МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.399-418
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.853.6

Применение диагонального подхода Сергеева и Квасова к построению методов глобальной оптимизации непрерывных функций многих переменных

В. И. Заботин, П. А. Чернышевский

КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева (г. Казань, Российская Федерация)

Аннотация. В данной работе предлагается обобщение алгоритмов Стронгина и Пиявского поиска глобального экстремума в диагональной модификации Сергеева и Квасова на случай непрерывных функций многих переменных на многомерном параллелепипеде. Алгоритм Сергеева и Квасова, эффективно переносящий идеи одномерных алгоритмов Стронгина и Пиявского на многомерный случай, применим только для липшицевых функций. Авторами предлагается модификация указанного метода на непрерывные функции с применением введенного Вандербеем Р. Дж. (Vanderbei R. J.) свойства ε-липшицевости, являющегося обобщением классического неравенства Липшица. Вандербей доказал, что любая равномерно непрерывная на выпуклом множестве функция с необходимостью и достаточностью обладает указанным свойством. Поскольку многомерный брус является выпуклым компактом, то в данной статье от целевой функции требуется только лишь непрерывность на области поиска. Авторами описываются шаги алгоритмов обобщённых методов Стронгина и Пиявского в модификации Сергеева и Квасова и доказываются достаточные условия сходимости. В качестве примера работы представленных методов в конце статьи приведены результаты расчетов для различных непрерывных, но не липшицевых функций с использованием трех известных стратегий разбиения: «деление на 2», «деление на 2N» и «безызбыточная». Для первых двух стратегий указаны формулы вычисления новой поисковой точки и пересчета приближенной оценки ε-постоянной, а также предложена модификация алгоритмов, позволяющая рассчитывать новую поисковую точку на любом шаге.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, нелипшицевая оптимизация, невыпуклая оптимизация, ε-липшицевость, непрерывная функция, сходимость

Для цитирования: Заботин В. И., Чернышевский П. А. Применение диагонального подхода Сергеева и Квасова к построению методов глобальной оптимизации непрерывных функций многих переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 399–418. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.399-418

Об авторах:

Заботин Владислав Иванович, профессор кафедры прикладной математики и информатики, КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева (420015, Россия, г. Казань, ул. Большая Красная, д. 55, к. 7), доктор технических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0732-5380, v.zabotin@rambler.ru

Чернышевский Павел Андреевич, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева (420015, Россия, г. Казань, ул. Большая Красная, д. 55, к. 7), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5036-6375, pavelcomm@mail.ru

Original article

MSC2020 90C26, 90C56, 65K05

Continuous global optimization of multivariable functions based on Sergeev and Kvasov diagonal approach

V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij

Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI (Kazan, Russian Federation)

Abstract. One of modern global optimization algorithms is method of Strongin and Piyavskii modified by Sergeev and Kvasov diagonal approach. In recent paper we propose an extension of this approach to continuous multivariable functions defined on the multidimensional parallelepiped. It is known that Sergeev and Kvasov method applies only to a Lipschitz continuous function though it effectively extends one-dimensional algorithm to multidimensional case. So authors modify We modify mentioned method to a continuous functions using introduced by Vanderbei ε-Lipschitz property that generalizes conventional Lipschitz inequality. Vanderbei proved that a real valued function is uniformly continuous on a convex domain if and only if it is ε-Lipschitz. Because multidimensional parallelepiped is a convex compact set, we demand objective function to be only continuous on a search domain. We describe extended Strongin's and Piyavskii's methods in the Sergeev and Kvasov modification and prove the sufficient conditions for the convergence. As an example of proposed method's application, at the end of this article we show numerical optimization results of different continuous but not Lipschitz functions using three known partition strategies: "partition on 2", "partition on 2N" and "effective". For the first two of them we present formulas for computing a new iteration point and for recalculating the ε-Lipschitz constant estimate. We also show algorithm modification that allows to find a new search point on any algorithm's step.

