

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.436-451

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63 : 533.9.01

Методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад»

А. Ю. Круковский, М. Е. Ладонкина, Ю. А. Повещенко, И. В. Попов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. В данной работе представлена методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад» для случая цилиндрически симметричного течения. Представлена схема расчета лучистого теплообмена в среде с сильно меняющейся в пространстве и времени непрозрачностью. Предлагаемая для многопараметрических вычислительных экспериментов численная методика дает возможность получить зависимость плотности энергии излучения в виде квадратуры от коэффициента непрозрачности и излучательной способности плазмы. В двухтемпературной модели радиационной газовой динамики и магнитной гидродинамики это определяет вклад лучистого теплообмена в баланс энергии электронной компоненты плазмы. В настоящей работе рассматриваются способы повышения точности решения системы разностных уравнений путем качественного улучшения аппроксимации коэффициентов поглощения излучения. На примерах тестовых расчетов, которые моделируют пространственную неоднородность поля излучения, проводится численное сравнение предложенного метода с несколькими методами диффузионного типа. Показано, что расчеты, выполненные по рассматриваемой в настоящей работе методике, в отличие от аналогичных выполненных методом диффузионного приближения, дают качественно правильное совпадение с аналитическим решением. Существенным преимуществом приближения «вперед-назад» является то, что интегральность заложена в его структуре.

Ключевые слова: лучистый теплообмен, радиационная газодинамика, магнитная гидродинамика, приближение «вперед-назад», конечно-разностная схема

Для цитирования: Круковский А. Ю., Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Попов И. В. Методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад» // Журнал Средневожского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 436–451. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.436-451>

Об авторах:

Круковский Александр Юрьевич, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4188-6904>, alexander-krukovskiy@yandex.ru

Ладонкина Марина Евгеньевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Повещенко Юрий Андреевич, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru



Попов Игорь Викторович, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д.4), кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0002-7347-8174, piv2964@mail.ru

Original article

MSC2020 57N10

Method for calculating radiative energy transfer in the “back and forth” approximation

A. Yu. Krukovsky, M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveshchenko, I. V. Popov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)

Abstract. This paper presents a method for calculating the radiative energy transfer in the back and forth approximation for the case of cylindrically symmetric currents. The key element of the method is the scheme for calculating radiative heat transfer in a medium with opacity that strongly varies in space and time. The paper discusses the possibility of improving accuracy of solving a difference equations' system by making the approximation of absorption coefficients more accurate. The numerical technique proposed for multi-parameter computing experiments makes it possible to obtain the radiation energy density as a quadrature of plasma opacity and emissivity. In two-temperature model of gas dynamics and magnetohydrodynamics, this determines the contribution of radiative heat transfer into the energy balance of the plasma electronic component. Numerical comparison of the proposed method with some diffusion methods was implemented via test examples simulating spatial inhomogeneity of the radiation field. It is shown that the calculations performed according to the methodology considered in this paper, give a qualitatively correct match with the analytical solution of the problem, in contrast to calculations performed by the method of diffuse approximation. The obvious advantage of the back and forth approximation is that integrality is inherent in its structure.

Keywords: radiative heat transfer, radiation gas dynamics, magnetohydrodynamics, “back and forth” approximation, finite-difference scheme

For citation: *A. Yu. Krukovsky, M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveshchenko, I. V. Popov. Method for calculating radiative energy transfer in the “back and forth” approximation. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 24:4(2022), 436–451. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.436-451>*

About the authors:

Alexander Ju. Krukovskiy, Senior Researcher, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), alexander-krukovskiy@yandex.ru

Marina E. Ladonkina, Senior Researcher, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Yuri A. Poveshchenko, Leading Researcher, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Igor V. Popov, Senior Researcher, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7347-8174>, e-mail: piv2964@mail.ru

1. Введение

Моделирование течений излучающей плазмы в условиях осевой симметрии в одномерной постановке является одним из важнейших направлений в радиационной газовой динамике (РГД) и магнитной гидродинамике (МГД) поскольку связано с достаточно широким кругом физических задач, изучаемых в настоящее время как экспериментально, так и теоретически [1; 2].

