

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.452-468

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.64

Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел

Д. А. Шишканов, М. В. Ветчинников, Ю. Н. Дерюгин

ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ» (г. Саров, Россия)

Аннотация. В статье проводится исследование метода перидинамики – альтернативного подхода к решению задач разрушения, основанного на интегральных уравнениях. Предполагается, что частицы в континууме взаимодействуют друг с другом на конечном расстоянии, как в молекулярной динамике. Повреждение является частью теории на уровне взаимодействия двух частиц, поэтому нахождение повреждения и разрушение происходит при решении уравнения движения. В ходе проделанной работы были описаны перидинамические модели разрушения на основе связи и на основе состояний, используемые в Сандийской лаборатории, и реализованы в рамках комплекса программ молекулярной динамики MoDyS. В модели, основанной на связи, определяющим соотношением является функция жесткости связи, которая корректирует силу взаимодействия частиц и накладывает ограничение на использование коэффициента Пуассона. Модель на основе состояний обобщает подход на основе связи и применяется для материалов с любым коэффициентом Пуассона. Определена связь моделей, показана сходимость на примере одномерной задачи упругости и возможность применения реализованных моделей для задач разрушения. Внедрение макромасштабного метода перидинамики в комплекс программ молекулярной динамики MoDyS позволит в дальнейшем осуществить идею гибридного моделирования.

Ключевые слова: перидинамика, механика сплошных сред, молекулярная динамика, нелокальные взаимодействия, бессеточный метод, модель разрушения, функция жесткости связи

Для цитирования: Шишканов Д. А., Ветчинников М. В., Дерюгин Ю. Н. Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>

Об авторах:

Шишканов Дмитрий Алексеевич, математик научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, dima.shishkanov.96@mail.ru

Ветчинников Максим Владимирович, начальник научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738> vetchinnikov_max@mail.ru

Дерюгин Юрий Николаевич, главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru



MSC2020 45K05 37N15

Peridynamics method for problems solve of solids destruction

D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin

FSUE RFNC – VNIIEF (Sarov, Russia)

Abstract. The article investigates the method of peridynamics, which is an alternative approach to solving destruction problems based on integral equations. It is assumed that particles in a continuum interact with each other at a finite distance, as in molecular dynamics. Damage is part of the theory at the level of two-particle interactions, so damage finding and destruction occurs when solving the equation of motion. During this work, bond-based and state-based peridynamics models of destruction used in the Sandia Laboratory were described and implemented within the framework of the MoDyS molecular dynamics software package. In the bond-based model, the defining relationship is the bond stiffness function, which corrects the force of particle-particle interaction and imposes a restriction on the use of the Poisson's ratio. The state-based model generalizes the bond-based approach and may be applied to materials with any Poisson's ratio. The relationship of both models is ascertained. Calculation convergence is demonstrated on the example of a one-dimensional elasticity problem. The possibility of using the implemented models for fracture problems is also shown.

Keywords: peridynamics, continuum mechanics, molecular dynamics, nonlocal interactions, mesh-free method, fracture model, bond stiffness function

For citation: D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin. Peridynamics method for problems solve of solids destruction. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:4(2022), 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>

About the authors:

Dmitry A. Shishkanov, research laboratory mathematician, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, dima.shishkanov.96@mail.ru

Maxim V. Vetchinnikov, Head of research laboratory, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738> vetchinnikov_max@mail.ru

Yuriy N. Deryugin, Chief Researcher, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

1. Введение

Многие задачи в механике твердого тела приводят к формированию и развитию трещин. При численном решении подобных задач в классической теории возникает сложность, которая связана с использованием дифференциальных уравнений в частных производных. Для уравнений сплошной среды необходимы пространственные производные, которые не существуют на поверхности разрыва трещины. Поэтому любой

численный метод для решения уравнений в частных производных сталкивается с проблемами при моделировании трещин.

Метод перидинамики – альтернативный подход к решению задач разрушения, основанный на интегральных уравнениях, а не дифференциальных. Перидинамическая теория, введенная Силингом [1], является нелокальным представлением механики твердого тела, которая заключается в задании основных уравнений движения таким образом, чтобы они применялись всюду в твердом теле вне зависимости от наличия разрывов. Предполагается, что макрочастицы в континууме взаимодействуют друг с другом на конечном расстоянии, как в молекулярной динамике. Повреждение является частью теории на уровне взаимодействия двух частиц, поэтому нахождение повреждения и разрушение происходит при решении уравнения движения. На данный момент существует несколько различных моделей разрушения, которые представлены в справочниках по перидинамике [2; 3]. В данной статье рассматриваются модели на основе связи и на основе состояний.

В модели, основанной на связи, используется парное взаимодействие, поэтому она применима только для материалов с коэффициентом Пуассона $1/4$ [4]. Задание силы межчастичного взаимодействия происходит посредством жесткости связи [5]. Для более точного определения жесткости связи необходимо учитывать длину связи, как представлено в работе [6]. Для этого вводится функция влияния. Силинг и др. [7] показали, что функция влияния должна удовлетворять определенным условиям непрерывности. В [8] рассмотрены некоторые способы задания функции жесткости связи для 1D случая.

Модель на основе состояния, которая представлена в [9], является обобщением модели на основе связи. В ней значение силы, действующей на каждую частицу в связи, зависит от положения частицы в пределах ее горизонта через относительное смещение. Такая модель применяется для материалов с любым коэффициентом Пуассона благодаря функции влияния. Эта функция используется в перидинамике для ограничения силы, действующей на частицу, и корректировки прочности связи [10]. Ее роль в перидинамической теории рассматривается в работе [11]. Селесон показал связь между моделями на основе связи и на основе состояния через сферическую функцию влияния [12].