Keywords: global optimization, non-Lipschitz optimization, nonconvex optimization, ε-Lipschitz function, continuous function, convergence

For citation: *V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij*. Continuous global optimization of multivariable functions based on Sergeev and Kvasov diagonal approach. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:4(2022), 399–418. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.399-418

About the authors:

Vladislav V. Zabotin, Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI (55 Bolshaya Krasnaya St., Kazan 420015, Russia), Doctor of Technical Science, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0732-5380, v.zabotin@rambler.ru

Pavel A. Chernyshevskij, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics and Informatics, Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI (55 Bolshaya Krasnaya St., Kazan 420015, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5036-6375, pavelcomm@mail.ru

1. Введение

Задача поиска глобального экстремума функции достаточно часто встречается как в теории, так и на практике. В случае, если о свойствах целевой функции ничего не известно, то оправдано применение современных численных методов, основанных на эвристическом подходе (генетические алгоритмы, алгоритм имитации отжига, методы роевого интеллекта и тому подобное). Однако подобные методы не гарантируют, что найденное решение будет с достаточной точностью глобальным.

Хорошо известно, что свойство липшицевости функции является одной из характеристик функции, позволяющей конструировать приближенные методы глобальной оптимизации и доказывать достаточные условия их сходимости. Использование неравенства Липшица для проектирования численных методов одним из первых предложил С. А. Пиявский в работах [1–2]. Построенный им алгоритм, получивший в российской литературе название «метод ломаных», позволяет, зная оценку постоянной Липшица, итерационно вычислить точку глобального минимума функции на отрезке и соответствующее значение функции. Позднее было разработано и предложено множество других подходов, опирающихся на указанное свойство, например [3–4]. Отдельно можно выделить книгу Р. Г. Стронгина [5], в которой предлагается алгоритм минимизации функции на отрезке, не требующий предварительного знания оценки константы Липшица и рассчитывающего приближение этой оценки на каждом шаге вычислений. Если говорить о современном состоянии вопроса, то интерес к оптимизации липшицевых функций сохраняется и сегодня. Так, необходимо отметить работу Я. Д. Сергеева и Д. Е. Квасова [6], где авторами предложено эффективное обобщение алгоритмов Пиявского и Стронгина на многомерный случай с помощью диагонального подхода. В библиографии этой же книги приведен исчерпывающий список трудов и исследователей по данной тематике.

Ключевым требованием всех вышеперечисленных методов является либо наличие априорного знания оценки постоянной Липшица, либо *уверенность*, что целевая функция является липшицевой на области поиска. Возникает задача построения численных методов поиска глобального минимума для функций более широкого класса – непрерывных (и, может быть, нелипшицевых). Например, поиск глобального минимума функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$ или более нетривиальный пример – нигде не дифференцируемую на отрезке непрерывную функцию типа функции Вейерштрасса ([7, с. 52]). В последнем случае о неравенстве Липшица говорить не приходится.

Первой работой, в которой автор отказался от липшицевости функции, была работа Р. Дж. Вандербея [8]. В ней вводится понятие ε-липшицевости, обобщающее в некотором смысле классическое определение липшицевости: функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $A \subseteq \mathbb{R}^n$, называется ε-липшицевой, если имеет место условие

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists L(\varepsilon) < +\infty \ \forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq L(\varepsilon) \, \|x - y\| + \varepsilon. \tag{1.1}$$

Несмотря на то что в литературе встречаются и другие обобщения и расширения понятия липшицевости, такие как условие Гельдера, полулипшицевость [9], Q-липшицевость [10], $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$-липшицевость [11], δ-липшицевость [12] и многие другие, условие (1.1), как это выяснилось, эквивалентно определению равномерной непрерывности.

Вандербеем доказана следующая теорема.

Определенная на выпуклом множестве $A \subseteq \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на нем тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.1).

Очевидное следствие из теоремы: если множество A дополнительно замкнуто и ограничено (что является естественным предположением), то непрерывность функции $f(x)$ необходима и достаточна для выполнения (1.1).

Условие ε-липшицевости также позволяет строить и обосновывать численные алгоритмы минимизации. В работе [8] показано, как можно обобщить метод ломаных на случай только непрерывной на отрезке функции (формально алгоритм был обоснован позже в статье [13]). Впоследствии в работе [14] аналогичное обобщение, а также доказательство сходимости, предложены для метода равномерного перебора Евтушенко. Реализация указанных алгоритмов, однако, требует знания зависимости величины $L(\varepsilon)$ от значения $\varepsilon > 0$. В явном виде для некоторых функций одной переменной такие зависимости были получены в работах [8], [14–15]. Обобщение на непрерывный случай метода Стронгина и его теоретическое обоснование предлагается в работе [16]. Последний алгоритм не требует априорного знания зависимости $L(\varepsilon)$ от $\varepsilon > 0$, поскольку оценка $L(\varepsilon)$ рассчитывается адаптивно и может применяться для любой непрерывной на отрезке функции без предварительных выкладок.