Проведение широкомасштабного вычислительного эксперимента (ВЭ) для численного моделирования задач РГД и МГД даже в одномерной геометрии связано с существенными трудностями, которые обусловлены наличием в уравнении переноса излучения кроме пространственных еще и угловых переменных, в результате чего прямое численное интегрирование требует значительных затрат машинных ресурсов. Важное значение приобретают различные приближения, которые позволяют эффективно понизить размерность уравнения переноса излучения. В оптически плотном веществе в условиях, близких к термодинамическому равновесию, хорошей моделью служит приближение лучистой теплопроводности, а в прозрачной среде – приближение оптически тонкого слоя [3]. Если анизотропия излучения мала, то эффективны методы диффузионного приближения [4]. Наиболее важными достоинствами методов диффузионного типа являются простота реализации и достаточно высокая скорость вычислений. Это приближение обеспечивает физически корректные результаты и в плотной, и в прозрачной плазме. В областях же, где пробег фотона сравним с характерным масштабом плазмы, анизотропия излучения может быть достаточно устойчивой. Тогда диффузионное приближение формально неприемлемо и может привести к физически некорректным результатам. Часто встречаются ситуации, когда в потоке излучающей плазмы оптически прозрачные области соседствуют с областями, в которых коэффициент поглощения настолько велик, что длина пробега кванта (величина, обратно пропорциональная коэффициенту поглощения) становится существенно меньше размера ячейки разностной сетки. В данной работе представлен способ приближенного описания процессов переноса излучения в аксиально-симметричных течениях на основе приближения «вперед-назад». Для плоской геометрии такое приближение позволяет получить выражение для плотности энергии излучения в виде квадратуры, определяемой коэффициентом поглощения среды [3]. Для рассматриваемого в настоящей работе осесимметричного МГД-течения в двухтемпературном случае модель «вперед-назад» дает выражение для вклада процесса излучения в виде источника в уравнение энергии электронов. На тестовых расчетах была смоделирована пространственная неоднородность поля излучения. Проведено численное сравнение предложенного метода с некоторыми методами диффузионного типа. В настоящей работе изучается возможность повышения точности решения разностных уравнений путем улучшения качественного улучшения аппроксимации коэффициента поглощения излучения. Данная методика использовалась при проведении широкомасштабного вычислительного эксперимента для численного моделирования оболочечного Z-пинча под воздействием магнитного поля сильноточного генератора [5–7].

2. Постановка задачи

Рассмотрим аксиально-симметричное течение замагниченного вещества для случая, когда напряженность магнитного и электрического полей имеют две компоненты: продольную и азимутальную. При отсутствии рефракции света и в предположении квазистационарности поля излучения система уравнений радиационной МГД в переменных Лагранжа имеет вид [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r \frac{\partial p}{\partial m} - \frac{1}{4\pi} \left(r B_z \frac{\partial B_z}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} (r^2 B_\varphi^2) \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u(m, t), \quad dm = \rho r dr \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} = -P_e \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) - \frac{\partial W_e}{\partial m} + Q_{ei} + G_{joul} - \frac{\partial(rS)}{\partial m} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = -P_i \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) - \frac{\partial W_i}{\partial m} - Q_{ei} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_z}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial m} (r E_\varphi) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_\varphi}{\rho r} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial m} \quad (2.6)$$

$$E_\phi = -\frac{\rho r}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial m} \quad (2.7)$$

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial m} (r B_\varphi) \quad (2.8)$$

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left(\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} \right) = \alpha_\nu (I_{\nu p} - I_\nu) \quad (2.9)$$

$$S = 2 \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \sqrt{1-\gamma^2} d\gamma \int_{-1}^1 \frac{\mu I_\nu}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu \quad (2.10)$$

$$P = P_e + P_i, \quad P_{e,i} = p(\rho, T_{e,i}), \quad \varepsilon_{e,i} = \varepsilon(\rho, T_{e,i}) \quad (2.11)$$

Здесь t – время; r – пространственная координата; m – массовая переменная; u – скорость вещества; p – газодинамическое давление; p_e и p_i – давление электронного и ионного газа соответственно; ε_e и ε_i – внутренняя энергия электронов и ионов; E_φ , E_z и B_φ , B_z – азимутальные и продольные компоненты электрического и магнитного полей; $W_{e,i}$ – электронный и ионный потоки тепла; $\sigma(T_e, \rho, \mathbf{B})$ – электропроводность; G_{joul} – мощность джоулева энерговыделения:

$$G_{joul} = \frac{1}{4\pi} \left(E_z \frac{\partial}{\partial m} (r B_\varphi) - r E_\varphi \frac{\partial B_z}{\partial m} \right),$$

Q_{ei} – скорость обмена энергией между электронами и ионами; S – поток энергии излучения; \varkappa_ν – коэффициент поглощения излучения с частотой ν ; μ – косинус угла между направлением полета фотонов и радиусом, проведенным в данную точку; γ – косинус угла между направлением полета фотонов и осью симметрии (см. Рис. 2.1); I_ν – спектральная интенсивность излучения; $I_{\nu p}$ – спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела.

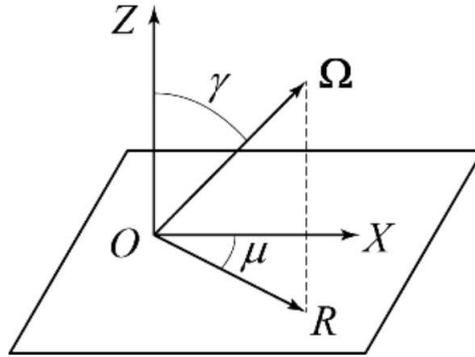


Рис. 2.1. Косинус угла между осью X и проекцией луча Q на площадку, пересекаемую потоком фотонов; γ – косинус угла между направлением полета фотонов и осью Z

Fig 2.1. Cosine of the angle between the X -axis and the beam projection Q to the area crossed by the photon flux; γ – cosine of the angle between the direction of flight of photons and the Z -axis

Граничные условия для уравнений (2.9)–(2.10): на оси симметрии $I_\nu(0, \mu, \gamma) = I_\nu(0, -\mu, \gamma)$ на внешней границе $I_\nu(R, \mu, \gamma) = 0$.