Цель исследования, проведенного в рамках данной работы, заключается в реализации перидинамических моделей разрушения Сандийской лаборатории [13]. В силу того, что уравнения перидинамики очень похожи на уравнения молекулярной динамики (МД), реализация перидинамических моделей осуществляется в рамках комплекса программ молекулярной динамики MoDyS (Molecular Dynamic Simulation) [14]. Первые совместная реализация этих разномасштабных методов была произведена Силингом в пакете программ LAMMPS [15].

Оба метода являются нелокальным представлением сплошной среды, но в разных масштабах. Внедрение метода перидинамики в MoDyS позволит в дальнейшем осуществить идею гибридного моделирования [16], которая даст возможность понять поведение материалов на разных масштабных уровнях при разрушениях. Реализация перидинамических моделей в комплексе программ MoDyS сводится к замене процедуры, ответственной за вычисление сил. Задачами исследования являлись изучение перидинамического метода на примере PMB (Prototype Microelastic Brittle) и LPS (Linear Peridynamic Solid) моделей, реализация алгоритмов из [13] в комплексе программ MoDyS и тестирование на примере простых задач упругости и задач разрушения.

2. Метод перидинамики

Твердое тело в перидинамической теории представляется набором частиц. Физическое взаимодействие между частицами осуществляется посредством связи, т. е. влияние частиц друг на друга происходит на конечном расстоянии внутри замкнутого горизонта. Перидинамика основана на интегральных уравнениях, благодаря чему избегает пространственные производные, которые не существуют на поверхностях разрыва в классической механике сплошных сред.

Для дискретной модели каждая частица (с номером i) наделена параметрами (массой — m_i , плотностью — ρ_i , начальными координатами — $\vec{r}_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$) и является макрообъектом. Движение деформируемой среды характеризуется дискретным вектором смещений $\vec{u}_i(u_i^x, u_i^y, u_i^z)$.

Аппроксимационные свойства метода определяются заданием векторов относительного положения частиц $\vec{\xi}_i = \vec{r}_k - \vec{r}_i$ и относительного смещения $\vec{\eta}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$ на дискретном множестве частиц, удовлетворяющих условию $|\vec{\xi}_i| < \delta$.

Уравнение движения частицы $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ задается в виде

$$\rho_i \ddot{u}_i(\vec{r}_i, t) = \int_{H_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k - \vec{u}_i, \vec{r}_k - \vec{r}_i) dV_{\vec{r}_k} + \vec{b}(\vec{r}_i, t), \quad (2.1)$$

где $H_{\vec{r}_i}$ — множество соседей частицы \vec{r}_i ; \vec{b} — граничные условия; \vec{f}_i — силы, определяющие взаимодействие частиц i и k .

Построение дискретной модели начинается с задания плотности энергии деформирования:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{H_{\vec{r}_i}} \vec{w}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{\xi}_i}, \quad (2.2)$$

где $\vec{w} = \vec{w}(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i)$ — энергия связи между частицами.

Сила межчастичного взаимодействия в общем виде определяется дифференцированием энергии связи:

$$\vec{f}_i(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{\eta}_i}(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|} \quad \forall \vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.3) и уравнение движения (2.1) образуют замкнутую систему уравнений перидинамики.

3. РМВ модель перидинамики

Данная модель основана на связях. Такие модели определяют силу взаимодействия двух частиц, основываясь на «истории» этих частиц (например, начальное и текущее положения). Сила задается уравнением

$$\vec{f}_i(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i) = cs\mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|}, \quad (3.1)$$

где c — упругая константа, задающая жесткость связи; s — деформация связи:

$$s = \frac{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i| - |\vec{\xi}_i|}{|\vec{\xi}_i|}, \quad (3.2)$$

а μ — скалярная функция положения материальной точки, которая принимает значения 1 или 0 и определяется формулой:

$$\mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) = \begin{cases} 1, & s(t', \vec{\xi}_i) < s_0 \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \\ 0, & s(t', \vec{\xi}_i) \geq s_0 \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \end{cases} \quad (3.3)$$

где s_0 — критическое удлинение разрыва связи (в настоящей работе полагается константой).

Введение разрыва на уровне связи позволяет точно выразить идею локального повреждения, которое определяется формулой:

$$\phi_i(\vec{r}_i, t) = 1 - \frac{\int_{H_{\vec{r}_i}} \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}}{\int_{H_{\vec{r}_i}} dV_{\vec{r}_k}}. \quad (3.4)$$

Повреждение принимает значения в диапазоне $0 \leq \phi_i \leq 1$, где 0 означает, что материал целый, а 1 означает завершенный разрыв связей частицы со всеми частицами, с которыми она изначально взаимодействовала.

4. Жесткость связи

Сила межчастичного взаимодействия (3.1) связана со смещением через жесткость связи между частицами. Для однородных деформаций в трехмерных задачах значение жесткости связи выводится в работе [4]. Такая жесткость пропорциональна модулю объемного сжатия

$$c = \frac{18K}{\pi\delta^4}. \quad (4.1)$$

Силинг и др. [8] предполагают, что возможны и другие виды функции жесткости связи, выбор которой влияет только на деформации внутри горизонта взаимодействия частицы и не оказывает влияния на решение задач упругости при стремлении горизонта к нулю.

5. Функция влияния

Жесткость связи (4.1) одинакова для всех связей внутри горизонта взаимодействия. Для более точного ее определения необходимо учитывать расстояние между частицами. В общем случае, жесткость связи — это функция, зависящая от длины связи и горизонта взаимодействия. Она должна удовлетворять определенным условиям непрерывности [7]. Чтобы учесть расстояние между частицами, функция жесткости связи записывается в виде

$$c(|\xi_i|, \delta) = c\omega(|\xi_i|, \delta), \quad (5.1)$$

где $\omega(|\xi_i|, \delta)$ — функция влияния, корректирующая устойчивость нелокальных взаимодействий двух частиц.

