Математика

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.519-530
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 514.7

Об одном классе самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями

А. В. Багаев

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Настоящая работа посвящена классу самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями, центры которых находятся в вершинах правильного шестиугольника P, а коэффициенты гомотетий принадлежат интервалу $(0, 1)$. Отметим, что равенство коэффициентов гомотетий не предполагается. Самоаффинное множество на плоскости представляет собой непутое компактное подмножество, инвариантное относительно рассматриваемого семейства гомотетий. Существование и единственность самоаффинного множества обеспечивает теорема Хатчинсона. Целью данной работы является исследование влияния коэффициентов гомотетий на свойства самоаффинного множества. Для описания самоаффинного множества введены барицентрические координаты на плоскости. Найдены условия, при которых самоаффинное множество является: a) шестиугольником P; b) канторовым множеством в шестиугольнике P. Вычислены размерности Минковского и Хаусдорфа указанных самоаффинных множеств. Получены условия, при выполнении которых мера Лебега самоаффинного множества равна нулю. Приведены примеры самоаффинных множеств из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: самоаффинное множество, гомотетия, канторово множество, система итерированных функций, аттрактор, мера Лебега

Для цитирования: Багаев А. В. Об одном классе самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 519–530. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.519-530

Об авторах:

Багаев Андрей Владимирович, доцент кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5155-4175, a.v.bagaev@gmail.com

Original article

MSC2020 28A80

On a class of self-affine sets on the plane given by six homotheties

A. V. Bagaev

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. This paper is devoted to a class of self-affine sets on the plane determined by six homotheties. Centers of these homotheties are located at the vertices of a regular hexagon P, and the homothetic coefficients belong to the interval $(0,1)$. One must note that equality of homothetic coefficients is not assumed. A self-affine set on the plane is a non-empty compact subset that is invariant with respect to the considered family of homotheties. The existence and uniqueness of such a set is provided by Hutchinson's theorem. The goal of present work is to investigate the influence of homothetic coefficients on the properties of a self-affine set. To describe the set, barycentric coordinates on the plane are introduced. The conditions are found under which the self-affine set is: a) the hexagon P; b) a Cantor set in the hexagon P. The Minkowski and the Hausdorff dimensions of the indicated sets are calculated. The conditions providing vanishing Lebesgue measure of self-affine set are obtained. Examples of self-affine sets from the considered class are presented.

Keywords: self-affine set, homothety, Cantor set, iterated function system, attractor, Lebesgue measure

For citation: *A. V. Bagaev*. On a class of self-affine sets on the plane given by six homotheties. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 519–530. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.519-530

About the authors:

Andrey V. Bagaev, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev (24 Minina St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Phys. and Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5155-4175, a.v.bagaev@gmail.com

1. Введение

Рассмотрим множество $\{f_1,\ldots,f_k\}$, состоящее из k сжимающих отображений полного метрического пространства X. Если непустое компактное множество $\mathcal{A}\subset X$ удовлетворяет равенству

$$f_1(\mathcal{A})\cup f_2(\mathcal{A})\cup\ldots\cup f_k(\mathcal{A})=\mathcal{A}, \tag{1.1}$$

то оно называется самоподобным. В случае, когда $X=\mathbb{E}^n$ — n-мерное евклидово пространство, а отображения f_i, $i=1,\ldots,k$, являются аффинными, самоподобное множество $\mathcal{A}$ называется самоаффинным.

Пусть $\mathcal{K}(X)$ — множество всех компактных подмножеств полного метрического пространства X. Согласно теореме Хатчинсона [1] (см. также [2–3]) множество $\mathcal{K}(X)$, наделенное метрикой Хаусдорфа, является полным метрическим пространством, а отображение $F\colon\mathcal{K}(X)\to\mathcal{K}(X)$, определенное формулой

$$F(K)=f_1(K)\cup f_2(K)\cup\ldots\cup f_k(K)\quad\forall K\in\mathcal{K}(X),$$

является сжимающим. Согласно теореме Банаха сжимающее отображение F имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$, т. е. для любой конечной системы сжимающих отображений $\{f_1, \ldots, f_k\}$ существует самоподобное множество $\mathcal{A}$, удовлетворяющее равенству (1.1). При этом самоподобное множество $\mathcal{A}$ может быть получено как предел

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} F^n(K_0) \quad \forall\ K_0 \in \mathcal{K}(X),$$

где $F^n = F \circ \ldots \circ F$ (n раз).

Система сжимающих отображений также называется системой итерированных функций (СИФ), множество $\mathcal{A}$ — аттрактором СИФ, а отображение F — отображением Хатчинсона.