3. Некоторые приближения диффузионного типа для решения уравнения переноса излучения в задачах радиационной магнитной гидродинамики

Для решения уравнений (2.9)–(2.10) одним из наиболее привлекательных в смысле простоты и универсальности является метод диффузионного приближения, который априорно использует предположение об изотропии поля излучения. Интегрирование уравнения переноса излучения приводит к системе уравнений диффузии, поскольку между потоком S и плотностью U энергии излучения получается связь, которая аналогична связи между давлением и потоком при диффузии частиц. Проинтегрировав уравнение (2.9) сначала с весом $1/\sqrt{1-\mu^2}$ и затем с весом $\mu\sqrt{1-\gamma^2}/\sqrt{1-\mu^2}$ на множестве $\mu \in [-1, 1]$, $\gamma \in [-1, 1]$ и предположив, что интенсивность излучения не зависит от угловых переменных μ и γ , в случае одногруппового приближения имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r S)}{\partial r} = \varkappa (U_p - U), \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial r} + \varkappa S = 0, \quad (3.2)$$

где U_p – плотность равновесного излучения.

Граничные условия для системы уравнений (3.1)–(3.2) имеют вид:

$$S|_{r=0} = 0, \quad S|_{r=R} = \frac{1}{2} U.$$

Чтобы упростить расчет лучистого теплообмена в излучающей плазме перейдем к осредненной по угловому распределению интенсивности излучения. В приближении «вперед-назад» вводятся лучистые потоки, которые вычисляются по полусферам для взаимно противоположных направлений полета фотонов (т. е. «вперед-назад» по лучу). В случае плоской симметрии интенсивность излучения моделируется кусочно-постоянной функцией от угла направления полета фотонов μ : при $\mu \in [0, 1]$ $I = I_1$, а при $\mu \in [-1, 0]$ $I = I_2$.

Аналогичные уравнения в плоской геометрии излучающего слоя рассмотрены в [4].

В [9] рассмотрены обобщения на случай цилиндрической и сферической геометрий для расчета лучистого теплообмена между соосными цилиндрами или сферами. Приближение «вперед-назад» для случая осевой симметрии использовалось в [10]. В направлении, перпендикулярном оси симметрии, азимутальная неоднородность интенсивности рассматривалась в виде кусочно-постоянной функции, а в плоскости оси интенсивность полагалась не зависящей от угла направления полета фотонов. Тогда интегрирование уравнения (3.1) по телесному углу с учетом сделанных ограничений приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r I_1)}{\partial r} - \frac{I_1 + I_2}{2r} = 2 \kappa (I_p - I_1), \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r I_2)}{\partial r} - \frac{I_1 + I_2}{2r} = -2 \kappa (I_p - I_2). \quad (3.4)$$

Плотность излучения и его поток определяются следующим образом:

$$U = 2 \pi (I_1 + I_2), \quad S = \pi (I_1 - I_2).$$

Суммируя и вычитая попарно уравнения (3.3) и (3.4) получаем систему уравнений, совпадающую с точностью до численного коэффициента с системой уравнений (3.1)–(3.2). Для некоторых конфигураций плазменных течений характерный размер в осевом направлении существенно превосходит размер области плазмы в перпендикулярной к оси плоскости. Соответственно, неоднородность интенсивности по полярному углу является более высокой, чем по азимутальному. Поэтому в первую очередь следует учитывать именно эту неоднородность.

4. Методика расчета лучистого переноса энергии

При цилиндрической симметрии интегрирование уравнения (2.9) по угловым переменным и частоте ν дает вклад теплопереноса излучением в уравнение энергии электронов:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rS)}{\partial r} = \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} (U_{\nu p} - U_{\nu}) d\nu, \quad U_{\nu p} = \sigma T^4.$$

Здесь

$$U_\nu = 2 \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 \frac{I_\nu}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu -$$

спектральная плотность энергии излучения; $U_{\nu p}$ – спектральная плотность равновесного излучения; σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Диапазон частот, где происходит основной теплообмен излучением, разобьем на некоторое количество групп $0 \text{ и } \leq \nu_1, \leq \nu_2, \dots, \leq \nu_i \leq \nu_k$ и для каждой группы решаем уравнение (2.9), используя значения для

$$I_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} I_\nu d\nu, \quad U_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} U_\nu d\nu$$

и предполагая, что на каждом интервале коэффициент поглощения не зависит от энергии фотона

$$\varkappa_\nu(T_e, \rho, \nu) = \varkappa_i(T_e, \rho), \quad \nu_i \leq \nu \leq \nu_{i+1},$$

при этом

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rS)}{\partial r} = \sum_{i=1}^k \varkappa_i (U_{ip} - U_i).$$