Рассмотрим примеры функций жесткости связи для одномерного случая [7]:

$$c(|\xi_i|, \delta) = \begin{cases} c_0, & |\xi_i| \leq \delta, \\ 0, & |\xi_i| \geq \delta, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$c(|\xi_i|, \delta) = \begin{cases} c_1 \left(1 - \frac{|\xi_i|}{\delta}\right), & |\xi_i| \leq \delta, \\ 0, & |\xi_i| \geq \delta, \end{cases} \tag{5.3}$$

$$c(|\xi_i|, \delta) = \begin{cases} c_2 \left(1 - \left(\frac{|\xi_i|}{\delta}\right)^2\right)^2, & |\xi_i| \leq \delta, \\ 0, & |\xi_i| \geq \delta. \end{cases} \tag{5.4}$$

Константы c_0, c_1, c_2 получаются, используя энергию связи между точками w из (2.3) и (3.1) и, сравнением плотности энергии деформации (2.2) с упругой плотностью энергии в классической теории $W = \frac{Es^2}{2}$, где E — модуль Юнга. Как видно на рисунке 5.1, введенная функция влияния в (5.1) позволяет уменьшать жесткость взаимодействия частиц при увеличении длины связи. Для функций типа (5.3) и (5.4) $c(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \delta$. Это дает более точное описание нелокального взаимодействия.

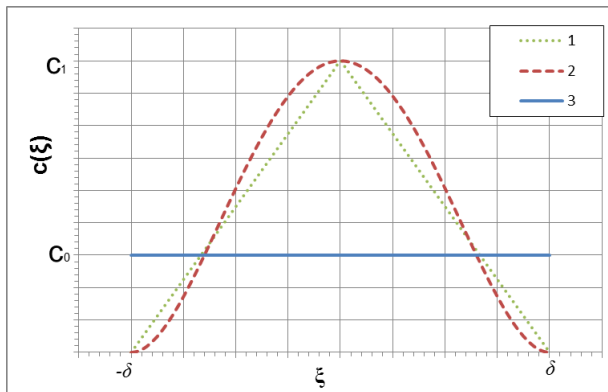


Рис. 5.1. Примеры функции жесткости связи $c(\xi)$: 1 — треугольная (5.3), 2 — квадратичная (5.4), 3 — постоянная (5.2)

Fig 5.1. Examples of the bond stiffness function $c(\xi)$: 1 — triangular (5.3), 2 — quadratic (5.4), 3 — constant (5.2)

6. LPS модель

Данная модель представляет собой обобщение подхода, основанного на связях [17]. Сила взаимодействия частиц является функцией полного набора частиц в нелокальных окрестностях этих частиц. Другими словами значение силы, действующей на каждую частицу в связи, зависит от положения частиц в пределах ее горизонта через относительное смещение θ , что позволяет избавиться от ограничений, возникающих при

использовании подхода на основе связи [9]. Плотность энергии деформирования задается в виде

$$W_i = \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}\alpha \int_{H_{\vec{r}_k}} \omega \varepsilon^2 dV_{\vec{r}_k}. \quad (6.1)$$

Сила, действующая на частицу t_i , определяется выражениями

$$\vec{t}_i = \frac{1}{2}\vec{f}_i, \quad (6.2)$$

$$\vec{t}_i = \frac{dK\theta}{m_i}\omega|\vec{\xi}_i| + \alpha\omega\varepsilon. \quad (6.3)$$

где K — модуль объёмного сжатия; θ — относительное смещение; ε — девиатор тензора деформации; α — константа; ω — функция влияния; d — размерность пространства; m_i — массовый объем частицы, который определяется следующей формулой

$$m_i = \int_{H_{\vec{r}_k}} \omega|\vec{\xi}_i|^2 dV_{\vec{r}_k}. \quad (6.4)$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ в (6.2) показывает, что сила в LPS модели распределяется на каждую частицу связи, в отличие от PMB, где вычисленная сила (3.1) одинаково действует на каждую частицу связи. Другими словами для PMB модели $\vec{t}_i = \vec{f}_i$.

Тензор деформации e представляется в виде суммы шаровой и девиаторной части:

$$e = e^i + \varepsilon, \quad e^i = \frac{\theta|\vec{\xi}_i|}{3}, \quad \theta[\vec{r}_i, t] = \frac{d}{m_i} \int_{H_{\vec{r}_k}} \omega|\vec{\xi}_i|e[\vec{r}_i, t] dV_{\vec{r}_k}. \quad (6.5)$$

Константа α пропорциональна модулю сдвига G , ее значение вычисляется из сравнения энергии (6.1) с энергией классической теории [18]. Для трехмерных задач принимает значение

$$a = \frac{15G}{m}. \quad (6.6)$$

7. Связь LPS и PMB моделей

Для PMB модели $\nu = \frac{1}{4}$, $G = \frac{3}{5}K$. Тогда силу межчастичного взаимодействия (6.3) запишем в виде

$$\vec{t}_i = \frac{9K}{m_i}\omega|\vec{\xi}_i|s. \quad (7.1)$$

Для связи LPS и PMB моделей используется сферическая функция влияния

$$\omega = \frac{1}{|\vec{\xi}_i|}. \quad (7.2)$$

Используя (7.2), массовый объем (6.4) $m_i = \pi\delta^4$. Таким образом, уравнение (7.1) запишем в следующем виде

$$\vec{t}_i = \frac{9K}{\pi\delta^4}s = \frac{1}{2}\left(\frac{18K}{\pi\delta^4}\right)s, \quad (7.3)$$

$$\vec{f}_i = \left(\frac{18K}{\pi\delta^4} \right) s = cs. \quad (7.4)$$

Значение силы (7.4) совпадает со значением силы в РМВ модели (3.1) при использовании функции жесткости связи (4.1). Таким образом, при $\nu = \frac{1}{4}$ и выбранной сферической функции влияния (7.2) LPS модель полностью совпадает с РМВ [12].