Системы итерированных функций представляют собой важный частный случай многозначных динамических систем со сжимающими трансформациями. СИФ стали активно изучаться сравнительно недавно, начиная с 1981 г., после работ Дж. Э. Хатчинсона [1] и М. Хаты [4], монографии М. Ф. Барнсли [5], ставших классическими в области фрактальной геометрии, и запатентованных М. Ф. Барнсли и А. Слоуном алгоритмов фрактального сжатия изображений.

Аттракторы СИФ могут быть как фракталами, так и «регулярными» множествами, например, отрезком, треугольником, квадратом.

Самоаффинные множества на плоскости, заданные тремя гомотетиями f_1, f_2, f_3 с аффинно независимыми центрами, исследовались в работах [6–8]. Если все три гомотетии имеют один коэффициент подобия $\lambda = 1/2$, то самоаффинное множество $\mathcal{A}$ является треугольником (салфеткой) Серпинского. Из работы [6] известно, что если коэффициент гомотетий $\lambda \geq 2/3$, то самоаффинное множество $\mathcal{A}$ представляет собой треугольник $\triangle$ с вершинами в центрах гомотетий. Если $\lambda < 1/2$, то $\mathcal{A}$ — канторово множество в треугольнике $\triangle$.

В работе [8] исследовалось самоаффинное множество $\mathcal{A}$, заданное тремя гомотетиями плоскости f_1, f_2, f_3 с аффинно независимыми центрами и произвольными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (0, 1)$. В [9–10] изучалось влияние на самоаффинное множество коэффициентов $(n + 1)$-й гомотетии с аффинно независимыми центрами в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$.

В работе [6] подчеркивается, что особый интерес представляют самоаффинные множества на плоскости, заданные гомотетиями, центры которых образуют правильный n-угольник.

Цель данной работы — исследовать самоаффинные множества на плоскости, заданные шестью гомотетиями, центры которых находятся в вершинах правильного шестиугольника. Отметим, что равенство коэффициентов гомотетий не предполагается.

2. Свойства самоаффинных множеств

Пусть множество $S = \{f_1, \ldots, f_6\}$ состоит из шести гомотетий плоскости с коэффициентами $\lambda_i \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, 6$, и центрами $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, являющимися вершинами правильного шестиугольника P. Обозначим самоаффинное множество, задаваемое S, через $\mathcal{A}$. Самоаффинное множество $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами.

Теорема 2.1. *1. Самоаффинное множество $\mathcal{A}$ совпадает с шестиугольником P тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_i + \lambda_{i+1} \geq 1,\ i = 1, \ldots, 5,\ \lambda_1 + \lambda_6 \geq 1. \tag{2.1}$$

2. *Если* $\lambda_i + \lambda_j \leq \dfrac{2}{3}$ $\forall\ i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,6$, *то размерности Хаусдорфа и Минковского самоаффинного множества* $\mathcal{A}$ *совпадают и равны* d, *где* d *удовлетворяет равенству*
$$\lambda_1^d + \ldots + \lambda_6^d = 1. \tag{2.2}$$
Более того, при $\lambda_i + \lambda_j < \dfrac{2}{3}$ $\forall\ i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,6$, *множество* $\mathcal{A}$ *— канторово множество в шестиугольнике* P.

3. *Если существуют такие* $i, j \in \{1,\ldots,6\}$, $i \neq j$, *что* $\lambda_i + \lambda_j \geq 1$, *то* $\mathcal{A}$ *не является канторовым множеством.*

4. *Если* $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_6^2 < 1$, *то мера Лебега множества* $\mathcal{A}$ *равна нулю:* $\mu(\mathcal{A}) = 0$.

Доказательство. Продолжив стороны A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 шестиугольника P, получим треугольник $\triangle KLN$. Введем на плоскости барицентрические координаты (Б-координаты), исходя из треугольника $\triangle KLN$ (Рис. 2.1).