Далее опустим зависимость от частоты и будем рассматривать «одногрупповое» приближение, что не нарушает общности. При решении уравнения (2.9) используется прием [3–4]: вводится для $I_\nu(r, \mu, \gamma)$ двухгрупповое описание по угловой переменной μ и не делается вообще никаких предположений относительно зависимости от угловой переменной γ :

$$I(r, \mu, \gamma) = \begin{cases} I^-(r, \gamma) & \mu \leq 0, \\ I^+(r, \gamma) & \mu > 0. \end{cases}$$

Далее, проинтегрировав по μ уравнение (2.9) сначала от -1 до 0 и от -1 до 1 , имеем:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial I^-}{\partial r} = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\gamma^2}} (I_p - I^-), \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 U)}{\partial r} + \frac{\varkappa U}{\sqrt{1-\gamma^2}} = 2 I^- \left(\frac{\varkappa}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{1}{r} \right). \quad (4.2)$$

Интегрирование уравнения (2.9) проводится с учетом граничных условий:

$$I_{boundary}^-(R) = 0, \quad U_{boundary}(0) = 2I_{boundary}^-(0), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Решив уравнения (4.1)–(4.2), получим:

$$U(\gamma, r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r \int_{r'}^R \frac{\varkappa(r'//)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} I_p(r'//) \left(r' + \frac{\varkappa(r'//)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} (r')^2 \right) \cdot \exp\left(-\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\right) dr'// dr',$$

где

$$\varsigma(r, r', r'//) = 2 \left(\int_{r'}^{r'//} \varkappa(r'///) dr'/// + \int_{r'}^r \varkappa(r'///) dr'/// \right).$$

Проинтегрируем полученное выражение по γ и, сделав подстановку

$$ch x = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}},$$

получим искомое выражение для вклада переноса излучения в уравнение электронной энергии

$$U(r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r \int_{r'}^R \varkappa(r'') I_p(r'') \left(r' f(\varsigma) - \varkappa(r') (r')^2 \frac{\partial f}{\partial \varsigma} \right) dr'' dr'. \quad (4.3)$$

Функцию

$$f(\varsigma) = 2 \int_0^\infty \frac{e^{\varsigma - ch x}}{ch x} dx$$

выразим в терминах модифицированных функций Ганнеля, поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial \varsigma} = -2 K_0(\varsigma).$$

При численном решении задач для функции $f(\varsigma)$ используются различные аппроксимации, что объясняется экспоненциальным спаданием $f(\varsigma)$ в области $\varsigma > 1$. Важными свойствами функции $f(\varsigma)$, определяющими асимптотическое поведение распределения энергии излучения в пределах оптически плотной ($\varkappa R \gg 1$) и оптически прозрачной ($\varkappa R \rightarrow 1$) среды, являются соотношения:

$$f(0) = \pi, \quad \int_0^\infty f(\varsigma) d\varsigma = 2.$$

В качестве первого приближения возьмем простейшую аппроксимацию функции

$$f(\varsigma) = \begin{cases} \pi - \frac{\pi^2}{4} \varsigma, & \varsigma < \frac{4}{\pi}, \\ 0, & \varsigma \geq \frac{4}{\pi}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Аппроксимация $f(\varsigma)$ позволяет существенно снизить затраты машинного времени. При этом, как показали расчеты тестовых задач (см. ниже), погрешность, которая возникает при таком (достаточно грубом) приближении, вполне допустима для ряда практических задач радиационной МГД [5–7].

5. Построение численного алгоритма решения уравнения переноса

Область, заполненную плазмой, разобьем на N (в общем случае неравномерных) ячеек. Обозначим множество узлов разностной сетки через $\bar{\omega}$, а множество ячеек разностной сетки – ω . Введем пространства сеточных функций, которые определены в узлах и ячейках разностной сетки, и обозначим их через $H_{\bar{\omega}}$ и H_{ω} соответственно. Для

записи сеточных функций $f \in H_{\bar{\omega}}$ будем использовать индекс $j : f_j \in f \in H_{\bar{\omega}}$. Сеточные функции $g \in H_{\omega}$ будем отмечать индексом $l : g_l \in g \in H_{\omega} \quad l = \overline{1, N}, j = \overline{1, N+1}$. Определим сеточную функцию r в узлах разностной сетки, а остальные сеточные функции \varkappa, I, I_p, U и U_p – в ячейках разностной сетки. Для численной реализации предложенного метода аппроксимируем двойной интеграл (4.3) на разностной сетке $\bar{\omega}_h$. При этом учитываем, что коэффициент \varkappa постоянен в разностной ячейке l :

$$U_l = \frac{2}{r_{j+1}^2 - r_j^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} U(r) \, dr, \quad j = l.$$

