les figures d'equilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, P. 1, Notes of Academician Sciences, St. Petersburg, 1906.

2. Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integral gleichungen // Math. Ann. 1908. Vol. 65. pp. 370-399.

3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. Наука, 1968. 528 с.

4. Loginov B. V. Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation, Nonlinear Analysis: TMA, 1997, Vol. 28, no. 12, pp. 2035-2047.

5. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu. B. On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative, Nonlinear analysis, 2007. Vol. 67, no. 5. pp. 1570-1585.

6. Коноплева И. В., Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2009, 115-124.

7. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 45-53.

8. Шаманаев П. А., Логинов Б. В. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого с запаздывающим аргументом // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 3. С. 61–69.

9. Sidorov N., Loginov B., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 550 p.

Поступила 21.04.2023; доработана после рецензирования 10.06.2023; принята к публикации 25.08.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. M. Lyapunov, "Sur les figures d'equilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation", *Academician Sciences*, St. Petersburg, 1906.

2. E. Schmidt, "Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integral gleichungen", *Math. Ann.*, **65** (1908), 370-399.

3. M. M. Vaynberg, V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy [Branching theory for solutions to nonlinear equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 528 p.

4. B. V. Loginov, "Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation", *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.

5. B. V. Loginov, L. R. Kim-Tyan, Yu. B. Rousak, "On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative", *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.

6. I. V. Konopleva, B. V. Loginov, Yu. B. Rusak, "Simmetriya i potentsial'nost' uravneniy razvetvleniya v kornevykh podprostranstvakh v neyavno zadannykh statsionarnykh i dinamicheskikh bifurkatsionnykh zadachakh [Symmetry and potentiality of branching equations in root subspaces in implicitly given stationary and dynamic bifurcation problems]", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki [News of higher educational institutions. North Caucasus region. Series: Natural Sciences]*, 2009, 115-124 (In Russ.).

7. A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and the disturbance in the form of small linear term", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:1 (2016), 45–53 (In Russ.).

8. P. A. Shamanaev B. V. Loginov, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

9. N. Sidorov, B. Loginov, M. Falaleev, *Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications, Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 550 p.

Submitted 21.04.2023; Revised 10.06.2023; Accepted 25.08.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.