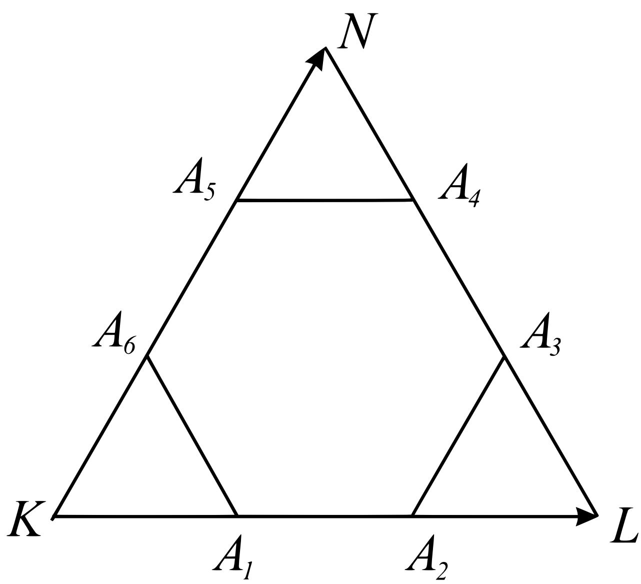

Рис. 2.1. Треугольник $\triangle KLN$
Fig. 2.1. Triangle $\triangle KLN$

Б-координаты (x_1, x_2, x_3) произвольной точки M определяются из системы
$$\begin{cases} \overrightarrow{KM} = x_2\overrightarrow{KL} + x_3\overrightarrow{KN}, \\ x_1 = 1 - x_2 - x_3. \end{cases}$$

Вершины треугольника $\triangle KLN$ имеют следующие Б-координаты: $K(1,0,0)$, $L(0,1,0)$, $N(0,0,1)$, а вершины шестиугольника P —
$$A_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right);\ \ A_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right);\ \ A_3\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right);$$
$$A_4\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right);\ \ A_5\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right);\ \ A_6\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right).$$

Заметим, что шестиугольник P в Б-координатах может быть записан как множество

$$P=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid 0\le x_1\le\frac{2}{3};\;\; 0\le x_2\le\frac{2}{3};\;\; 0\le x_3\le\frac{2}{3}\right\}.$$

Нетрудно показать, что гомотетии f_i с центрами в точках A_i и коэффициентами λ_i, $i=1,...,6$, задаются формулами:

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\left(\lambda_1\left(x_1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3};\;\lambda_1\left(x_2-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3};\;\lambda_1 x_3\right),$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=\left(\lambda_2\left(x_1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3};\;\lambda_2\left(x_2-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3};\;\lambda_2 x_3\right),$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\left(\lambda_3 x_1;\;\lambda_3\left(x_2-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3};\;\lambda_3\left(x_3-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right),$$

$$f_4(x_1,x_2,x_3)=\left(\lambda_4 x_1;\;\lambda_4\left(x_2-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3};\;\lambda_4\left(x_3-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\right),$$

$$f_5(x_1,x_2,x_3)=\left(\lambda_5\left(x_1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3};\;\lambda_5 x_2;\;\lambda_5\left(x_3-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\right),$$

$$f_6(x_1,x_2,x_3)=\left(\lambda_6\left(x_1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3};\;\lambda_6 x_2;\;\lambda_6\left(x_3-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right).$$

Тогда образы $f_i(P)$ шестиугольника P определены равенствами:

$$f_1(P)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;\frac{2-2\lambda_1}{3}\le x_1\le\frac{2}{3};\;\frac{1-\lambda_1}{3}\le x_2\le\frac{1+\lambda_1}{3};\;0\le x_3\le\frac{2\lambda_1}{3}\right\},\quad(2.3)$$

$$f_2(P)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;\frac{1-\lambda_2}{3}\le x_1\le\frac{1+\lambda_2}{3};\;\frac{2-2\lambda_2}{3}\le x_2\le\frac{2}{3};\;0\le x_3\le\frac{2\lambda_2}{3}\right\},$$

$$f_3(P)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;0\le x_1\le\frac{2\lambda_3}{3};\;\frac{2-2\lambda_3}{3}\le x_2\le\frac{2}{3};\;\frac{1-\lambda_3}{3}\le x_3\le\frac{1+\lambda_3}{3}\right\},$$

$$f_4(P)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;0\le x_1\le\frac{2\lambda_4}{3};\;\frac{1-\lambda_4}{3}\le x_2\le\frac{1+\lambda_4}{3};\;\frac{2-2\lambda_4}{3}\le x_3\le\frac{2}{3}\right\},$$

$$f_5(P)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;\frac{1-\lambda_5}{3}\le x_1\le\frac{1+\lambda_5}{3};\;0\le x_2\le\frac{2\lambda_5}{3};\;\frac{2-2\lambda_5}{3}\le x_3\le\frac{2}{3}\right\},$$

$$f_6(P)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;\frac{2-2\lambda_6}{3}\le x_1\le\frac{2}{3};\;0\le x_2\le\frac{2\lambda_6}{3};\;\frac{1-\lambda_6}{3}\le x_3\le\frac{1+\lambda_6}{3}\right\}.\quad(2.4)$$

Перейдем к доказательству теоремы.