Введем обозначение

$$J(\varkappa_{r'}) = f(\zeta) - \varkappa(r') \, r' \frac{\partial f}{\partial \zeta},$$

$$G(r) = I_p(r) \, \varkappa(r).$$

Тогда, проведя несложные преобразования, получим:

$$U(r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r dr' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r'') \, r'' J(\varkappa_{r'}) \, dr'' =$$

$$= \frac{8}{r^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} dr' \, r' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r'') \, J(\varkappa_{r'}) \, dr'' + \int_{r_j}^r dr' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r'') \, J(\varkappa_{r'}) \, dr'' \right) =$$

$$= \frac{8}{r^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \, dr' \left\{ G(r_n) \int_{r'}^{r_{k+1}} J(\varkappa_n) \, dr'' + \sum_{i=k+1}^N G(r_m) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\varkappa_n) \, dr'' \right\} + \right.$$

$$\left. + \int_{r_j}^r dr' \left\{ G(r_l) \int_{r_j}^{r_{j+1}} J(\varkappa_l) \, dr'' + \sum_{i=j+1}^N G(r_m) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\varkappa_l) \, dr'' \right\} \right).$$

Здесь $n = k, m = i, r_m = 0,5(r_i + r_{i+1}), r_n = 0,5(r_k + r_{k+1})$. Обозначим

$$U_n^{(1)}(r) = \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \int_{r'}^{r_{k+1}} J(\varkappa_n) \, dr'' \, dr',$$

$$U_{nm}^{(2)}(r) = \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\varkappa_n) \, dr'' \, dr',$$

$$U_l^{(3)}(r) = \int_{r_j}^r r' \int_{r'}^{r_{j+1}} J(\varkappa_l) \, dr'' \, dr',$$

$$U_{lm}^{(4)}(r) = \int_{r_j}^r r' \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\varkappa_l) \, dr'' \, dr'.$$

Тогда вклад переноса излучения в уравнение электронной энергии имеет вид

$$U_r(r) = \frac{8}{r^2} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \left(G(r_n) U_n^{(1)}(r) + \sum_{i=k+1}^N G(r_m) U_{nm}^{(2)}(r) \right) + \right. \\ \left. + G(r_l) U_l^{(3)}(r) + \sum_{i=j+1}^N G(r_m) U_{lm}(r) \right]. \quad (5.1)$$

Для аргумента функции f имеем

$$\varsigma(r, r', r'') = 2 \left(\int_{r'}^r \alpha(r''') dr''' + \int_{r'}^{r''} \alpha(r''') dr''' \right).$$

Аналогично выпишем следующие формулы

для $U_n^{(1)}(r)$: $r_k \leq r' \leq r_{k+1}$, $r' \leq r'' \leq r_{k+1}$,

$$\varsigma^{(1)}(r, r', r'') = 2 \left(\sum_{k'=k+1}^{j-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \alpha_n(r_{k+1} + r'' - 2r') + \alpha_l(r - r_j) \right),$$

для $U_{nm}^{(2)}(r)$: $r_k \leq r' \leq r_{k+1}$, $r_i \leq r'' \leq r_{i+1}$,

$$\varsigma^{(2)}(r, r', r'') = 2 \left(\sum_{k'=k+1}^{j-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \sum_{k'=k+1}^{i-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \right. \\ \left. + 2\alpha_n(r_{k+1} - 2r') + \alpha_l(r - r_j) + \alpha_m(r' - r_i) \right),$$

для $U_l^{(3)}(r)$: $r_j \leq r' \leq r$, $r' \leq r'' \leq r_{j+1}$,

$$\varsigma^{(3)}(r, r', r'') = 2\alpha_l(r + r'' - 2r'),$$

для $U_{lm}^{(4)}(r)$: $r_j \leq r' \leq r$, $r_i \leq r'' \leq r_{i+1}$,

$$\varsigma^{(4)}(r, r', r'') = 2 \left(\sum_{k'=j+1}^{i-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \alpha_l(r_{j+1} + r - 2r') + \alpha_m(r'' - r_i) \right),$$

где $n' = k'$.

Следовательно, вклад переноса излучения записан в уравнение энергии электронов в виде конечно-разностной квадратурной формулы (5.1). При этом единственное предположение модели – это приближение «вперед-назад» в азимутальной плоскости. Из сравнительного анализа, проведенного на тестовых примерах, результаты которого приведены ниже, видно, что такой подход, несмотря на достаточную алгоритмическую сложность, связанную с аппроксимацией двойного интеграла на разностной сетке, имеет несомненные достоинства, которые обусловлены именно его интегральностью.

6. Результаты тестовых расчетов

Значения коэффициентов для тестовых расчетов, которые моделируют пространственную неоднородность поля излучения, задавались следующим образом (см. Рис. 6.1). Коэффициент поглощения \varkappa_1 полагался постоянным и равным \varkappa_1 в интервале $r_1 \leq r \leq r_2$ для всех расчетов, а в остальной области $0 \leq r \leq r_1$ и $r_2 \leq r \leq R$ коэффициент поглощения имел вид: $\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1}{c_n}, n = 1, 2, 3$. Предполагалось, что оптическая толщина слоя $[r_1, r_2]$ существенно больше единицы. Плотность равновесного излучения задавалась постоянной во всей расчетной области (рис. 6.1).

