

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.37-52

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.91

Двухцветный граф каскадов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях

Е. Я. Гуревич, Е. К. Родионова

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. Цель исследования — выделить класс каскадов (диффеоморфизмов) Морса-Смейла с трехмерным фазовым пространством, допускающих топологическую классификацию при помощи комбинаторных инвариантов. В общем случае препятствием к такой классификации является возможность дикого вложения замыканий сепаратрис в объемлющее многообразие, приводящая к счетному множеству топологически неэквивалентных систем уже в классе каскадов Морса-Смейла, имеющих всего одну седловую неподвижную точку. Для решения поставленной проблемы несущее многообразие диффеоморфизма представляется в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств: связанных аттрактора и репеллера, размерность которых не превышает единицы, и дополнения к ним, состоящего из блуждающих точек диффеоморфизма, названного характеристическим множеством. Известно, что топология пространства орбит ограничения диффеоморфизма Морса-Смейла на характеристическое множество и вложения в него проекций двумерных сепаратрис является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях. Кроме того, ранее описаны свойства пространства орбит, необходимые и достаточные для включения диффеоморфизма Морса-Смейла в топологический поток. Эти результаты используются в настоящей работе, чтобы показать, что классы топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса-Смейла, включающихся в топологический поток и не имеющих гетероклинических кривых, допускают комбинаторное описание. Более точно, в работе рассмотрен класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на замкнутых трехмерных многообразиях, включающихся в топологические потоки и не имеющие гетероклинических кривых. Каждому диффеоморфизму из этого класса поставлен в соответствие двухцветный граф, описывающий взаимное расположение двумерных сепаратрис седловых периодических точек. Доказано, что существование изоморфизма двухцветных графов, сохраняющего цвет ребер, является необходимым и достаточным условием топологической сопряженности каскадов. Показано, что скорость алгоритма, различающего двухцветные графы, полиномиально зависит от числа его вершин. Описан алгоритм построения представителя каждого класса топологической сопряженности.

Ключевые слова: диффеоморфизмы Морса-Смейла, топологическая классификация, структурно-устойчивые диффеоморфизмы, двухцветный граф, топологическая сопряженность

Для цитирования: Гуревич Е. Я., Родионова Е. К. Двухцветный граф каскадов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 37–52. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.37-52>

© Е. Я. Гуревич, Е. К. Родионова



Об авторах:

Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, старший научный сотрудник лаборатории «Динамические системы и приложения», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

Родионова Елена Константиновна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2449-521X>, ekrodionova@edu.hse.ru

Original article

MSC2020 37D15

Bicolor Graph of Morse-Smale Cascades on Manifolds of Dimension Three

E. Ya. Gurevich, E. K. Rodionova

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The purpose of this study is to single out a class of Morse-Smale cascades (diffeomorphisms) with a three-dimensional phase space that allow a topological classification using combinatorial invariants. In the general case, an obstacle to such a classification is the possibility of wild embedding of separatrix closures in the ambient manifold, which leads to a countable set of topologically nonequivalent systems. To solve the problem, we study the orbit space of a cascade. The ambient manifold of a diffeomorphism can be represented as a union of three pairwise disjoint sets: a connected attractor and a repeller whose dimension does not exceed one, and their complement consisting of wandering points of a cascade called the characteristic set. It is known that the topology of the orbit space of the restriction of the Morse-Smale diffeomorphism to the characteristic set and the embedding of the projections of two-dimensional separatrices into it is a complete topological invariant for Morse-Smale cascades on three-dimensional manifolds. Moreover, a criterion for the inclusion of Morse-Smale cascades in the topological flow was obtained earlier. These results are used in this paper to show that the topological conjugacy classes of Morse-Smale cascades that are included in a topological flow and do not have heteroclinic curves admit a combinatorial description. More exactly, the class of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections, defined on closed three-dimensional manifolds included in topological flows and not having heteroclinic curves, is considered. Each cascade from this class is associated with a two-color graph describing the mutual arrangement of two-dimensional separatrices of saddle periodic points. It is proved that the existence of an isomorphism of two-color graphs that preserves the color of edges is a necessary and sufficient condition for the topological conjugacy of cascades. It is shown that the speed of the algorithm that distinguishes two-color graphs depends polynomially on the number of its vertices. An algorithm for constructing a representative of each topological conjugacy class is described.

Keywords: Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification, structurally stable diffeomorphisms, be-color graph, topological conjugacy

For citation: *E. Ya. Gurevich, E. K. Rodionova. Bicolor Graph of Morse-Smale Cascades on Manifolds of Dimension Three. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 25:2(2023), 37–52. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.37-52>*

E. Ya. Gurevich, E. K. Rodionova. Bicolor Graph of Morse-Smale Cascades on manifolds of dimension three

About the authors:

Elena Ya. Gurevich, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Senior Researcher, Laboratory "Dynamical Systems and Applications"(25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

Elena K. Rodionova, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Trainee Researcher, Laboratory "Dynamical Systems and Applications"(25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2449-521X>, ekrodionova@edu.hse.ru

1. Введение

Пусть M^n — связное гладкое замкнутое многообразие размерности $n \geq 1$. Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, называется *диффеоморфизмом (каскадом) Морса–Смейла*, если выполняются следующие условия:

- 1) его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- 2) инвариантные многообразия W_p^s, W_q^u любых точек $p, q \in \Omega_f$ пересекаются трансверсально.

Несмотря на то, что неблуждающее множество каскада Морса–Смейла состоит из конечного множества периодических траекторий, его блуждающее множество на многообразии размерности большей единицы устроено значительно сложнее, чем у аналогичных потоков. Во-первых, это связано с наличием гетероклинических орбит, принадлежащих пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических траекторий, что приводит к сложному асимптотическому поведению инвариантных многообразий. Во-вторых, диффеоморфизмы Морса–Смейла на многообразиях размерности три и выше могут иметь дико вложенные инвариантные многообразия. Первые примеры таких диффеоморфизмов были построены в работах [1–2].

Полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях с конечным множеством гетероклинических орбит была получена А.Н. Безденежных и В.З. Гринесом в работах [3–4]. В цикле работ [5–7] Х. Бонатти, В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, В. С. Медведева и О. В. Починки была решена проблема топологической классификации каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях. В этих работах показано, что полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов Морса–Смейла является схема каскада, описывающая топологию пространства орбит действия ограничения диффеоморфизма на некоторое подмножество блуждающих точек и вложение проекций сепаратрис в это пространство.

В работе [8] было введено понятие тривиальности схемы и доказано, что диффеоморфизм Морса–Смейла, схема которого тривиальна, является сдвигом на единицу времени некоторого топологического потока, эквивалентного гладкому потоку Морса–Смейла. В настоящей работе показывается, что диффеоморфизмы Морса–Смейла с тривиальной схемой и не имеющие гетероклинических пересечений допускают топологическую классификацию в комбинаторных терминах, аналогично потокам Морса–Смейла (см., например, [9]). Сформулируем результат более точно.

Пусть $G(M^3)$ — класс диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений, вкладывающихся в топологический поток. Положим $\Omega_f^i = \{p \in \Omega_f |$

$\dim W_p^u = i\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Обозначим через \mathcal{L}_f множество всех замыканий двумерных инвариантных многообразий седловых точек диффеоморфизма f . Любой элемент множества \mathcal{L}_f является топологически вложенной сферой. Пусть \mathcal{D}_f обозначает множество всех компонент связности многообразия $M^3 \setminus (\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_f^1} cl W_{\sigma_1}^s \cup \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_f^2} cl W_{\sigma_2}^u)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Двухцветным графом каскада $f \in G(M^3)$ назовем граф Γ_f со следующими свойствами:

- 1) множество $V(\Gamma_f)$ вершин графа Γ_f находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством \mathcal{D}_f , множество $E(\Gamma_f)$ ребер графа Γ_f находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством \mathcal{L}_f ;
- 2) вершины v_i, v_j инцидентны ребру $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие им области D_i, D_j имеют общую границу;
- 3) ребро $e_{i,j}$ имеет цвет s (u) если оно соответствует сфере $cl W_{\sigma_1}^s \in \mathcal{L}_f$ ($cl W_{\sigma_2}^u \in \mathcal{L}_f$).

На Рис. 1.1 изображены фазовый портрет диффеоморфизма f на S^3 и соответствующий ему двухцветный граф.

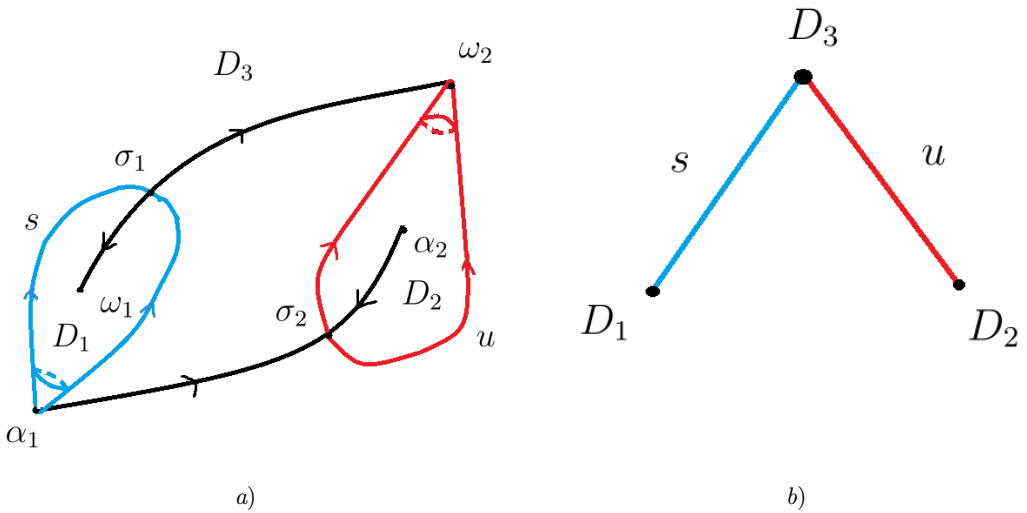


Рис. 1.1. а) фазовый портрет диффеоморфизма f на S^3 ; б) двухцветный граф диффеоморфизма f на S^3

Fig 1.1. a) phase portrait of the diffeomorphism f on S^3 ; b) two-color graph of f diffeomorphism on S^3

О п р е д е л е н и е 1.2. Двухцветные графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ каскадов $f, f' \in G(M^3)$ будем называть изоморфными, если существует биекция $\zeta : V(\Gamma_f) \rightarrow V(\Gamma_{f'})$, сохраняющая отношение смежности и цвет ребер.

Приведем основные результаты настоящей работы.

Т е о р е м а 1.1. Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы Γ_f и $\Gamma_{f'}$ изоморфны.

О п р е д е л е н и е 1.3. Простой связный граф Γ , ребра которого окрашены в цвета s, u , называется допустимым, если он имеет $g \geq 0$ попарно различных простых циклов, на каждом цикле имеется по крайней мере по одному ребру цвета s и по одному ребру цвета u , и никакое ребро не принадлежит двум циклам одновременно.

В силу следствия 2.2, доказываемого ниже, граф Γ_f любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ является допустимым. Таким образом, для предъявления канонического представителя каждого класса топологической сопряженности диффеоморфизмов из $G(M^3)$ достаточно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1.2. Для любого допустимого графа Γ существует диффеоморфизм $f \in G(M^3)$, граф Γ_f которого изоморфен графу Γ посредством изоморфизма, сохраняющего раскраску ребер.

Сформулируем теорему, устанавливающую существование алгоритмов, различающих любые два допустимых двухцветных графа не больше чем за полиномиальное число шагов.