1. Пусть выполнены условия (2.1). Докажем, что $\mathcal{A}=P$. Пусть $A_0\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ — центр шестиугольника P. Обозначим треугольник с вершинами в точках A_1, A_0, A_6 через $\triangle_{16}$. Покажем, что $\triangle_{16}\subset f_1(P)\cup f_6(P)$. Заметим, что

$$\triangle_{16}=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;\frac{1}{3}\le x_1\le\frac{2}{3};\;0\le x_2\le\frac{1}{3};\;0\le x_3\le\frac{1}{3}\right\}.$$

Поскольку $\lambda_1 + \lambda_6 \geq 1$, то хотя бы одно из значений λ_1 и λ_6 больше или равно $1/2$. Пусть $\lambda_1 \geq \dfrac{1}{2}$.

Представим $\triangle_{16}$ в виде объединения двух областей (Рис. 2.2):

$$\triangle_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3};\ \frac{1-\lambda_1}{3} \leq x_2 \leq \frac{1}{3};\ 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{3}\right\},$$

$$\triangle_6 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \frac{1+\lambda_1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3};\ 0 \leq x_2 \leq \frac{1-\lambda_1}{3};\ \frac{\lambda_1}{3} \leq x_3 \leq \frac{1}{3}\right\}.$$

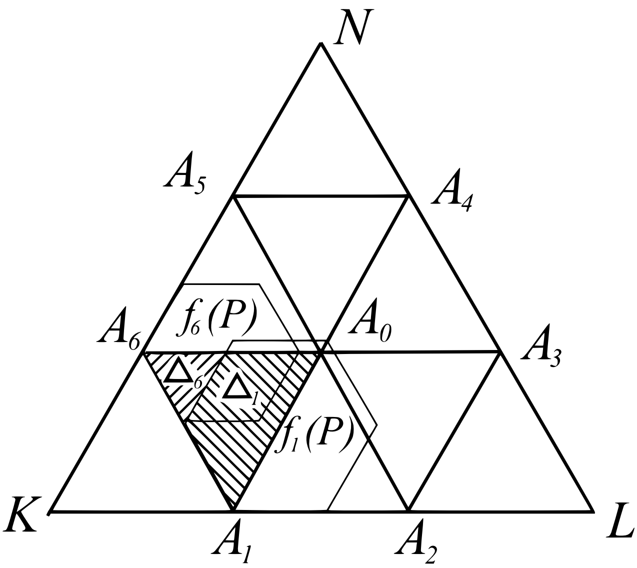

Рис. 2.2. Область $\triangle_{16} = \triangle_1 \cup \triangle_6$
Fig. 2.2. The area $\triangle_{16} = \triangle_1 \cup \triangle_6$

Поскольку $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$, то

$$\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{2-2\lambda_1}{3}; \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{1-\lambda_1}{3}; \frac{1}{3}\right] \subset \left[\frac{1-\lambda_1}{3}; \frac{1+\lambda_1}{3}\right], \quad \left[0; \frac{1}{3}\right] \subset \left[0; \frac{2\lambda_1}{3}\right].$$

Следовательно, принимая во внимание равенство (2.3), будем иметь включение $\triangle_1 \subset f_1(P)$.

Поскольку $\lambda_1 + \lambda_6 \geq 1$, то $\lambda_1 + 2\lambda_6 \geq 1$. Поэтому

$$\left[\frac{1+\lambda_1}{3}; \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{2-2\lambda_6}{3}; \frac{2}{3}\right], \quad \left[0; \frac{1-\lambda_1}{3}\right] \subset \left[0; \frac{2\lambda_6}{3}\right], \quad \left[\frac{\lambda_1}{3}; \frac{1}{3}\right] \subset \left[\frac{1-\lambda_6}{3}; \frac{1+\lambda_6}{3}\right].$$

Отсюда в силу равенства (2.4) будем иметь включение $\triangle_6 \subset f_6(P)$.

Таким образом, $\triangle_{16} = \triangle_1 \cup \triangle_6 \subset f_1(P) \cup f_6(P)$.

Аналогично можно показать, что $\triangle_{i,i+1} \subset f_i(P) \cup f_{i+1}(P)\ \forall i = 1, \ldots, 5$, где $\triangle_{i,i+1}$ — треугольник с вершинами A_i, A_0, A_{i+1}. Отсюда

$$P = \triangle_{16} \cup \triangle_{12} \cup \triangle_{23} \cup \triangle_{34} \cup \triangle_{45} \cup \triangle_{56} \subset \bigcup_{i=1}^{6} f_i(P).$$

Так как $f_i(P) \subset P$ $\forall i = 1, \ldots, 6$, то

$$\bigcup_{i=1}^{6} f_i(P) \subset P.$$

Следовательно, $P = \bigcup_{i=1}^{6} f_i(P)$ и в силу единственности самоаффинного множества для системы S имеем $\mathcal{A} = P$.