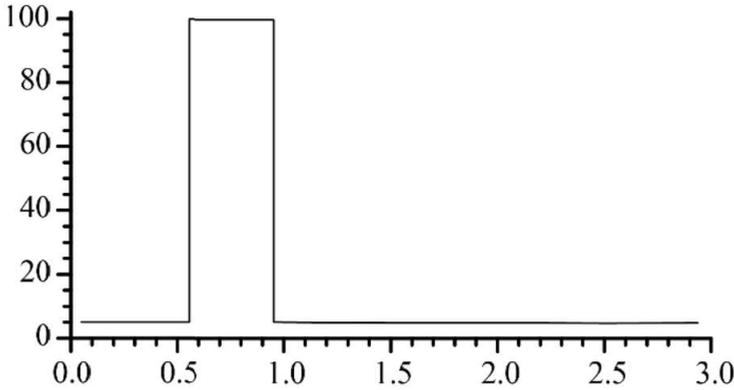


Рис. 6.1. График зависимости коэффициента поглощения от радиуса
Fig 6.1. Dependency graph of the absorption coefficient as a function of radius

Получить аналитическое решение по распределению интенсивности $I(r, \varphi, \gamma)$ даже в этом, относительно простом тесте, оказывается сложно. Поэтому для сравнения с численными расчетами по методике настоящей работы и некоторыми методами диффузионного типа ограничимся оценкой качественного поведения профиля $U(r)$.

Учитывая, что плотная оболочка оптически непрозрачна для излучения $\varkappa_1(r_2 - r_1) \gg 1$, то внутри оболочки при $r < r_1$ распределение плотности энергии излучения практически постоянно и соответствует значению $U = U_p$. Поскольку внешняя оболочка оптически прозрачна для излучения, то вблизи границы плотной оболочки на размере $\frac{1}{\varkappa_1} \ll (r_2 - r_1)$ функция $U(r)$ резко падает до значения $U = \frac{U_p}{2}$, а снаружи плотной оболочки падает по закону, близкому к $U(r) \approx \frac{1}{r}$, потому что $\varkappa \rightarrow 0$. Поэтому вдоль траектории полета фотонов интенсивность почти постоянна, а угол, под которым видна плотная оболочка при удалении от нее, $\Delta\phi \approx \frac{1}{r}$. Отсюда имеем закон спада функции $U(r)$, поскольку $U = 2\pi\Delta\phi I$.

На Рис. 6.2–6.4 представлены результаты численных расчетов по методу, описанному в настоящей работе, и также некоторым методам диффузионного типа. Параметры задачи задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= 100, \quad U_p = 0.5, \quad r_1 = 0.7, \quad r_2 = 1, \quad R = 3, \\ c_1 &= 200, \quad c_2 = 2 \cdot 10^4, \quad c_3 = 10^5. \end{aligned}$$

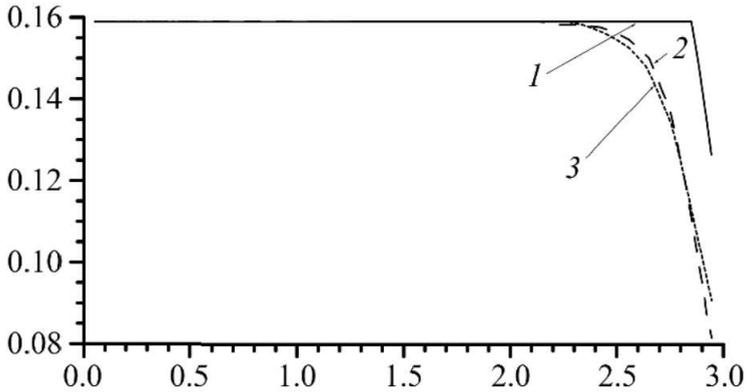


Рис. 6.2. График зависимости плотности излучения от радиуса при $C_1 = 2 \cdot 10^2$: 1 – методика настоящей работы; 2 – диффузионное приближение с аппроксимацией [8]; 3 – приближение «вперед-назад» с аппроксимацией [10]

Fig 6.2. Graph of the dependence of the radiation density on the radius at $C_1 = 2 \cdot 10^2$: 1 – methodology of this study; 2 – diffusion approach with approximation [8]; 3 – front-to-back approach with approximation [10]

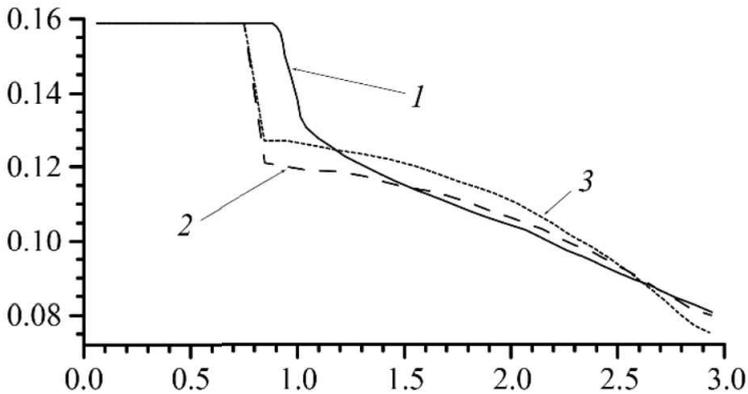


Рис. 6.3. График зависимости плотности излучения от радиуса при $C_2 = 2 \cdot 10^4$: 1 – методика настоящей работы; 2 – диффузионное приближение с аппроксимацией [8]; 3 – приближение «вперед-назад» с аппроксимацией [10]