8. Тестовые расчеты

Перидинамика является нелокальной теорией, содержащей масштаб длины – горизонт взаимодействия. В [19] показано, что если деформации, определяющие модель, и какие-либо неоднородности, достаточно гладкие, то тензор напряжений дискретной модели в этом предельном случае переходит в тензор Пиолы-Кирхгофа, а уравнения перидинамики превращаются в уравнения теории упругости. Соответственно, предельные численные решения этих уравнений (при измельчении сетки для механики сплошной среды и при увеличении числа частиц для дискретной модели) также будут совпадать. Однако при конечных размерах сетки и при конечном числе частиц результаты расчетов могут различаться, т. к. для уравнений механики сплошной среды и уравнений перидинамики используются разные численные методы.

Результаты расчетов также могут различаться в зависимости от способа задания жесткости связи и выбора функции влияния. В расчетах использовались функции жесткости связи (5.2) – (5.4).

Для оценки точности реализованных моделей РМВ и LPS использовались достаточно простые задачи, имеющие аналитическое решение.

9. Прохождение гармонических волн в тонком стержне

Рассмотрим прохождение упругих волн по цепочке частиц, которые представляют собой тонкий стержень.

Геометрия задачи: $0 < x < 2L$, $-h < y < h$, $-h < z < h$, $h = \frac{L}{N}$ при $L = 1$ см, $N = 100$.

Свойства материала: модуль Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{4}$, плотность $\rho = 7.85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, модуль упругости $K = 133.333$ ГПа, $G = 80$ ГПа.

Начальные условия: $w(x, 0) = \varepsilon L \sin \frac{\pi x}{2L}$, $\sigma(x, 0) = E \frac{\varepsilon \pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2L}$, $u(x, 0) = 0$, $\varepsilon = 0.001$.

Граничные условия: $u(0, t) = 0$, $u(2L, t) = 0$.

В этой задаче представляет интерес исследование фазовой ошибки на достаточно большом временном интервале при использовании РМВ модели. Конец счета

$t_k = 50 \cdot 10^{-5}$ сек соответствует $\frac{t_k}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 60$ волновым периодам.

В первой серии расчетов число частиц фиксировано $N = 200$. Сходимость в предельном случае $\delta \rightarrow 0$ наблюдается при использовании постоянной функции жесткости связи (5.2) (Рис. 9.1). В расчетах с использованием треугольной (5.3) и квадратичной (5.4) функций жесткости связи накапливается фазовая ошибка.