Докажем обратное: пусть теперь $\mathcal{A} = P$. Предположим противное: пусть, например, $\lambda_1 + \lambda_6 < 1$. Рассмотрим точку $M(\frac{2}{3}, \frac{1-\lambda_1+\lambda_6}{6}, \frac{1+\lambda_1-\lambda_6}{6})$. Поскольку $0 \leq \frac{1-\lambda_1+\lambda_6}{6} \leq \frac{2}{3}$, $0 \leq \frac{1+\lambda_1-\lambda_6}{6} \leq \frac{2}{3}$, то $M \in P$. В силу условия $\lambda_1 + \lambda_6 < 1$ имеем $\frac{1-\lambda_1+\lambda_6}{6} < \frac{1-\lambda_1}{3}$ и $\frac{1+\lambda_1-\lambda_6}{6} < \frac{1-\lambda_6}{3}$. Благодаря первому неравенству $M \notin f_1(P)$, а благодаря второму $M \notin f_6(P)$. Поскольку $\lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, 6$, а первая координата точки равна $2/3$, то $M \notin f_i(P)$, $i = 2, 3, 4, 5$. Итак, $M \notin f_i(P)$ $\forall i = 1, \ldots, 6$, следовательно, $P \neq \bigcup_{i=1}^{6} f_i(P)$, т. е. $\mathcal{A} \neq P$. Получаем противоречие, значит предположение, что $\lambda_1+\lambda_6 < 1$, неверно. Итак, равенство $\mathcal{A} = P$ влечет $\lambda_1+\lambda_6 \geq 1$, $\lambda_i+\lambda_{i+1} \geq 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

2. Пусть теперь $\lambda_i + \lambda_j \leq \frac{2}{3}$ $\forall\ i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, 6$. Напомним [3], что система сжимающих отображений $\{g_1, \ldots, g_k\}$ удовлетворяет условию открытого множества (open set condition), если существует такое открытое множество U, что:

a) $g_i(U) \subset U$ $\forall\ i = 1, \ldots, k$;

b) $g_i(U) \cap g_j(U) = \emptyset$ $\forall\ i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$.

Пусть $\lambda_i + \lambda_j \leq \frac{2}{3}$ $\forall\ i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, 6$. Обозначим через $\dot{P}$ внутренность шестиугольника P. Проверим, что для системы $S = \{f_1, \ldots, f_6\}$ открытое множество $U = \dot{P}$ удовлетворяет условиям a) и b) определения выше.

Очевидно, что $f_i(\dot{P}) \subset \dot{P}$ $\forall i = 1, \ldots, 6$. Покажем, что $f_1(\dot{P})$ не пересекается с $f_i(\dot{P})$ $\forall i = 2, \ldots, 6$.

Для того, чтобы показать, что $f_1(\dot{P}) \cap f_2(\dot{P}) = \emptyset$, рассмотрим два случая: a) $\lambda_1 \geq \lambda_2$; b) $\lambda_1 < \lambda_2$.

Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{2}{3}$, то в случае a) будем иметь $\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1$. Следовательно, $\frac{1+\lambda_1}{3} \leq \frac{2-2\lambda_2}{3}$ и тогда $f_1(\dot{P})$ и $f_2(\dot{P})$ находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{1-\lambda_1}{3} < x_2 < \frac{1+\lambda_1}{3}, \qquad \frac{2-2\lambda_2}{3} < x_2 < \frac{2}{3}.$$

Если же имеет место условие b), то $2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$. Из этого следует, что $\frac{1+\lambda_2}{3} \leq$ $\leq \frac{2-2\lambda_1}{3}$ и $f_1(\dot{P})$ и $f_2(\dot{P})$ находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{2-2\lambda_1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}, \qquad \frac{1-\lambda_1}{3} < x_1 < \frac{1+\lambda_1}{3}.$$

Итак, $f_1(\dot{P}) \cap f_2(\dot{P}) = \emptyset$.

Аналогично, рассмотрев два случая a) $\lambda_1 \geq \lambda_6$, b) $\lambda_1 < \lambda_6$, можно показать, что в силу условия $\lambda_1 + \lambda_6 \leq \dfrac{2}{3}$, выполняется равенство $f_1(\dot{P}) \cap f_6(\dot{P}) = \emptyset$.