Fig 6.3. Graph of the dependence of the radiation density on the radius at $C_2 = 2 \cdot 10^4$: 1 – methodology of this study; 2 – diffusion approach with approximation [8]; 3 – front-to-back approach with approximation [10]

Результаты расчетов показали, что в случае диффузионного приближения и метода диффузионного типа, предложенного в [10], даже при разрыве в коэффициенте поглощения, не превышающего четырех порядков, плотность излучения сильно «зарезается»

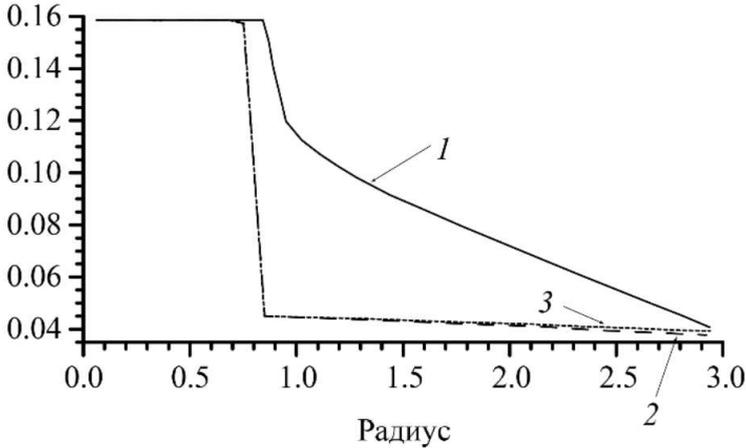


Рис. 6.4. График зависимости плотности излучения от радиуса при $C_3 = 10^5$:

- 1 – методика настоящей работы;
- 2 – диффузионное приближение с аппроксимацией [8];
- 3 – приближение «вперед-назад» с аппроксимацией [10]

Fig 6.4. Graph of the dependence of the radiation density on the radius at

- $C_3 = 10^5$: 1 – methodology of this study;
- 2 – diffusion approach with approximation [8];
- 3 – front-to-back approach with approximation [10]

при $r > r_2$ по сравнению с точным решением, что в реальных МГД расчетах привело к существенному снижению потока излучения и неоправданному перегреву области $r \leq r_2$, где излучение «заперто». В то же время расчет, выполненный по рассматриваемой в настоящей работе методике, дает качественно правильное спадание плотности излучения в области $r > r_2$.

При построении разностной схемы с конечно-разностной аппроксимацией уравнений (3.1)–(3.2), использовалась линейная интерполяция коэффициента поглощения α . Попытка улучшить качество аппроксимации путем интегрирования уравнений (3.1)–(3.2) по разностной ячейке при постоянном α , чтобы потом использовать для аппроксимации точное решение, принципиально ничего не меняет. Главным здесь является факт, что в этом случае из сходимости численного решения данной системы не следует сходимости к точному решению уравнения (2.9). Следовательно, при таких коэффициентах излучения использовать любые методы диффузионного приближения нецелесообразно.

7. Заключение

Таким образом, ситуация с расчетом лучистого переноса энергии имеет принципиальный характер. В РГД и МГД расчетах в первую очередь интересны интегральные величины: поток $S = S\Omega Id\Omega$ или плотность излучения $U = \text{div}S$. Если при использовании одного из методов диффузионного типа для уравнения переноса, вычислить интенсивность излучения I с достаточно высокой точностью, то вычисление интегральных характеристик S или U при существенно неоднородных коэффициентах поглощения излучения (в частности, из-за ошибок округления) может (как и показали численные

расчеты) привести к качественно неверным результатам, что неприемлемо. Метод же, предложенный в данной работе, обладает очевидным преимуществом, потому что интегральность заложена в самой его структуре.

Поэтому использование данного метода даже при сильно неоднородных коэффициентах поглощения излучения гарантирует получение корректных результатов. Таким образом методика расчета лучистого теплообмена, представленная в настоящей работе, достаточно универсальна: она позволяет получить физически корректные результаты в тех областях, где приближения диффузионного типа, лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя не работают.