В настоящее время ведутся исследования по приложению свойства (1.1) к проектированию методов глобальной оптимизации функций многих переменных. В статье [17] предложено два алгоритма глобальной минимизации непрерывной функции на n-мерном параллелепипеде и доказано, что за конечное число шагов достигается оптимальное решение задачи с заданной точностью. Там же получены формулы зависимости величины $L(\varepsilon)$ от $\varepsilon > 0$ для некоторых нелипшицевых функций двух переменных и приведены результаты численных экспериментов оптимизации этих функций.

В данной статье предлагается другой подход к использованию ε - липшицевости в контексте глобальной оптимизации непрерывных функций многих переменных, основанный на диагональном подходе Сергеева и Квасова [6]. Как было сказано выше, диагональная модификация позволяет успешно применять одномерные алгоритмы Стронгина и Пиявского для поиска глобального минимума функции на n-мерном брусе.

Во второй части настоящей работы описаны аналогичные диагональные модификации для обобщенных методов Стронгина и Пиявского из работ [16] и [13]. Сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости модифицированных методов.

В третьей части приведены результаты расчетов для функций из работы [17], их вариаций на случай трех переменных, а также в качестве примера приближенно рассчитан глобальный минимум нелипшицевой функции десяти аргументов.

2. Описание алгоритмов и их обоснование

Прежде чем перейти к формулировкам алгоритмов, необходимо дать некоторые пояснения. Целевая функция $f(x)$ предполагается непрерывной на n-мерном параллелепипеде $D = [a; b] = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^j \le x^j \le b^j, j = \overline{1, n}\right\}$, который, как и в работе [6], будем называть гиперинтервалом. Ясно, что D – выпуклый компакт, а значит, для $f(x)$ справедливо выполнение (1.1) при $A = D$. Для $f(x)$ и D определим множество $\{L(\varepsilon)\}$ всех констант $L(\varepsilon)$ из (1.1) при фиксированном $\varepsilon > 0$. Через $l(\varepsilon) = \inf\{L(\varepsilon)\}$ обозначим минимальную оценку ε - постоянной Липшица, которая достигается [18].

Несложно заметить, что в общем случае из условия (1.1) не следует строгая положительность $l(\varepsilon)$. Поэтому воспользуемся определением согласованности, введенным в работе [18]: функцию $f(x)$ и величину $\varepsilon > 0$ назовем согласованной на множестве A, если существуют такие $x_0, y_0 \in A$, что $0 < \varepsilon < |f(x_0) - f(y_0)|$. В той же работе доказано, что для согласованных $f(x)$ и $\varepsilon > 0$ оценка $l(\varepsilon) > 0$ и, кроме того, существуют такие точки $x_1, y_1 \in A$, что $|f(x_1) - f(y_1)| = l(\varepsilon)\,\|x_1 - y_1\| + \varepsilon$, т. е. оценка $l(\varepsilon)$ достижима. Все методы будут изложены для согласованных $f(x)$и $\varepsilon > 0$ на области поиска D. Поскольку величина $\varepsilon > 0$ берется достаточно малой, то условие согласованности не является обременительным.

Теперь сформулируем алгоритмы А и Б, позволяющие приближённо найти глобальный минимум $f(x)$ на D.

Алгоритм А (применение обобщенного метода Стронгина [16] в диагональной модификации Сергеева и Квасова).

Вход:

1) функция $f(x)$, непрерывная на гиперинтервале $D = [a; b]$;

2) величина $\varepsilon > 0$, согласованная с функцией $f(x)$ на D;

3) точность $\delta > 0$.

Выход:

1) приближенное значение величины $f_* = \min\limits_{x\in D} f(x)$;

2) точка x_* области D, в которой достигается указанное приближенное значение;

3) приближенная снизу оценка $l_*(\varepsilon)$ величины минимальной ε-постоянной Липшица $l(\varepsilon)$ функции f на области D.