Т е о р е м а 1.3. Пусть $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ — двухцветные графы диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ с одинаковым числом вершин и циклов, n — число вершин, g — число циклов. Если несущее многообразие является сферой S^3 , то $g = 0$ и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ за время $O(n)$. Если M^3 отлично от сферы, то $g > 0$ и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ за время $O(n^{O(g)})$.

Доказательство теорем 1.1, 1.2 и 1.3 содержится в разделах 3, 4 и 5, соответственно.

2. Свойства диффеоморфизмов рассматриваемого класса

В этом разделе мы приведем ряд свойств диффеоморфизмов рассматриваемого класса, которые будут использоваться при доказательстве основных результатов.

2.1. Топология несущего многообразия M^3

Пусть $f \in G(M^3)$. Обозначим через k_f число его седловых, через l_f — число узловых периодических точек и положим

$$g_f = (k_f - l_f + 2)/2.$$

Из [5] следует справедливость следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2.1. Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда если $g_f = 0$, то многообразие M^3 диффеоморфно трехмерной сфере, если $g_f > 0$, то M^3 диффеоморфно связной сумме g_f копий $S^2 \times S^1$.

2.2. Схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ как полный топологический инвариант

Представим многообразие M^3 в виде объединения множеств $A_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^1_f} W_\sigma^u) \cup (\bigcup_{\omega \in \Omega^0_f} \omega)$, $R_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^2_f} W_\sigma^s) \cup (\bigcup_{\alpha \in \Omega^3_f} \alpha)$, $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на V_f и через $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ естественную проекцию. Поскольку группа $\{f^n|_{V_f}\}$ действует на многообразии V_f свободно и разрывно, то пространство \widehat{V}_f является многообразием, а естественная проекция $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ является накрытием.

Проекция p_f индуцирует эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ по следующему правилу. Пусть $\hat{c} \subset \widehat{V}_f$ — кривая, не гомотопная нулю в \widehat{V}_f , и $[\hat{c}] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ — класс гомотопической эквивалентности кривой c . Выберем произвольную точку $\hat{x} \in c$, обозначим через $p_f^{-1}(\hat{x})$ полный прообраз \hat{x} и зафиксируем точку $\tilde{x} \in p_f^{-1}(\hat{x})$. Поскольку p_f является накрытием, то существует единственный путь $\tilde{c}(t)$, начинающийся в точке \tilde{x} (т. е. $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$), который накрывает кривую c (т. е. $p_f(\tilde{c}(t)) = c$). Следовательно, существует $m \in \mathbb{Z}$, такое что $\tilde{c}(1) = f^m(\tilde{x})$. Гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ ставит в соответствие число m .

Положим $\hat{L}_f^s = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$, $\hat{L}_f^u = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^2} p_f(W_\sigma^u \setminus \sigma)$.

Следуя работе [2], набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u, \eta_f)$ будем называть *схемой диффеоморфизма* $f \in G(M^3)$.

Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_{f'}$, такой что $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$, $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u$ и $\eta_f = \eta_{f'} \circ \hat{\varphi}_*$.

Из работы [6] вытекает справедливость следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

2.3. Свойства схемы диффеоморфизма $f \in G(M^3)$

Пусть \mathbb{S}_g обозначает ориентируемую поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода g .

О п р е д е л е н и е 2.1. *Будем называть схему S_f диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальной схемой, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_f : \widehat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ такой, что для каждой компоненты связности $\hat{\ell}$ множества $\hat{L}_f^s \cup \hat{L}_f^u$ найдется простая замкнутая дуга $c_\ell \subset \mathbb{S}_g$, такая что $\hat{\psi}_f(\hat{\ell}) = c_\ell \times \mathbb{S}^1$.*

В [8] доказано, что тривиальность схемы диффеоморфизма Морса-Смейла, заданного на трехмерном многообразии, является необходимым и достаточным условием включения этого диффеоморфизма в топологический поток. Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2.3. *Схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальна.*

Из тривиальности схемы, в частности, вытекает справедливость следующих фактов.

Предложение 2.1. Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда

- 1) ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразии произвольной неподвижной точки является сохраняющим ориентацию;
- 2) множество Ω_f состоит из неподвижных точек.

Доказательство. Докажем пункт 1. Пусть ω — стоковая периодическая точка диффеоморфизма f . Поскольку f включается в топологический поток F_ω^t , то ограничение f на множество W_ω^s является сдвигом F_ω^1 на единицу времени вдоль траекторий потока F_ω^t , следовательно, изотопно тождественному отображению (при помощи изотопии F_ω^t). Рассуждения для источниковой точки аналогичны. Поскольку W_ω^s является открытым трехмерным шаром, а многообразии M^3 ориентировано, то диффеоморфизм f сохраняет ориентацию многообразия M^3 .

Покажем, что ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразии произвольной седловой точки σ является сохраняющим ориентацию. Предположим противное. Возможны два случая: $\sigma \in \Omega_f^2, \sigma \in \Omega_f^1$. Пусть $\sigma \in \Omega_f^2$ — седловая точка периода m , такая что диффеоморфизм $f^m|_{W_\sigma^u}$ является обращающим ориентацию. Тогда существует гомеоморфизм $h : W_\sigma^u \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что $hf^m|_{W_\sigma^u} = a_-h$, где $a_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное отображение плоскости, задаваемое формулой $a_-(x_1, x_2) = (-2x_1, 2x_2)$.

Кольцо $K = \{(x_1, x_2) | 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ является фундаментальной областью действия a_- на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Пространство орбит $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/a_-$ этого действия получается склейкой компонент края кольца $K(h^{-1}(K))$ по диффеоморфизму $a_-(f)$, а значит, гомеоморфно бутылке Клейна. Следовательно, и пространство $\hat{\downarrow}_\sigma^u = (\bigcup_{i=1}^m f^i(W_\sigma^u \setminus \sigma))/f = p_f(\bigcup_{i=1}^m f^i(W_\sigma^u \setminus \sigma))$ гомеоморфно бутылке Клейна, что противоречит определению тривиальности схемы, согласно которому множество $\hat{\downarrow}_\sigma^u$ гомеоморфно тору.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\sigma \in \Omega_f^1$ и $f^m|_{W_\sigma^u}$ является меняющим ориентацию. Поскольку f в целом является сохраняющим ориентацию, то $f^m|_{W_\sigma^s}$ меняет ориентацию на W_σ^s , тогда рассуждениями, аналогичными изложенным выше, приходим к противоречию с тривиальностью схемы.