Поскольку $\lambda_1 + \lambda_3 \leq \dfrac{2}{3} < 1$, то $\dfrac{2\lambda_3}{3} \leq \dfrac{2-2\lambda_1}{3}$ и поэтому $f_1(\dot{P})$ и $f_3(\dot{P})$ находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{2-2\lambda_1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}, \qquad 0 < x_1 < \frac{2\lambda_3}{3}.$$

Поскольку $\lambda_1 + \lambda_4 \leq \dfrac{2}{3} < 1$, то $\dfrac{2\lambda_4}{3} \leq \dfrac{2-2\lambda_1}{3}$. Следовательно, $f_1(\dot{P})$ и $f_4(\dot{P})$ находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{2-2\lambda_1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}, \qquad 0 < x_1 < \frac{2\lambda_4}{3}.$$

В силу $\lambda_1 + \lambda_5 \leq \dfrac{2}{3} < 1$, имеем $\dfrac{2\lambda_1}{3} \leq \dfrac{2-2\lambda_5}{3}$ и $f_1(\dot{P})$ и $f_5(\dot{P})$ находятся в непересекающихся полосах

$$0 < x_3 < \frac{2\lambda_1}{3}, \qquad \frac{2-2\lambda_5}{3} < x_3 < \frac{2}{3}.$$

Таким образом, $f_1(\dot{P}) \cap f_i(\dot{P}) = \emptyset \ \forall\, i = 2, ..., 6$.

Аналогично доказывается, что $f_i(\dot{P}) \cap f_j(\dot{P}) = \emptyset \ \forall\, i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6$.

Итак, для системы $\{f_1, \ldots, f_6\}$ выполнено условие открытого множества. Как известно (см., например, теорему 9.3 [3]), если для системы сжимающих отображений выполнено условие открытого множества, то размерности Минковского и Хаусдорфа самоаффинного множества $\mathcal{A}$ совпадают и равны d, где d удовлетворяет равенству (2.2).

Пусть теперь $\lambda_i + \lambda_j < \frac{2}{3}\ \forall i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6$. Тогда в доказательстве выше все неравенства будут строгими. Следовательно, $f_i(P) \cap f_j(P) = \emptyset \ \forall\, i \neq j,\ i, j = 1, \ldots 6$.

Положим $P_{i_1 \ldots i_n} = f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}(P)$, $n \in \mathbb{N}$, $i_s \in \{1, \ldots, 6\}$, $s = 1, \ldots, n$. Поскольку $\lambda_i + \lambda_j < \dfrac{2}{3}\ \forall\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6$, то шестиугольники $P_{i_1 \ldots i_n}$ и $P_{j_1 \ldots j_n}$ для разных наборов индексов не пересекаются. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\Pi_n = F^n(P) = \bigsqcup_{\sigma_n} P_{i_1 \ldots i_n},$$

где объединение берется по всем наборам $\sigma_n = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, 6\}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в P :

$$P \supset \Pi_1 \supset \Pi_2 \supset \Pi_3 \supset \ldots \supset \Pi_n \supset \ldots$$

Согласно теореме Хатчинсона самоподобное множество

$$\mathcal{A} = \lim_{n \to \infty} F^n(P) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi_n.$$

Покажем, что множество $\mathcal{A}$ является канторовым, т. е. совершенным вполне несвязным множеством.

Множество $\mathcal{A}$ является замкнутым как компактное множество. Рассмотрим произвольную точку $M \in \mathcal{A}$. Тогда $M \in \Pi_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой шестиугольник $P_{i_1\ldots i_n}$, что $M \in P_{i_1\ldots i_n}$. Обозначим через M_n любую вершину этого шестиугольника, удовлетворяющую условию $M_n \neq M$. Из построения последовательности $\{M_n\}$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$. Отметим, что $M_n \in \mathcal{A}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, следовательно, множество $\mathcal{A}$ не имеет изолированных точек и является совершенным.

Напомним ([2]), что система сжимающих отображений $T = \{g_1, \ldots, g_k\}$ называется вполне несвязной, если

a) g_i — биекция $\forall\ i = 1, \ldots, k$;

b) $g_i(\mathcal{A}_T) \cap g_j(\mathcal{A}_T) = \emptyset\ \forall\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, k$,

где $\mathcal{A}_T$ — самоподобное множество для T.

Поскольку гомотетии являются биекциями, то условие a) для системы $S = \{f_1, \ldots, f_6\}$ выполнено. Поскольку $\mathcal{A} \subset P$ и $f_i(P) \cap f_j(P) = \emptyset\ \forall\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6$, то $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset\ \forall\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6$, т. е. для системы S выполнено условие b) определения вполне несвязной системы. Итак, S является вполне несвязной. Как известно из [2], самоподобное множество $\mathcal{A}$ для вполне несвязной системы является вполне несвязным.