Шаг 0. Установить значение счетчика гиперинтервалов на первом шаге равным $M = 1$ и построить разбиение начального гиперинтервала $\left\{D^1\right\} = \{D\}$. Задать параметр алгоритма $\nu > 0$ и задать ограниченную последовательность $\mu_k > 1,\ k = 1, 2, \ldots.$ Положить $k = 1$ и построить множество X_k, содержащее поисковые точки $x \in D$, найденные во время работы алгоритма на шаге k.

Шаг 1. На основе построенных на текущем шаге гиперинтервалов $D_i^k = [a_i; b_i]$ $(1 \le i \le M)$ вычислить величину $l_k(\varepsilon)$

$$l_k(\varepsilon) = \max_{0\le i\le M} \frac{|f(a_i) - f(b_i)| - \varepsilon}{\|a_i - b_i\|}. \tag{2.1}$$

Далее рассчитать оценку

$$L_k(\varepsilon) = \begin{cases} \mu_k l_k(\varepsilon), & l_k(\varepsilon) > 0; \\ \nu, & l_k(\varepsilon) \le 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Шаг 2. Для каждого гиперинтервала $D_i^k = [a_i; b_i]$ $(1 \le i \le M)$ вычислить характеристику, аналогичную (4.14) из [6, с. 180],

$$R_k(i, \varepsilon) = L_k(\varepsilon)\,\|a_i - b_i\| + \frac{\left(f(a_i) - f(b_i)\right)^2}{L_k(\varepsilon)\,\|a_i - b_i\| + \varepsilon} - 2(f(a_i) + f(b_i)). \tag{2.3}$$

Далее определить минимальный номер s, такой что

$$R_k(s, \varepsilon) = \max_{1\le i\le M} R_k(i, \varepsilon). \tag{2.4}$$

Шаг 3. Проверить условие останова:

$$\|a_s - b_s\| \le \delta\,\|a - b\|\,. \tag{2.5}$$

Если оно выполнено, то среди всех точек $x \in X_k$ найти точку $x_* = \arg\min\limits_{x\in X_k} f(x)$, положить $f_* = f(x_*)$, $l_*(\varepsilon) = l_k(\varepsilon)$ и завершить алгоритм. Если условие (2.5) не выполняется, то перейти к шагу 4.

Шаг 4. Провести разбиение гиперинтервала D_s^k и построить новое разбиение $\{D^{k+1}\}$ в соответствии с выбранной стратегией разбиения. Увеличить счетчик $k = k+1$, изменить значение M, перенумеровать гиперинтервалы, построить новое множество X_k и перейти к шагу 1. Алгоритм описан.

Замечание 2.1. *Шаг 4 допускает применение стратегий, которые используются для липшицевых функций, например, в работе* [6]. *Необходимо при этом помнить, что простой перенос стратегий «липшицевого» случая на случай непрерывной функции не всегда возможен. Так, при реализации стратегий «деление на 2N» и «деление на 2» возможна ситуация, что поисковая точка v_s, которая вычисляется на диагонали лучшего гиперинтервала D_s^k, может не принадлежать этому интервалу, что наблюдалось в ходе вычислительных экспериментов. Здесь можно воспользоваться теми же рассуждениями, что и в работах* [16] *и* [13], *где схожая проблема подробно описана для функции одной переменной. Использование же безызбыточной стратегии из* [19], *для сравнения, не вызывает никаких дополнительных трудностей.*

Алгоритм Б (применение обобщенного метода Пиявского [8; 13] в диагональной модификации Сергеева и Квасова).

Вход:

1) функция $f(x)$, непрерывная на гиперинтервале $D = [a; b]$;

2) величина $\varepsilon > 0$, согласованная с функцией $f(x)$ на D;

3) оценка $L(\varepsilon)$ минимальной ε-постоянной Липшица $l(\varepsilon)$ функции $f(x)$ на области D (может быть получена, например, в результате выполнения алгоритма, описанного в работе [18]);

4) точность $\delta > 0$.

Выход:

1) приближенное значение величины $f_* = \min_{x \in D} f(x)$;

2) точка x_* области D, в которой достигается указанное приближенное значение.

Шаг 0. Установить значение счетчика гиперинтервалов на первом шаге равным $M = 1$ и построить разбиение начального гиперинтервала $\{D^1\} = \{D\}$. Положить $k = 1$.