Докажем пункт 2. Пусть $\sigma \in \Omega_f^1$ — седловая точка периода m . Из определения тривиальной схемы следует, что множество $\hat{\downarrow}_\sigma^s = p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$ гомеоморфно тору и существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_f : \hat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$, такой что $\hat{\psi}_f(\hat{\downarrow}_\sigma^s) = c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s} \times \mathbb{S}^1$, где $c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s}$ — простая замкнутая кривая. Пусть $x \in c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s}$ — произвольная точка, тогда $\beta_x = \hat{\psi}_f^{-1}(x \times \mathbb{S}^1)$ — негомотопная нулю замкнутая кривая, принадлежащая тору $\hat{\downarrow}_\sigma^s$. Из определения тривиальной схемы следует, что множество $\tilde{\beta}_x = p_f^{-1}(\beta_x)$ является незамкнутой кривой, гомеоморфной $x \times \mathbb{R}$, и на дуге $\tilde{\beta}_x$ найдутся точки $\tilde{x}, f(\tilde{x})$, такие что $\hat{\psi}_f(p_f(\tilde{x})) = \hat{\psi}_f(p_f(f(\tilde{x}))) = x$, следовательно, $f(W_\sigma^s \setminus \sigma) = W_\sigma^s \setminus \sigma$ и σ — неподвижная точка. Аналогично доказывается, что любая седловая точка $\sigma \in \Omega_f^2$ также является неподвижной. Отсюда и из пункта 1 следует, что каждая сепаратриса седловой периодической точки является f -инвариантной. Поскольку все стоковые и источниковые точки принадлежат замыканиям сепаратрис седловых периодических точек, из f -инвариантности сепаратрис следует, что все стоковые и источниковые точки диффеоморфизма f являются неподвижными. Таким образом, множество Ω_f состоит из неподвижных точек.

Доказательство завершено.

Отметим, что в силу [10] условия предложения 2.1 являются необходимыми условиями включения диффеоморфизма Морса-Смейла в топологический поток.

2.4. Взаимосвязь схемы и двухцветного графа

Пусть $r \in \mathbb{S}^1$ — произвольная точка и $\Sigma_{f^t} \subset V_f$ — связная ориентируемая поверхность, такая что $p_f(\Sigma_{f^t}) = \mathbb{S}_g \times \{r\}$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Поверхность Σ_f будем называть характеристической поверхностью диффеоморфизма f .

Из тривиальности схемы и определения характеристической поверхности непосредственно вытекает следующий факт.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Для любой сферы $\ell \subset L_f^s \cup L_f^u$ пересечение $\tilde{c}_\ell = \ell \cap \Sigma_f$ гомеоморфно окружности.

Л е м м а 2.1. Сфера $\ell \in L_f^s \cup L_f^u$ делит многообразие M^3 тогда и только тогда, когда окружность \tilde{c}_ℓ делит характеристическую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения множеств V_f, A_f, R_f и \mathcal{L}_f следует, что $M^3 \setminus \mathcal{L}_f = V_f \setminus \mathcal{L}_f$. Из тривиальности схемы S_f следует, что V_f гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{R}$. Отсюда и из предложения 2.2 следует, что для любого элемента $L \in \mathcal{L}_f$ и для любого $r \in \mathbb{R}$ множества $V_f \setminus L$ и $\mathbb{S}_g \times \{r\}$ являются связными либо несвязными одновременно, что доказывает справедливость леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Непосредственно из леммы 2.1 вытекают следующие утверждения.

С л е д с т в и е 2.1. Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда

- 1) двухцветный граф Γ_f вкладывается в характеристическую поверхность таким образом, что:
 - (a) каждая компонента связности d множества $\Sigma_f \setminus (L_f^s \cup L_f^u)$ содержит в точности одну точку v , соответствующую вершине графа Γ_f ;
 - (b) если компоненты связности d_i, d_j множества $\Sigma_f \setminus (L_f^s \cup L_f^u)$ имеют общую граничную окружность $\ell_{i,j}$, то точки $v_i \in d_i, v_j \in d_j$ соединены гладкой дугой $e_{i,j}$, трансверсально пересекающей окружность $\tilde{c}_{\ell_{i,j}}$;
- 2) граф Γ_f связан;
- 3) граф $\Gamma_f \setminus e_{i,j}$ связан тогда и только тогда, когда множество $\Sigma_f \setminus \tilde{c}_{\ell_{i,j}}$ связно.

С л е д с т в и е 2.2. Пусть $f^t \in G(M^3)$. Если $g_f = 0$, то граф Γ_{f^t} является деревом. Если $g_f > 0$, то граф Γ_{f^t} связан и имеет в точности g_f простых попарно различных циклов, таких что:

- 1) никакое ребро не принадлежит одновременно двум циклам;
- 2) каждый цикл графа Γ_{f^t} содержит как ребро, окрашенное в цвет s , так и ребро, окрашенное в цвет u .