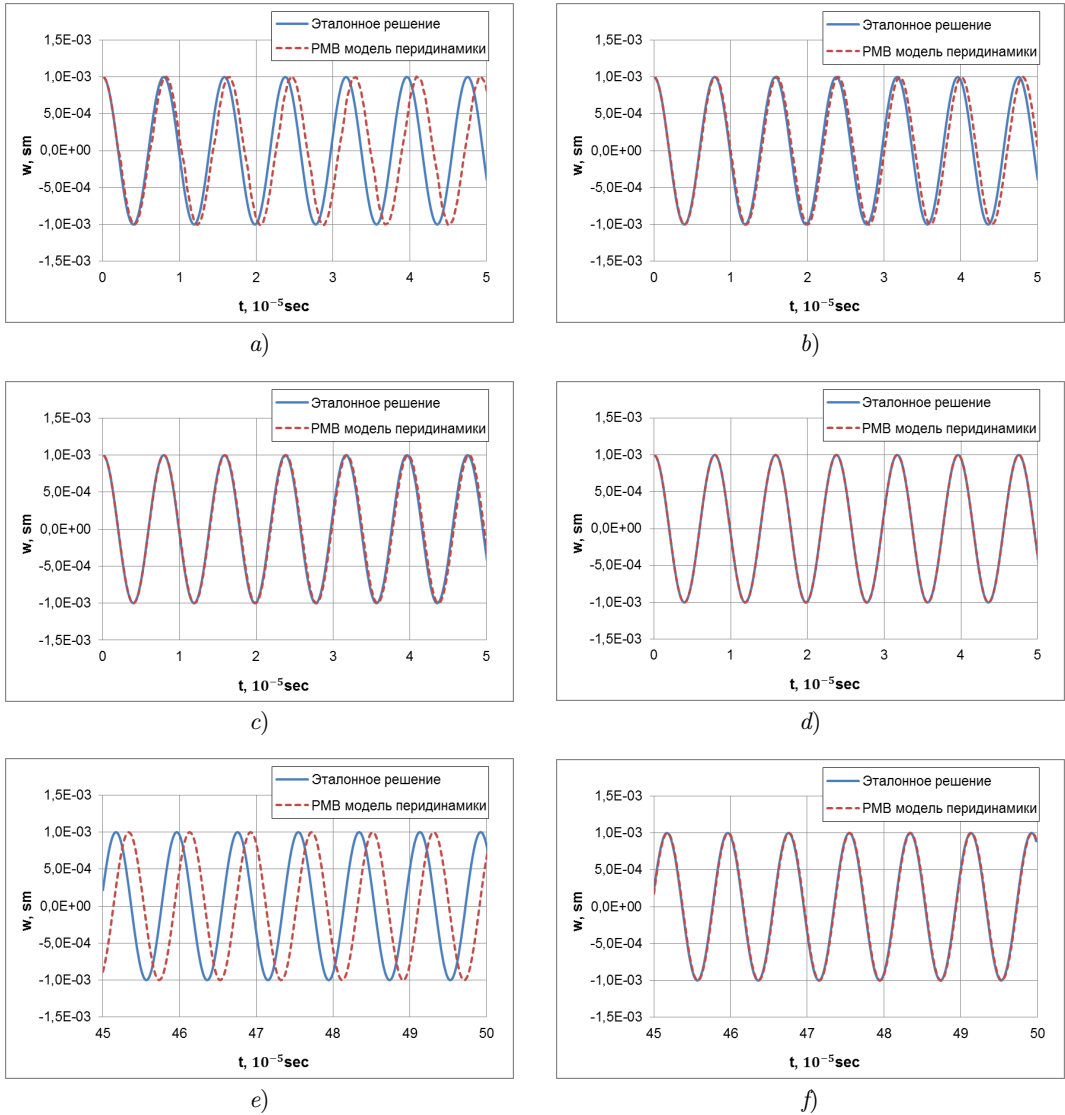


Рис. 9.1. Зависимость смещения от времени в сечении $x = L$ (PMB модель, $N = 200$, функция жесткости связи (5.2)) на начальном временном интервале: а) $\delta = 5.015 dx$; б) $\delta = 3.015 dx$; в) $\delta = 2.015 dx$; д) $\delta = 1.015 dx$; и конечном временном интервале: е) $\delta = 2.015 dx$; ф) $\delta = 1.015 dx$

Fig 9.1. The dependence of the offset on time in the cross section $x = L$ (PMB model, $N = 200$, function of the bond stiffness (5.2)) at the initial time interval: а) $\delta = 5.015 dx$; б) $\delta = 3.015 dx$; в) $\delta = 2.015 dx$; д) $\delta = 1.015 dx$; and at a finite time interval: е) $\delta = 2.015 dx$; ф) $\delta = 1.015 dx$

Во второй серии расчетов варьируется число частиц $N = 100$, $N = 1\,000$, $N = 10\,000$ и фиксируется горизонт взаимодействия $\delta = 3.015$ (Рис. 9.2).

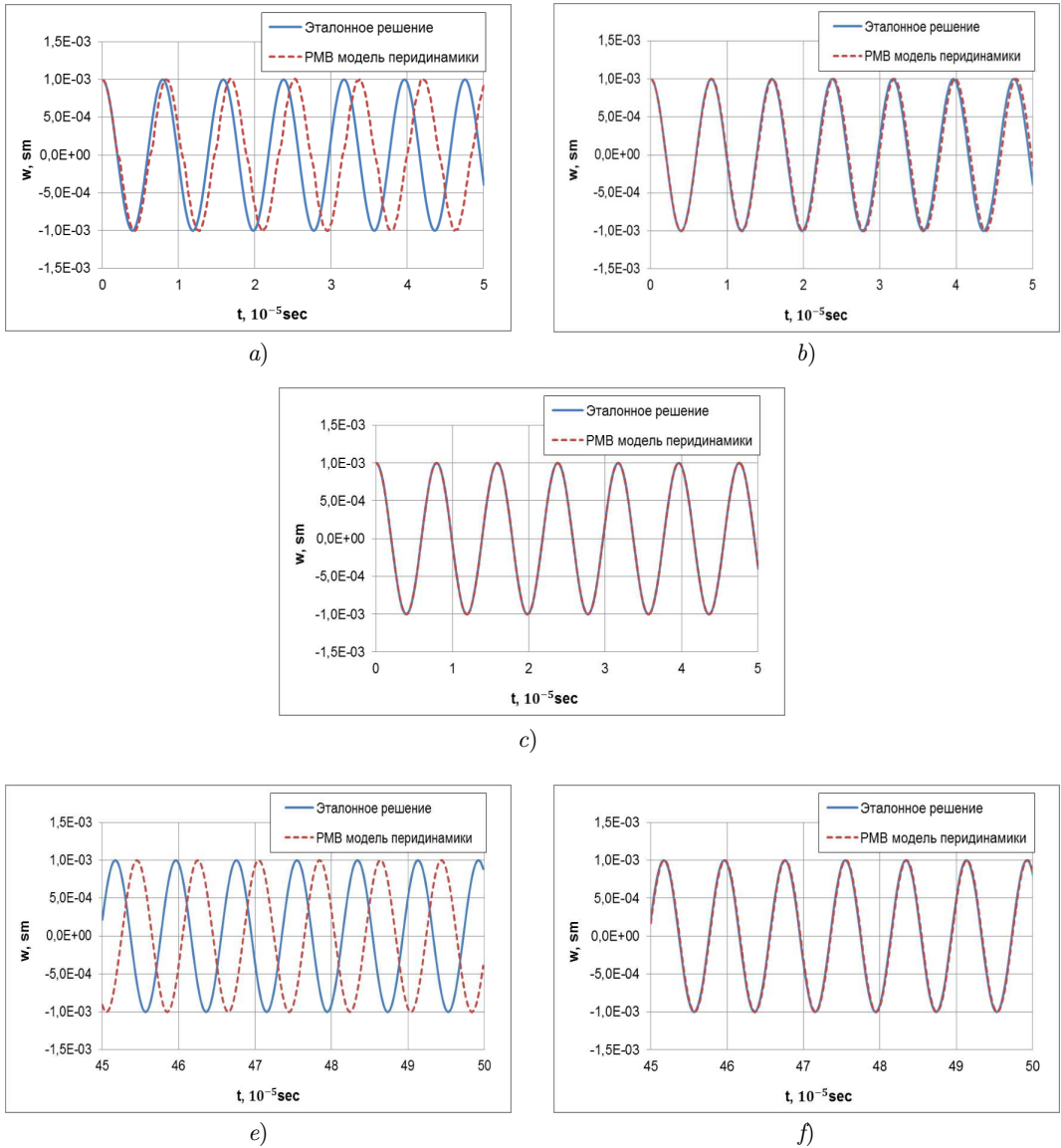


Рис. 9.2. Зависимость смещения от времени в сечении $x = L$ (PMB модель, $\delta = 3.015$ функция жесткости связи (5.2)) на начальном временном интервале: а) $N = 100$; б) $N = 1000$; в) $N = 10000$; и на конечном временном интервале: е) $N = 1000$; ф) $N = 10000$