Таким образом, при $\lambda_i + \lambda_j < \dfrac{2}{3}\ \forall\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6$, самоподобное множество $\mathcal{A}$ является канторовым.

3. Пусть найдутся такие $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, $i \neq j$, что $\lambda_i + \lambda_j \geq 1$. Рассмотрим отрезок A_iA_j. При гомотетиях f_i и f_j прямая L_{ij}, проходящая через точки A_i и A_j, инвариантна: $f_i(L_{ij}) = f_j(L_{ij}) = L_{ij}$. В силу условия $\lambda_i + \lambda_j \geq 1$ имеем $f_i(A_iA_j) \cup f_j(A_iA_j) = A_iA_j$. Следовательно, имеют место включения $A_iA_j \subset F(A_iA_j) \subset F^2(A_iA_j) \subset F^3(A_iA_j) \subset \ldots$, т. е. $A_iA_j \subset F^n(A_iA_j)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Тогда согласно теореме Хатчинсона

$$A_iA_j \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(A_iA_j) = \lim_{n\to\infty} F^n(A_iA_j) = \mathcal{A}.$$

Таким образом, самоаффинное множество $\mathcal{A}$ будет содержать отрезок и, следовательно, $\mathcal{A}$ не является канторовым множеством.

4. Поскольку f_i — аффинное преобразование плоскости с коэффициентом сжатия λ_i, $i = 1, \ldots, 6$, то $\mu(f_i(\mathcal{A})) = \lambda_i^2 \mu(\mathcal{A})$, $i = 1, \ldots, 6$. В силу полуаддитивности меры Лебега μ имеем

$$\mu(\mathcal{A}) = \mu(\bigcup_{i=1}^{6} f_i(\mathcal{A}) \leq \sum_{i=1}^{6} \mu(f_i(\mathcal{A})) = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i^2 \mu(\mathcal{A}) = \left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i^2\right) \mu(\mathcal{A}).$$

Таким образом,

$$\mu(\mathcal{A}) \leq \left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i^2\right) \mu(\mathcal{A}). \tag{2.5}$$

Предположим, что $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$. Тогда в силу неравенства (2.5) получим $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_6^2 \geq 1$. Однако по условию пункта 4 теоремы 2.1 $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_6^2 < 1$, поэтому предположение $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$ неверно. Следовательно, $\mu(\mathcal{A}) = 0$.

Доказательство завершено.

Непосредственно из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть все коэффициенты гомотетий одинаковы:* $\lambda_i = \lambda\ \forall\ i = 1, \ldots, 6$.

1. *Самоаффинное множество $\mathcal{A}$ совпадает с шестиугольником P тогда и только тогда, когда $\lambda \geq \frac{1}{2}$.*

2. *Если $\lambda \leq \frac{1}{3}$, то размерности Минковского и Хаусдорфа самоаффинного множества $\mathcal{A}$ совпадают и равны $d = -\frac{\ln 6}{\ln \lambda}$, а при $\lambda < \frac{1}{3}$ множество $\mathcal{A}$ — канторово множество в шестиугольнике P.*

3. *Если $\lambda < \frac{1}{\sqrt{6}}$, то $\mu(\mathcal{A}) = 0$.*

3. Примеры самоаффинных множеств

П р и м е р 3.1. Пусть $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$. Поскольку сумма любых двух коэффициентов меньше $\frac{2}{3}$, то согласно пункту 2 теоремы 2.1 самоаффинное множество $\mathcal{A}$ является канторовым (Рис. 3.1). Размерности Хаусдорфа и Минковского множества $\mathcal{A}$ совпадают и равны d, где d удовлетворяет уравнению

$$3\left(\frac{1}{4}\right)^d + 3\left(\frac{3}{10}\right)^d = 1,$$

отсюда $d \approx 1,3896$.

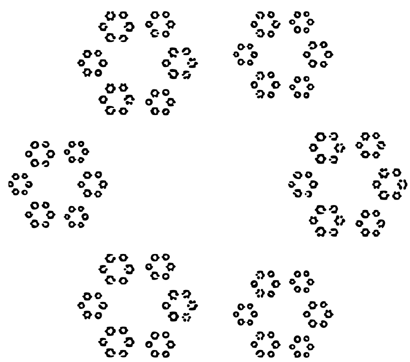

Рис. 3.1. Самоаффинное множество при $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$.

Fig. 3.1. A self-affine set for $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$.