Доказательство. Из определения рода ориентируемой поверхности следует, что максимальное число попарно непересекающихся замкнутых кривых, не делящих поверхность, равно роду этой поверхности. Отсюда и из пунктов 2-3 следствия 2.1 непосредственно следует, что при $g_f = 0$ граф Γ_f является деревом. Пусть $g_f > 0$. Из определения характеристической поверхности следует, что многообразие $M^3 \setminus \Sigma_f$ имеет две компоненты связности $Q_a \supset A_f, Q_r \supset R_f$, такие что A_f, R_f являются деформационными ретрактами замыканий $cl Q_a, cl Q_r$ множеств Q_a, Q_r соответственно. Отсюда следует, что каждое из множеств A_f, R_f содержит в точности g_f подмножеств, гомеоморфных окружности. Пусть $\sigma_1 \in A_f$ — седловая точка, принадлежащая подмножеству множества A_f , гомеоморфному окружности. Тогда $A_f \setminus \sigma_1 = A_f \setminus W_\sigma^s$ связно. Следовательно, $\Sigma_f \setminus W_\sigma^s$ связно. Тогда, с учетом того факта, что устойчивые многообразия разных седловых точек не пересекаются, найдется ровно g_f сфер из множества L_f^s , не делящих Σ_f . Отсюда, в силу следствия 2.1, граф Γ_f имеет в точности g_f ребер, окрашенных в цвет s , принадлежащих непересекающимся циклам. Аналогично доказывается, что граф Γ_f имеет в точности g_f ребер, окрашенных в цвет u , принадлежащих непересекающимся циклам. В то же время из определения рода поверхности следует, что не более чем g_f окружностей, являющихся следами сфер $L_f^s \cup L_f^u$, не делит поверхность Σ_f . Отсюда получаем, в силу следствия 2.1, что граф Γ_f имеет не более чем g_f непересекающихся циклов, что и требовалось доказать.

Доказательство завершено.

3. Граф как полный топологический инвариант для класса $G(M^3)$

Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены. Тогда существует гомеоморфизм $h : M^3 \rightarrow M^3$, такой что $f' = h^{-1}fh$. Гомеоморфизм h отображает инвариантные многообразия диффеоморфизма f в инвариантные многообразия диффеоморфизма f' , откуда следует, что графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны. Таким образом, необходимость условий теоремы 1.1 доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ изоморфны и докажем, что диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены. В силу утверждения 2.2 достаточно доказать, что из наличия изоморфизма графов f, f' следует эквивалентность их схем $S_f, S_{f'}$.

Отметим, что в силу предложения 2.2 граф Γ_f имеет в точности g_f простых попарно непересекающихся циклов. Поскольку графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны, то $g_f = g_{f'} = g$. Аналогично [9, § 3.4] показывается, что существует гомеоморфизм $h : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_{f'}$, такой что $h(\Sigma_f \cap L_f^\delta) = \Sigma_{f'} \cap L_{f'}^\delta, \delta \in \{s, u\}$. Докажем, что существует гомеоморфизм $\hat{h} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$, такой что $\hat{h}(\hat{L}_f^\delta) = \hat{L}_{f'}^\delta, \delta \in \{s, u\}$. Пусть $\hat{\psi} : \hat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, \hat{\psi}' : \hat{V}_{f'} \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ — гомеоморфизмы, удовлетворяющие условию определения 2.1 и $r, r' \in \mathbb{S}^1$ — такие точки, что $p_f(\Sigma_f) = \mathbb{S}_2 \times \{r\}, p_{f'}(\Sigma_{f'}) = \mathbb{S}_g \times \{r'\}$. Обозначим через $\eta_{r'-r}$ поворот окружности \mathbb{S}^1 , перемещающий точку r' в точку r . Гомеоморфизм $h : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_{f'}$, определенный на шаге 2, индуцирует гомеоморфизм $h_r : \mathbb{S}_g \times r \rightarrow \mathbb{S}_g \times r$, такой что $p_f h_r = h p_{f'} \eta_{r'-r}$. Положим $\theta(x, r) = (x, h_r)$. Тогда соотношение $\hat{h} = \hat{\psi}'^{-1} \theta \hat{\psi}$ определяет искомый гомеоморфизм.

Теорема 1.1 доказана.

4. Реализация

Предложение 4.1. Пусть $\Gamma(g)$ — допустимый граф с g циклами. Тогда

- 1) граф $\Gamma(g)$ вкладывается в ориентируемую поверхность \mathbb{S}_g рода g ;
- 2) существует набор попарно непересекающихся гладко вложенных окружностей $c_1, \dots, c_k \subset \mathbb{S}_g$ со следующими свойствами:
 - (a) k равно числу ребер графа $\Gamma(g)$;
 - (b) для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ окружность c_i пересекает ровно одно ребро e_i графа $\Gamma(g)$, пересечение $c_i \cap e_i$ состоит из единственной точки, отличной от вершины графа $\Gamma(g)$;
 - (c) окружность c_i окрашена в цвет ребра e_i ;
 - (d) каждая компонента связности множества $\mathbb{S}_g \setminus \bigcup_{i=1}^k c_i$ содержит в точности одну вершину графа $\Gamma(g)$.

Доказательство. Докажем пункт 1 индукцией по числу g . Если $g = 0$, то граф $\Gamma(g)$ является деревом и, следовательно, является планарным и вкладывается в сферу $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_0$. Предположим, что при $g > 0$ любой допустимый граф $\Gamma(g)$ вкладывается в поверхность \mathbb{S}_g и докажем, что допустимый граф $\Gamma(g+1)$ вкладывается в поверхность \mathbb{S}_{g+1} . Пусть ребро e принадлежит циклу графа $\Gamma(g+1)$ и вершины v, w инцидентны ребру e . Тогда граф $\Gamma'(g) = \Gamma(g+1) \setminus e$ связан и вкладывается в поверхность \mathbb{S}_g . Выберем два непересекающихся диска B_v, B_w , не пересекающиеся с вершинами графа $\Gamma(g)$, отличными от v, w и такие, что $v \in \text{int } B_v, w \in B_w$, приклеим к \mathbb{S}_g ручку по дискам B_v, B_w и соединим вершины v, w дугой, проходящей по ручке. В результате получим граф $\Gamma'(g+1)$, изоморфный графу $\Gamma(g+1)$, вложенный в поверхность \mathbb{S}_{g+1} .