Шаг 1. Для каждого гиперинтервала $D_i^k = [a_i; b_i]$ $(1 \leq i \leq M)$ вычислить характеристику

$$R_k(i, \varepsilon) = \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2} - L(\varepsilon)\frac{\|b_i - a_i\|}{2}. \tag{2.6}$$

Далее определить минимальный номер s такой, что

$$R_k(s, \varepsilon) = \min_{1 \leq i \leq M} R_k(i, \varepsilon). \tag{2.7}$$

Шаги 2–3. Аналогичны шагам 3 и 4 алгоритма А соответственно. Справедливо также замечание 2.1, что дано к шагу 4 алгоритма А. Алгоритм описан.

Для доказательства сходимости предложенных методов введем следующие обозначения. За X_* примем множество точек глобального минимума функции $f(x)$ на D, а за f_* – соответствующее значение функции в этих точках, т. е. $f_* = f(x_*)$, $x_* \in X_*$. Найденные в ходе работы алгоритмов точки из X образуют некоторую последовательность, пусть $\{x_{m(k)}\}$. Через X' обозначим все предельные точки $\{x_{m(k)}\}$. Поскольку D компактно, то $X' \neq \varnothing$.

Для обоснования достаточных условий сходимости алгоритма А сформулируем и докажем предложения 1 и 2, развивающие предложения 1 и 2 из работы [16, с. 1115] и обобщающие в некотором роде теоремы 5.1–5.3 из [6, с. 228] на случай непрерывной функции.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве D, значение $\varepsilon > 0$ и функция $f(x)$ согласованы на D, а x' и x'' – любые две предельные точки последовательности $\left\{x_{m(k)}\right\}$, построенной в ходе работы алгоритма А. Тогда справедливы соотношения*

$$f(x') - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(x_{m(k)}) \quad (\forall m(k)) \,, \tag{2.8}$$

и

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки последовательности $\left\{x_{m(k)}\right\}$ являются вершинами соответствующих гиперинтервалов $D^k_{i(k)}$. Выделим из $D^k_{i(k)}$ последовательность вложенных друг в друга гиперинтервалов $D^k_{p(k)} = \left[a_{p(k)}; b_{p(k)}\right]$, содержащих точку $x' \in X'$. Для этой последовательности в силу ее построения верно, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D^k_{p(k)} = \lim_k a_{p(k)} = \lim_k b_{p(k)} = x', \tag{2.10}$$

а также

$$R_k(p(k), \varepsilon) \geq R_k(i, \varepsilon), \;\; i = 1, \ldots, M(k) \tag{2.11}$$

для любого номера k.

Рассмотрим характеристику гиперинтервала $R_k(i, \varepsilon)$ алгоритма А (см. (2.3)) и запишем её в следующем виде:

$$R_k(i(k), \varepsilon) = \left(L_k(\varepsilon)\left\|a_{i(k)} - b_{i(k)}\right\| + \varepsilon\right)\left(1 + \frac{f(a_{i(k)}) - f(b_{i(k)})}{L_k(\varepsilon)\left\|a_{i(k)} - b_{i(k)}\right\| + \varepsilon}\right)^2 - 4f(a_{i(k)}) - \varepsilon,$$

$$R_k(i(k), \varepsilon) = \left(L_k(\varepsilon)\left\|a_{i(k)} - b_{i(k)}\right\| + \varepsilon\right)\left(1 - \frac{f(a_{i(k)}) - f(b_{i(k)})}{L_k(\varepsilon)\left\|a_{i(k)} - b_{i(k)}\right\| + \varepsilon}\right)^2 - 4f(b_{i(k)}) - \varepsilon.$$

Отсюда с учетом (2.1) и (2.2) получаем неравенства

$$R_k(i(k), \varepsilon) \geq -4f(a_{i(k)}) - \varepsilon$$

и

$$R_k(i(k), \varepsilon) \geq -4f(b_{i(k)}) - \varepsilon,$$

из которых выводим

$$R_k(i(m(k)), \varepsilon) \geq -4f(x_{m(k)}) - \varepsilon, \;\; i = 1, \ldots, M(k) \tag{2.12}$$

для всех чисел k.