Расчеты практических задач [5–7] подтверждают достаточно высокую эффективность описанной в настоящей работе методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hansen S. B., Gomez M. R., Sefkow A. B., Slutz S. A., Sinars D. B., Hahn K. D., Harding E. C., Knapp P. F., Schmit P. F., Awe T. J., McBride R. D., Jennings C. A., Geissel M., Harvey-Thompson A. J., Peterson K. J., Rovang D. C., Chandler G. A., Cooper G. W., Cuneo M. E., Herrmann M. C., Hess M. H., Johns O., Lamma D. C., Martin M. R., Porter J. L., Robertson G. K., Rochau G. A., Ruiz C. L., Savage M. E., Smith I. C., Stygar W. A., Vesey R. A., Blue B. E., Ryutov D., Schroen D. G., Tomlinson K. Diagnosing magnetized liner inertial fusion experiments on Z // *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4921217>
2. Gonsalves A. J., Nakamura K., Daniels J., Benedetti C., Pieronek C., de Raadt T. C. H., Steinke S., Bin J. H., Bulanov S. S., van Tilborg J., Geddes C. G. R., Schroeder C. B., TOth Cs., Esarey E., Swanson K., Fan-Chiang L., Bagdasarov G., Bobrova N., Gasilov V., Korn G., Satorov P., Leemans W. P. in a laser-heated capillary discharge waveguide // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 122, no. 8. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.084801>
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М.: Физматлит, 2008. 653 с.
4. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 305 с.
5. Гасилов В. А., Захаров С. В., Смирнов В. П. О генерации мощных потоков излучения и получения мегабарных давлений в лайнерных системах // *Письма в ЖЭТФ*. 1991. Т. 53, № 2. С. 83–86.
6. Гасилов В. А., Захаров С. В., Круковский А. Ю., Скороваров К. В. Генерация интенсивных потоков излучения и мегабарных ударных волн сжимающимися лайнерами // *Физика плазмы*. 1995. Т. 21, № 5. С. 399–406.
7. Гасилов В. А., Круковский А. Ю. О расчете лучистого теплообмена в композитном Z-пинче // *Матем. моделирование*. 2022. Т. 34, № 9. С. 21–36. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-02>
8. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа // М.: Наука, 1985. 304 с.

9. Рекин А. Д. Уравнения переноса излучения в приближении Шустера-Шварцшильда для задач со сферической и цилиндрической симметрией // ТВТ. 1978. Т. 16, № 4. С. 811–818.
10. Романов Г. С., Сметанников А. С. Численное моделирование слойного импульсного разряда с учетом переноса энергии излучения // ЖТФ. 1982. Т. 52, № 9. С. 1756–1762.

*Поступила 22.09.2022; доработана после рецензирования 10.11.2022;
принята к публикации 23.11.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. S. B. Hansen, M. R. Gomez, A. B. Sefkow, S. A. Slutz, D. B. Sinars, K. D. Hahn, E. C. Harding, P. F. Knapp, P. F. Schmit, T. J. Awe, R. D. McBride, C. A. Jennings, M. Geissel, A. J. Harvey-Thompson, K. J. Peterson, D. C. Rovang, G. A. Chandler, G. W. Cooper, M. E. Cuneo, M. C. Herrmann, M. H. Hess, O. Johns, D. C. Lamppa, M. R. Martin, J. L. Porter, G. K. Robertson, G. A. Rochau, C. L. Ruiz, M. E. Savage, I. C. Smith, W. A. Stygar, R. A. Vesey, B. E. Blue, D. Ryutov, D. G. Schroen, K. Tomlinson, “Diagnosing magnetized liner inertial fusion experiments on Z”, *Physics of Plasmas*, **22** (2015). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4921217>
2. A. J. Gonsalves, K. Nakamura, J. Daniels, C. Benedetti, C. Pieronek, T. C. H. de Raadt, S. Steinke, J. H. Bin, S. S. Bulanov, J. van Tilborg, C. G. R. Geddes, C. B. Schroeder, Cs. TOth, E. Esarey, K. Swanson, L. Fan-Chiang, G. Bagdasarov, N. Bobrova, V. Gasilov, G. Korn, P. Sasorov, W. P. Leemans, “Petawatt laser guiding and electron beam acceleration to 8 GeV in a laser-heated capillary discharge waveguide”, *Physical Review Letters*, **122**:8 (2019).
3. Ya. B. Zeldovich, Yu. P. Raiser, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 653 p.
4. M. N. Oscik, *Complex heat transfer*, Mir Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 305 p.
5. V. A. Gasilov, S. V. Zakharov, V. P. Smirnov, “Generation of intense radiation fluxes and megabar pressures in liner systems”, *Letters to the JETPh*, **53**:2 (1991), 83–86 (In Russ.).
6. V. A. Gasilov, S. V. Zakharov, A. Yu. Krukovsky, K. V. Skorovarov, “Generation of intense radiation fluxes and megabar shock waves by compressing liners”, *Plasma Physics*, **21**:5 (1995), 399–406 (In Russ.).
7. V. A. Gasilov, A. Yu. Krukovsky, “On the calculation of radiant heat transfer in a composite Z-pinch”, *Matem. modelirovaniye*, **34**:9 (2022), 21–36 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-02>
8. B. N. Chetverushkin, *Mathematical simulation of radiating gas dynamics problems*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 304 p.

9. A. D. Rekin, “Radiation transfer equations in the Schuster-Schwarzschild approximation for problems with spherical and cylindrical symmetry”, *TVT*, **16**:4 (1978), 811–818 (In Russ.).
10. G. S. Romanov, A. S. Smetannikov, “Numerical modeling of a layered pulsed discharge taking into account the transfer of radiation energy”, *JTPh*, **52**:9 (1982), 1756–1762 (In Russ.).

Submitted 22.09.2022; Revised 10.11.2022; Accepted 23.11.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.