Докажем пункт 2. Поскольку циклы графа $\Gamma(g)$ не пересекаются, то существует набор c_1, \dots, c_g попарно непересекающихся гладко вложенных в поверхность \mathbb{S}_g окружностей со следующими свойствами: а) каждая окружность $c_i, i \in \{1, \dots, g\}$ пересекает граф $\Gamma(g)$ в единственной точке, принадлежащей одному из его циклов и отличной от вершины; б) существует набор попарно непересекающихся трубчатых окрестностей T_1, \dots, T_g , такой что многообразие $S' = \mathbb{S}_g \setminus \bigcup_{i=1}^g \text{int } T_i$ гомеоморфно поверхности, получаемой из сферы \mathbb{S}^2 удалением внутренности объединения $2g$ попарно непересекающихся двумерных дисков. Тогда любая окружность c' делит многообразие S' на две компоненты связности. Пусть e_i — ребро, пересекающееся с окружностью c_i . Тогда граф $\Gamma' = \Gamma(g) \setminus \bigcup_{i=1}^g e_i$ является деревом, и построение оставшихся окружностей проводится последовательно, начиная с ребер, инцидентных листьям дерева Γ' , и заканчивая ребрами, инцидентными центральной вершине или вершинам.

Доказательство завершено.

Пусть $c_1, \dots, c_k \subset \mathbb{S}_g$ — окружности, удовлетворяющие заключению предложения 4.1. Перейдем к пространству $\mathbb{S}_g \times \times \mathbb{S}^1$ и для окружности $c_i(c_j)$, окрашенной в цвет $s(u)$, положим $\hat{\ell}^s = c_i \times \mathbb{S}^1, \hat{\ell}^u = c_j \times \mathbb{S}^1$. Обозначим через \hat{L}^s, \hat{L}^u совокупности всех торов $\hat{\ell}^s, \hat{\ell}^u$ соответственно.

Построим диффеоморфизм $f \in G(M^3)$, схема которого эквивалентна тройке $\{\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, \hat{L}^s, \hat{L}^u\}$. Тогда двухцветный граф Γ_f диффеоморфизма f будет изоморфен допустимому графу Γ_g . Построение диффеоморфизма f проведем по шагам, следуя алгоритму, предложенному в [11, Proposition 2.2].

Шаг 1. *Определение вспомогательного диффеоморфизма* $a_g : \mathbb{S}_g \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$.

Положим $a_g(x, r) = (x, r + 1)$. Для дуги $c_i \in \mathbb{S}_g$, окрашенной в цвет $\delta \in \{s, u\}$, положим $l^\delta = c_i \times \mathbb{R}$, обозначим через L^δ совокупность всех цилиндров l^δ и через $N_{L^\delta} = \{N_{l^\delta}\}$ множество попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей цилиндров из множества L^δ , таких что $N_{l^\delta} = K_{c_i} \times \mathbb{R}$, где $K_{l^\delta} \subset \mathbb{S}_g$ — гладкое двумерное кольцо, содержащее окружность c_i .

Шаг 2. *Добавление седел индекса 1.* В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим подмножество $\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 \leq 1\}$ и зададим на нем диффеоморфизм поток b формулой $b(x_1, x_2, x_3) = (2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, 2x_3)$. Положим $\hat{\mathbb{N}}^s = (\mathbb{U} \setminus Ox_3)/b$. По построению многообразию $\hat{\mathbb{N}}^s$ диффеоморфно $K \times \mathbb{S}^1$, где K — стандартное двумерное кольцо, то есть диффеоморфно $K_{l^\delta} \times \mathbb{S}^1$. Тогда для любого $l^s \in L^s$ существует диффеоморфизм $\mu_{l^s}^s : N_{l^s} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3)$, сопрягающий диффеоморфизмы $a_g|_{N_{l^s}}$ и $b|_{\mathbb{U} \setminus Ox_3}$. Пусть k^s — число всех элементов множества L^s . Обозначим через $\mu_s : N_{L^s} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{k^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_{l^s}^s$. Положим $Q^s = (\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}) \cup_{\mu_s} (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s})$. Пространство Q^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^s = (\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s})$ и обозначим через $p_s : \bar{Q}^s \rightarrow Q^s$ естественную проекцию. Положим $p_{s,1} = p_s|_{\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}}$, $p_{s,2} = p_s|_{\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s}}$. Определим диффеоморфизм \tilde{f}_s на многообразии Q^s формулой

$$\tilde{f}_s(x) = \begin{cases} p_{s,1}(a_g(p_{s,1}^{-1}(x))), & x \in p_{s,1}(\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}); \\ p_{s,2}(b(p_{s,2}^{-1}(x))), & x \in p_{s,2}(\mathbb{U} \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{k^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма \tilde{f}_s состоит из k^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице.

Шаг 3. *Добавление седел индекса 2.* Будем обозначать образы множеств L^u , N_{L^u} и их элементов относительно проекции p_s теми же буквами, что и оригиналы. Пусть k^u — число элементов множества L^u . Рассуждениями, аналогичными примененным на шаге 1, доказывается существование диффеоморфизма $\mu_{l^u}^u : N_{l^u} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3)$, сопрягающего диффеоморфизмы $\tilde{f}_s|_{N_{l^u}}$ и $b^{-1}|_{\mathbb{U} \setminus Ox_3}$. Как и в шаге 2, обозначим через $\mu^u : N_{L^u} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{k^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_{l^u}^u$, и положим $Q^u = Q^s \cup_{\mu^u} (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u})$. Пространство Q^u является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^u = Q^s \cup (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u})$ и обозначим через $p_u : \bar{Q}^u \rightarrow Q^u$ естественную проекцию. Положим $p_{u,1} = p_u|_{Q^s}$, $p_{u,2} = p_u|_{\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u}}$. Определим диффеоморфизм \tilde{f}_u на многообразии Q^u формулой

$$\tilde{f}_u(x) = \begin{cases} p_{u,1}(\tilde{f}_s(p_{u,1}^{-1}(x))), & x \in p_{u,1}(Q^s); \\ p_{u,2}(b^{-1}(p_{u,2}^{-1}(x))), & x \in p_{u,2}(\mathbb{U} \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{k^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока \tilde{f}_u состоит из k^s седловых неподвижных точек с индексом Морса, равным единице, и k^u неподвижных точек с индексом Морса, равным двум.