Fig 9.2. The dependence of the offset on time in the cross section $x = L$ (PMB model, $\delta = 3.015$ function of the bond stiffness (5.2)) at the initial time interval: а) $N = 100$; б) $N = 1000$; в) $N = 10000$; and at a finite time interval: е) $N = 1000$; ф) $N = 10000$

Результаты, представленные на Рис. 9.2 для $N = 10000$, совпадают с аналитическим решением на всем временном интервале. Сходимость для различных горизонтов

взаимодействия достигается увеличением числа частиц. Скорость сходимости увеличивается при уменьшении горизонта взаимодействия, как было показано в первой серии расчетов. В то же время точность результатов зависит от выбора функции жесткости связи. Для данной задачи оптимально использовать постоянную функцию жесткости связи. При использовании треугольной или квадратичной функции жесткости связи в численном решении накапливается фазовая ошибка.

10. Соударение двух идентичных гибких стержней

Рассматривается соударение двух идентичных деформируемых стержней. Постановка задачи взята из [3].

Геометрия задачи: $-L < x < L$, $-h < y < h$, $-h < z < h$, $L = 5$ см, $h = 0.5$ см.

Свойства материала: модуль Юнга $E = 75$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{4}$, плотность $\rho = 2.7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, модули упругости: $K = 50$ ГПа, $G = 30$ ГПа.

Начальные условия: скорости стержней $u_x = \pm 10 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

Расстояние между материальными точками $dx = 0.001$ м, шаг интегрирования $\Delta t = 9.3184 \cdot 10^{-8}$ сек, конец счета $t = 4.985 \cdot 10^{-5}$ сек.

Расчеты проведены с использованием постоянной функции жесткости связи и горизонтом взаимодействия частиц $\delta = 1.015 dx$.

Для сравнения с результатами, полученными в [3], в процессе счета отслеживалось осевое смещение в центрах стержней $(\pm 2.5, 0, 0)$. Предельное значение деформации связи s_0 полагалось равным 0.002.

На Рис. 10.1 представлено сравнение результатов. Видно, что результаты, полученные по PMB модели перидинамики, реализованной в рамках комплекса программ MoDyS, согласуются с результатами из [3].

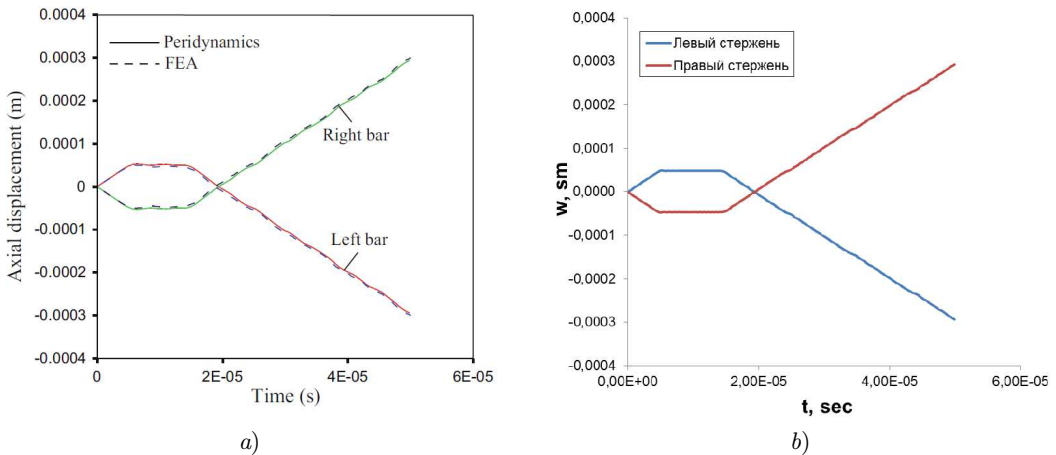


Рис. 10.1. Графики зависимости смещения частиц от времени:

a) [3]; b) PMB модель перидинамики

Fig 10.1. Dependence graphs of particle displacement on time:

a) [3]; b) PMB model of peridynamics

11. Эксперимент Калтхофа-Винклера

Рассматривается распространение трещины в задаче о столкновении жесткого цилиндрического ударника со стальной пластиной, имеющей две насечки (эксперимент Калтхофа-Винклера [20]). Постановка задачи выполнена в соответствии с [3] (Рис. 11.1).

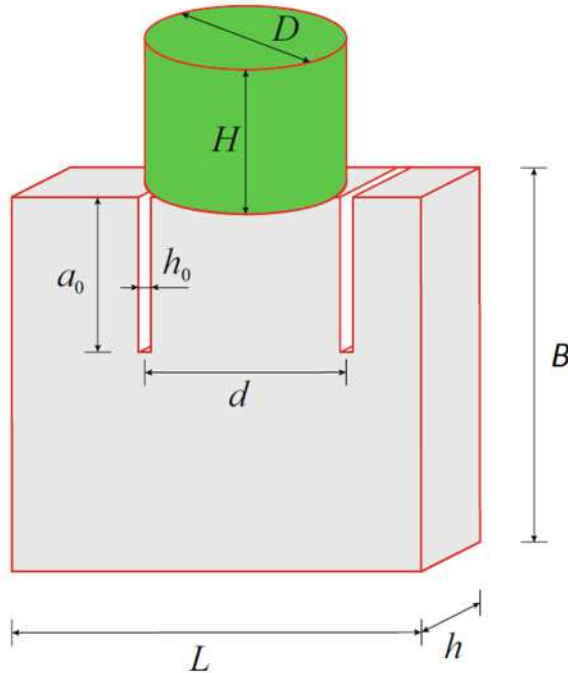


Рис. 11.1. Геометрия эксперимента Калтхофа-Винклера
Fig 11.1. Geometry of the Kalthoff-Winkler experiment

Геометрия задачи: $-l < x < l$, $-b < y < b$, $-h < z < h$, $l = 20$ см, $b = 10$ см, $h = 0.9$ см.