П р и м е р 3.2. Пусть $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = \lambda_6 = \frac{1}{6}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{3}$. Так как $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_5 = 1$, то согласно пункту 3 теоремы 2.1 самоаффинное множество $\mathcal{A}$ содержит в себе три отрезка A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 и поэтому $\mathcal{A}$ не является канторовым множеством (см. Рис. 3.2).

Отметим, что в примерах 3.1 и 3.2 для коэффициентов гомотетий выполнено условие $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_6^2 < 1$. Следовательно, для этих примеров согласно пункту 4 теоремы 2.1 мера Лебега самоаффинных множеств равна нулю.

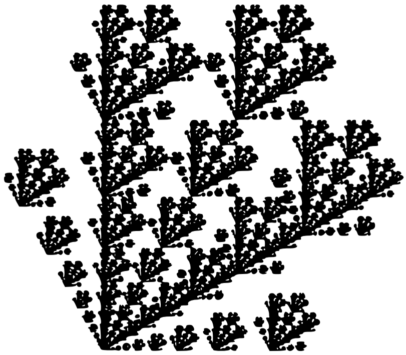

Рис. 3.2. Самоаффинное множество при
$\lambda_1 = \dfrac{2}{3}$, $\lambda_2 = \lambda_6 = \dfrac{1}{6}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \dfrac{1}{3}$.

Fig. 3.2. A self-affine set for $\lambda_1 = \dfrac{2}{3}$, $\lambda_2 = \lambda_6 = \dfrac{1}{6}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \dfrac{1}{3}$.

Список литературы

1. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. Vol. 30, no. 5. pp. 713–747.

2. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

3. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: Wiley, 2014. 400 p.

4. Hata M. On the structure of self-similar sets // Japan J. Appl. Math. 1985. Vol. 2. pp. 381–414.DOI: https://doi.org/10.1007/BF03167083

5. Barnsley M. F. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.

6. Broomhead D., Montaldi J., Sidorov N. Golden gaskets: variations on the Sierpinski sieve // Nonlinearity. 2004. Vol. 17, no. 4. pp. 1455–1480. DOI: https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/4/017

7. Jordan Th. Dimension of fat Sierpinski gaskets // Real Anal. Exchange. 2005. Vol. 31. pp. 97–110.

8. Багаев А.В., Киселева А.В. Аттракторы систем трех итерированных гомотетий евклидовой плоскости // Тезисы доклада XXIX Всерос. науч.-практ. конф. «КОГРАФ–2019» 2019. С. 136–140.

9. Багаев А.В., Киселева А.В. О многомерных аналогах треугольника Серпинского // XXVI Междунар. науч.-техн. конф. «Информационные системы и технологии–2020» : сб. мат. Н.Новгород, 2020. С. 1148–1152.

10. Багаев А.В., Киселева А.В. О мере Лебега аттракторов, заданных гомотетиями с аффинно независимыми центрами // XXVII Междунар. науч.-техн. конф. «Информационные системы и технологии–2021» : сб. мат. Н.Новгород, 2021. С. 945 – 948.

Поступила 18.11.2022; доработана после рецензирования 22.01.2023; принята к публикации 24.02.2023

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. J. E. Hutchinson, "Fractals and self-similarity", *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:5 (1981), 713–747.

2. R. M. Crownover, *Introduction in fractals and chaos*, Jones and Bartlett Publ., Boston, 1995, 350 p.

3. K. J. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, Wiley, New York, 2014, 400 p.

4. M. Hata, "On the structure of self-similar sets", *Japan J. Appl. Math.*, **2** (1985), 381–414. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03167083

5. M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988, 394 p.

6. D. Broomhead, J. Montaldi, N. Sidorov, "Golden gaskets: variations on the Sierpinski", *Nonlinearity*, **17**:4 (2004), 1455–1480. DOI: https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/4/017

7. Th. Jordan, "Dimension of fat Sierpinski gaskets", *Real Anal. Exchange*, **31**:1 (2005), 97–110.

8. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, "Attractors of systems of three iterated homotheties of the Euclidean plane", *XXIX Russian Scientific and Practical Conference on Graphic Information Technologies and Systems (KOGRAF-2019): Proceedings*, 2019, 136–140 (In Russ.).

9. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, "On multidimensional analogs of the Sierpinski triangle", *XXVI International Scientifc and Technical Conference "Information Systems and Technologies-2020": Proceedings*, 2020, 1148–1152 (In Russ.).

10. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, "On the Lebesgue measure of the attractors given by homotheties with affine independent centers", *XXVI International Scientifc and Technical Conference "Information Systems and Technologies-2021": Proceedings*, 2021, 945–948 (In Russ.).

Submitted 18.11.2022; Revised 22.01.2023; Accepted 24.02.2023

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.