Шаг 4. Добавление стоков. Обозначим через $W_{\Omega_{\tilde{f}_u}}^s$ объединение устойчивых многообразий всех неподвижных точек диффеоморфизма \tilde{f}_u , положим $R^s = Q^u \setminus W_{\Omega_{\tilde{f}_u}}^s$ и обозначим через $\rho_1^s, \dots, \rho_{n^s}^s$ компоненты связности множества R^s . Из конструкции следует, что каждая компонента ρ_i^s диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Отсюда следует, что существует диффеоморфизм $\nu_i^s : \rho_i^s \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, гладко сопрягающий $\tilde{f}_u|_{\rho_i^s}$ с диффеоморфизмом $a_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}}$, заданным формулой $a_0(x_1, x_2, x_3) = (2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, 2^{-1}x_3)$. Обозначим через $\nu^s : R^s \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus O x_3) \times \mathbb{Z}_{n^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu_1^s, \dots, \nu_{n^s}^s$. Положим $M^s = Q^u \cup_{\nu^s} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$. Пространство M^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{M}^s = Q^u \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$ и обозначим через $q_s : \bar{M}^s \rightarrow M^s$ естественную проекцию. Положим $q_{s,1} = q_s|_{Q^u}$, $q_{s,2} = q_s|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s}}$ и определим диффеоморфизм f_s на многообразии M^s формулой

$$f_s(x) = \begin{cases} q_{s,1}(\tilde{h}_u(q_{s,1}^{-1}(x))), & x \in q_{s,1}(Q^u); \\ q_{s,2}(a_0(q_{s,2}^{-1}(x))), & x \in q_{s,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{n^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока f_s состоит из k^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, k^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, и n^s стоковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 5. Добавление источников. Положим $R^u = M^s \setminus W_{\Omega_{\tilde{f}_s}}^u$ и обозначим через $\rho_1^u, \dots, \rho_{n^u}^u$ компоненты связности множества R^u . Каждая компонента ρ_i^u диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, и диффеоморфизм $f_s|_{\rho_i^u}$ гладко сопряжен с диффеоморфизмом $a_0^{-1}|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν_i^u . Обозначим через $\nu^u : R^u \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus O x_3) \times \mathbb{Z}_{n^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu_1^u, \dots, \nu_{n^u}^u$. Положим $M^u = M^s \cup_{\nu^u} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$. Пространство M^u является гладким связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Положим $\bar{M}^u = M^s \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$ и обозначим через $q_u : \bar{M}^u \rightarrow M^u$ естественную проекцию. Положим $q_{u,1} = q_u|_{M^s}$, $q_{u,2} = q_u|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u}}$. Определим диффеоморфизм f_u на многообразии M^u формулой

$$f_u(x) = \begin{cases} q_{u,1}(f_s(q_{u,1}^{-1}(x))), & x \in q_{u,1}(M^s); \\ q_{u,2}(a_0^{-t}(q_{u,2}^{-1}(x))), & x \in q_{u,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{n^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма f_u состоит из k^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, k^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, n^s стоковых неподвижных гиперболических точек и n^u источниковых неподвижных гиперболических точек, а его ограничение на множество V_f топологически сопряжено с потоком a_g , построенном на первом шаге. Отсюда следует, что схема диффеоморфизма f_u эквивалентна тройке $\{\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, L^s, L^u\}$, следовательно, диффеоморфизм f_u является искомым.

Теорема 1.2 доказана.

5. Оценка скорости алгоритмов сравнения двухцветных графов

Результаты этого раздела основываются на следующем утверждении, доказанном в [12–13].

У т в е р ж д е н и е 5.1. Пусть Γ_1, Γ_2 – графы с одинаковым числом вершин n , вкладывающиеся в поверхность рода $g \geq 0$. Тогда существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов Γ_1, Γ_2 за время $O(n^{O(g)})$. Если $g = 0$, то существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов Γ_1, Γ_2 за время $O(n)$.

Для сведения проблемы различения двухцветных графов к утверждению 5.1 будем пользоваться идеями, предложенными Д. С. Малышевым в работе [14]. Справедливость теоремы 1.3 будет следовать из утверждения 5.1 и следующего предложения.

П р е д л о ж е н и е 5.1. Для любого допустимого двухцветного графа Γ с g циклами существует неоснащенный граф Γ' , вложенный в поверхность \mathbb{S}_g и такой, что допустимые графы Γ_1, Γ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы Γ'_1, Γ'_2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть теперь Γ_1, Γ_2 – допустимые двухцветные графы с одинаковым числом вершин n и одинаковым числом циклов g . К каждой вершине графов Γ_1, Γ_2 добавим по четыре висячие вершины. Далее, удалим каждое ребро $e_i = (a_i, b_i)$ цвета u , добавим ребра $(a_i, c_i), (b_i, c_i)$ и висячую вершину, смежную с c_i . Для ребра цвета s делаем то же самое, только добавим две висячие вершины, каждая из которых смежна с c_i (Рис. 5.1). В результате этих действий получим графы Γ'_1 и Γ'_2 , имеющие g циклов.