Параметры насечек: расстояние между насечками $d = 5$ см, длина насечки $a_0 = 5$ см, ширина насечки $h_0 = 0.15$ см.

Свойства пластины: модуль Юнга $E = 191$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{4}$, плотность $\rho = 8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, модули упругости: $K = 127.333$ ГПа, $G = 76.4$ ГПа.

Свойства ударника: диаметр $D = 5$ см, высота $H = 5$ см, масса $M = 1.57$ кг, скорость $u_0 = 0.032 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$.

Расстояние между материальными точками $dx = 0.001$ м, горизонт взаимодействия частиц $\delta = 3.015 dx$, предельное значение деформации связи $s = 0.01$, шаг интегрирования $\Delta t = 8.7 \cdot 10^{-8}$ сек, конец счета $t = 1.17 \cdot 10^{-4}$ сек.

На Рис. 11.2 представлена растровая картина численного моделирования эксперимента Калтхофа-Винклера. Угол отклонения образовавшихся трещин от вертикальной оси составляет 67° . Полученный результат согласуется с экспериментальными данными [20].

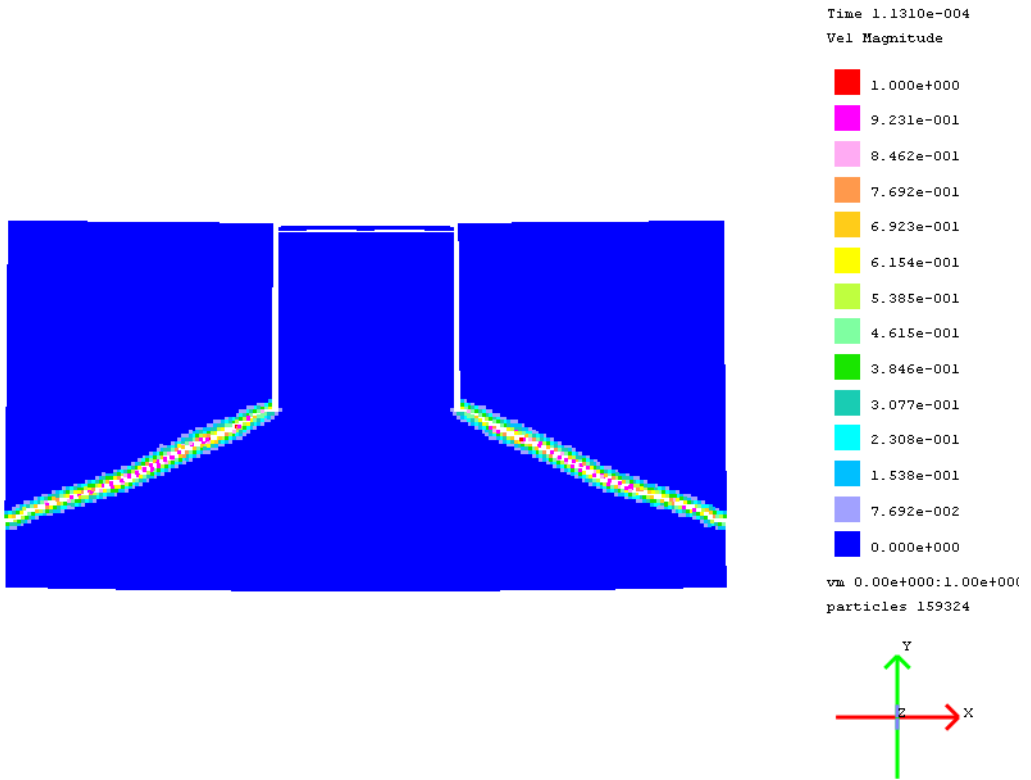


Рис. 11.2. Растровая картина повреждения в задаче Калтхофа-Винклера на конечный момент времени

Fig 11.2. Raster picture of damage in the Kalthoff-Winkler problem at a finite time

12. Заключение

Результаты тестирования перидинамической модели разрушения РМВ показали, что для простых задач упругости и задач хрупкого разрушения оптимально использовать постоянную функцию жесткости связи. Сходимость достигается увеличением числа частиц или уменьшением горизонта взаимодействия. Необходимо провести дополнительное исследование способов задания функции влияния, т. к. она корректирует силу взаимодействия частиц при определении жесткости связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // Journal of Mechanics and Physics of Solids. 2000. Vol. 48, No. 1. pp. 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)