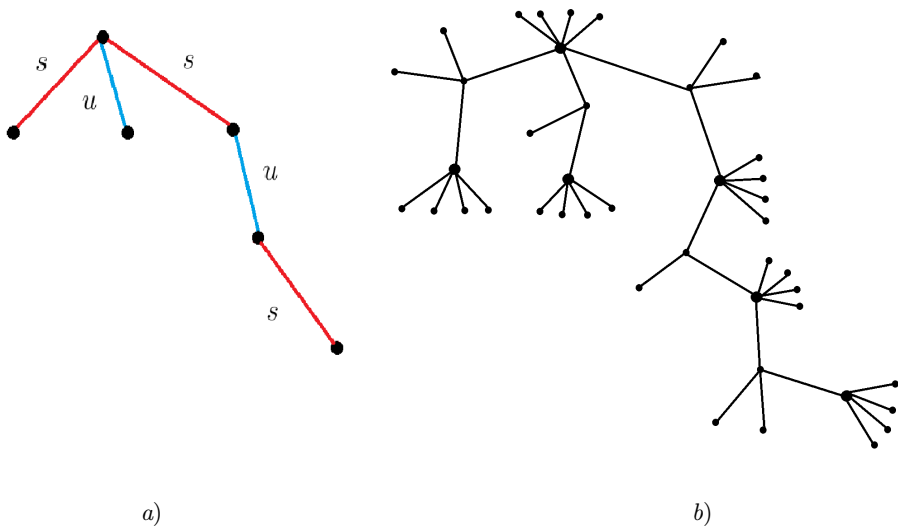


Рис. 5.1. Примеры графов: а) двухцветный граф Γ , б) неоснащенный граф Γ' , соответствующий двухцветному графу Γ

Fig 5.1. Examples of graphs: а) two-color graph Γ , б) unframed graph Γ' corresponding to the two-color graph Γ

Осталось доказать, что графы Γ'_1 и Γ'_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы Γ_1 и Γ_2 . Необходимость следует из построения графов Γ'_1 и Γ'_2 . По-

кажем, что из изоморфности Γ'_1 и Γ'_2 следует изоморфность Γ_1 и Γ_2 . Действительно, вершины графов Γ'_1 и Γ'_2 степени не менее единицы и не более четырех соответствуют ребрам Γ_1 и Γ_2 , причем степень вершины однозначно определяет цвет ребра. Для определения вершины графа Γ_i нужно найти вершину графа Γ'_i степени выше четырех и удалить все соседние с ней висячие вершины и смежные им ребра. Таким образом, по графу Γ'_i однозначно восстанавливается граф Γ_i .

Поскольку связный граф с n вершинами и g циклами имеет ровно $n - 1 - g$ ребер, то графы Γ'_1 и Γ'_2 имеют не более $n + 4n + 4(n - 1 - g) < 9n$ вершин. Следовательно, предложение 5.1 справедливо и для двухцветных графов Γ_1, Γ_2 .

Теорема 1.3 доказана.

Благодарности. Работа выполнена в ходе проведения исследования (№ 23-00-028) в рамках программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2023–2024 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pixton D. Wild unstable manifolds // *Topology*. 1977. Vol. 16, No. 2. pp. 167–172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3)
2. Bonatti C., Grines V. Z. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2000. Vol. 6, No. 4. pp. 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I, II. // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений : межвуз. темат. сб. науч. тр.* 1987. С. 24–32.
4. Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // *Математические заметки*. 1993. Т. 54, № 3. С. 3–17. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01209552>
5. Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // *Topology and Its Applications*. 2002. Vol. 117, No. 3. pp. 335–344. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(01\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1)
6. Бонатти К., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // *Труды МИАН*. 2005. Т. 250. С. 5–53.
7. Bonatti C., Grines V., Pochinka O. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // *Duke Mathematical Journal*. 2019. Vol. 168, No. 13. pp. 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
8. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С., Починка О. В. О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток // *Математический сборник*. 2012. Т. 203, № 12. С. 81–104. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8094>

9. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме $S^{n-1} \times S^1$ // Математический сборник. 2023. Т. 214, № 5. С. 97–127. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761>
10. Palis J., Smale S. Structural stability theorems // Matematika. 1969. Vol. 13, No. 2. pp. 145–155.
11. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds // Topology. 2004. Vol. 43, No. 2. pp. 369–391. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(03\)00053-3](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(03)00053-3)
12. Hopcroft J. E., Wong J. K. Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (preliminary report) // Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 1974. pp. 172–184. DOI: <https://doi.org/10.1145/800119.803896>
13. Miller G. Isomorphism testing for graphs of bounded genus // Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 1980. pp. 225–235. DOI: <https://doi.org/10.1145/800141.804670>
14. Grines V., Malyshev D., Pochinka O., Zinina S. Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, No. 2. pp. 189–203.

*Поступила 21.03.2023; доработана после рецензирования 10.05.2023;
принята к публикации 25.05.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, 1977, 167–172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3)
2. V. Z. Grines, Ch. Bonatti, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Dynamic properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I, II”, *Metody kachestvennoy teorii differentsialnykh uravneniy : sbornik trudov*, 1987, 24–32 (In Russ.).
4. V. Z. Grines, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, **54** (1993), 881–889. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01209552>
5. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Pecou, “Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Its Applications*, **117**:3 (2002), 335–344. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(01\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1)

6. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proceedings of MIAN*, **250** (2005), 5–53 (In Russ.).
7. C. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Mathematical Journal*, 2019, 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
8. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “On the inclusion of Morse–Smale diffeomorphisms on a 3-manifold in a topological flow”, *Mathematical Collection*, 2012, 81–104 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8094>
9. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Combinatorial invariant of gradient-like flows on a connected sum $S^{n-1} \times S^1$ ”, *Mathematical Collection*, **5** (2023), 97–127 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761>
10. Palis J., Smale S., “Structural stability theorems”, *Matematika*, **13:2** (1969), 145–155.
11. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43:2** (2004), 369–391. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(03\)00053-3](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(03)00053-3)
12. J. Hopcroft, J. Wong, “Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs”, *Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1974, 172–184. DOI: <https://doi.org/10.1145/800119.803896>
13. Miller G., “Isomorphism testing for graphs of bounded genus”, 1980, 225–235. DOI: <https://doi.org/10.1145/800141.804670>
14. V. Grines, D. Malyshev, O. Pochinka, S. Zinina, “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21:2** (2016), 189–203.

Submitted 21.03.2023; Revised 10.05.2023; Accepted 25.05.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.