2. Silling S. A., Geubelle P. H., Foster J. T., Bobaru F. (eds.) Handbook of peridynamic modeling. New York: CRC Press by Taylor and Francis Group, LLC, 2017. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>
3. Madenci E., Oterkus E. Peridynamic theory and its applications. New York: Springer, 2014. 289 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>
4. Silling S. A., Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // Computers and Structures. 2005. Vol. 83. pp. 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2004.11.026>
5. Huang D., Wang C., Lu G., Qiao P. An extended peridynamic approach for deformation and fracture analysis // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 141. pp. 196–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.04.036>
6. Huang D., Lu G., Qiao P. An improved peridynamic approach for quasi-static elastic deformation and brittle fracture analysis // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 8. pp. 94–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.02.018>
7. Silling S. A., Zimmermann M., Abeyaratne R. Deformation of a peridynamic bar // Journal of Elasticity. 2003. Vol. 73. pp. 173–190. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000029931.03844.4f>
8. Bobaru F., Yabg M., Alves L. F., Silling S. A., Askari E., Xu J. Convergence, adaptive refinement, and scaling in 1D peridynamics // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 77. pp. 852–877. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2439>
9. Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E. Peridynamic states and constitutive modeling // Journal of Elasticity. 2007. Vol. 88. pp. 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
10. Seleson P., Littlewood D. J. Convergence studies in meshfree peridynamic simulations // Computers & Mathematics with Applications. 2016. Vol. 71, No. 11. pp. 2432–2448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.021>
11. Seleson P., Parks M. On the role of the influence function in the peridynamic theory // International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2011. Vol. 9, No. 6. pp. 689–706. DOI: <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2011002527>
12. Seleson P. Connecting peridynamic models and coupling local and nonlocal systems : presentation at Mini-workshop: Mathematical Analysis for Peridynamics. 2011. 79 p.
13. Parks M. L., Seleson P., Plimpton S. J., Lehoucq R. B., Silling S. A. Peridynamics with LAMMPS: A User Guide v0.2 Beta. New Mexico, 2008. 28 p.
14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010614974. Комплекс программ молекулярно-динамического моделирования (MoDyS) / А. Н. Анисимов, С. А. Грушин, Б. Л. Воронин [и др.] Саров, 2010.
15. Qi T., Shaofan L., Multiscale coupling of molecular dynamics and peridynamics // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 95. pp. 169–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.05.032>

16. Parks M. L., Lehoucq R. B., Plimpton S. J., Silling S. A. Implementing peridynamics within a molecular dynamics code // *Computer Physics Communications*. 2008. Vol. 179, No. 11. pp. 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>
17. John A. M., Silling S. A., Littlewood D. J. A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. Vol. 10, No. 5. pp. 539–557. DOI: <https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
18. Mitchell J. A. On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’: presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure. 2012. 18 p.
19. Silling S. A., Lehoucq R. B. Convergence of peridynamics to classical elasticity theory // *Journal of Elasticity*. 2008. Vol. 93. pp. 13–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>
20. Kalthoff J. F., Winkler S. Failure mode transition at high rates of shear loading // *International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*. 1987. pp. 185–195.

*Поступила 09.08.2022; доработана после рецензирования 23.10.2022;
принята к публикации 23.11.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. S. A. Silling, “Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **48**:1 (2000), 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
2. *Handbook of Peridynamic Modeling*, ed. S. A. Siling, P. H. Geubelle, J. T. Foster, F. Bobaru, CRC Press by Taylor and Francis Group, LLC, New York, 2017 DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>, 586 p.
3. E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*, **289**, Springer, New York, 2014 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>.
4. S. A. Siling, E. Askari, “A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics”, *Computers and Structures*, **83** (2005), 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2004.11.026>
5. D. Huang, C. Wang, G. Lu, P. Qiao, “An extended peridynamic approach for deformation and fracture analysis”, *Engineering Fracture Mechanics*, **141** (2015), 196–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.04.036>
6. D. Huang, G. Lu, P. Qiao, “An improved peridynamic approach for quasi-static elastic deformation and brittle fracture analysis”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **8** (2015), 94–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.02.018>

7. S. A. Silling, M. Zimmermann, R. Abeyaratne, “Deformation of a peridynamic bar”, *Journal of Elasticity*, **17** (2003), 173–190. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000029931.03844.4f>
8. F. Bobaru, M. Yabg, L. F. Alves, S. A. Siling, E. Askari, J. Xu, “Convergence, adaptive refinement, and scaling in 1D peridynamics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **77** (2009), 852–877. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2439>
9. S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, “Peridynamic states and constitutive modeling”, *Journal of Elasticity*, **88** (2007), 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
10. P. Seleson, D.J. Littlewood, “Convergence studies in meshfree peridynamic simulations”, *Computers & Mathematics with Applications*, **71:11** (2016), 2432–2448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.021>
11. P. Seleson, M. Parks, “On the role of the influence function in the peridynamic theory”, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, **9:6** (2011), 689–706. DOI: <https://doi.org/10.1615/IntJMCompEng.2011002527>
12. P. Seleson, “Connecting peridynamic models and coupling local and nonlocal systems : presentation at Mini-workshop: Mathematical Analysis for Peridynamics”, 2011, 79 p.
13. M. L. Parks, P. Seleson, S. J. Plimpton, R. B. Lehoucq, S. A. Siling, “Peridynamics with LAMMPS: A User Guide v0.2 Beta”, 2008, 28 p.
14. A. N. Anisimov, S. A. Grushin, B. L. Voronin, S. V. Kopkin, A. M. Yerofeev, D. A. Demin, M. A. Demina, M. V. Zdorova, M. V. Vetchinnikov, N. S. Elicheva, N. O. Kovalenko, I. A. Kryuchkov, A. G. Kechin, V. A. Degtyarev, “Certificate of state registration of the computer program No. 2010614974. A complex of molecular dynamic modeling programs (MoDyS).”, 2010 (In Russ.).
15. T. Qi, L. Shaofan, “Multiscale coupling of molecular dynamics and peridynamics”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **95** (2016), 169–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.05.032>
16. M. L. Parks, R. B. Lehoucq, S. J. Plimpton, S.A. Silling, “Implementing peridynamics within a molecular dynamics code”, *Computer Physics Communications*, **179:11** (2008), 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>
17. A. M. John, S. A. Silling, D. J. Littlewood, “A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **10:5** (2015), 539–557. DOI: <https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
18. J.A. Mitchell, “On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’ : presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure”, 2012, 18 p.
19. S. A. Silling, R. B. Lehoucq, “Convergence of peridynamics to classical elasticity theory”, *Journal of Elasticity*, **93** (2008), 13–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>

20. J.F. Kalthoff, S. Winkler, “Failure mode transition at high rates of shear loading”, *International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*, 1987, 185–195.

Submitted 09.08.2022; Revised 23.10.2022; Accepted 23.11.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.