Используя соотношения (2.11) и (2.12) легко показать, что

$$R_k(p(k), \varepsilon) \geq -4f(x_{m(k)}) - \varepsilon, \ \ i = 1, \ldots, M(k).$$

Переходя к пределу по k и учитывая (2.1), (2.2), (2.3), (2.10), а также непрерывность $f(x)$, запишем неравенство

$$\lim_k R_k(p(k), \varepsilon) = -4f(x') \geq -4f(x_{m(k)}) - \varepsilon \ \ (\forall m(k)),$$

откуда непосредственно следует оценка (2.8). Для получения (2.9) можно воспользоваться аналогичными рассуждениями, что и при доказательстве предложения 1 из [16]. Доказательство завершено.

Предложение 2.2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве D, значение $\varepsilon > 0$ и функция $f(x)$ согласованы на D, а x' – предельная точка последовательности $\left\{x_{m(k)}\right\}$, построенной по алгоритму A. Если начиная с некоторой итерации k' метода выполняется условие*

$$L_k(\varepsilon) \geq 2\sqrt{2}l(\varepsilon) \text{ при } k \geq k', \tag{2.13}$$

то верна оценка

$$|f(x') - f_*| \leq \varepsilon. \tag{2.14}$$

Доказательство. Как следует из замечания 2 работы [16, с. 1116], возможен такой выбор параметров ν и μ_k алгоритма A, при котором выполняется ограничение (2.13).

Рассмотрим последовательность гиперинтервалов $D^k_{s(k)} = \left[a_{s(k)}; b_{s(k)}\right]$, содержащих точку $x_* \in X_*$. В силу условия (1.1), положительности $l(\varepsilon)$ и определения X_* получим:

$$f(a_{s(k)}) - f(x_*) \leq l(\varepsilon)\left\|a_{s(k)} - x_*\right\| + \varepsilon$$

и

$$f(b_{s(k)}) - f(x_*) \leq l(\varepsilon)\left\|b_{s(k)} - x_*\right\| + \varepsilon.$$

Сложим эти неравенства и воспользуемся леммой 5.1 из [6, с. 230]:

$$\begin{aligned} &f(a_{s(k)}) + f(b_{s(k)}) \leq l(\varepsilon)\left(\left\|a_{s(k)} - x_*\right\| + \left\|b_{s(k)} - x_*\right\|\right) + 2\varepsilon + 2f(x_*) \leq \\ &\leq (\text{лемма } 5.1) \leq \sqrt{2}l(\varepsilon)\left\|a_{s(k)} - b_{s(k)}\right\| + 2\varepsilon + 2f(x_*). \end{aligned}$$

Для характеристики $R_k(s(k), \varepsilon)$ из (2.3) с учетом доказанного выше неравенства и условия (2.13) справедливо

$$\begin{aligned} &R_k(s(k), \varepsilon) \geq L_k(\varepsilon)\left\|a_{s(k)} - b_{s(k)}\right\| - 2\left(f(a_{s(k)}) + f(b_{s(k)})\right) \geq \\ &\geq \left(L_k(\varepsilon) - 2\sqrt{2}l(\varepsilon)\right)\left\|a_{s(k)} - b_{s(k)}\right\| - 4\varepsilon - 4f(x_*) \geq -4\varepsilon - 4f(x_*). \end{aligned}$$

Из этого, с учетом (2.11) и определения X_*, следует, что

$$R_k(p(k),\varepsilon) \geq R_k(s(k),\varepsilon) \geq -4\varepsilon - 4f(x_*) \geq -4\varepsilon - 4f(x')$$

для всех k. Переходя к пределу по k как и при доказательстве предложения 2.1, запишем неравенство

$$-4f(x') \geq -4\varepsilon - 4f(x_*) \geq -4\varepsilon - 4f(x'),$$

из которого несложно получить оценку (2.14).
Доказательство завершено.

Для алгоритма Б, в свою очередь, справедливы следующие два предложения, из которых вытекают аналогичные достаточные условия сходимости к глобальному минимуму.

Предложение 2.3. *Пусть выполнены все условия предложения 2.1, последовательность $\left\{x_{m(k)}\right\}$ построена в результате работы алгоритма Б, а x' и x'' – любые две предельные точки этой последовательности. Тогда справедливы оценки*

$$f(x') - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_{m(k)}) \quad (\forall m(k)) \tag{2.15}$$

и

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 2.1 с заменой соотношения (2.11) на аналогичное

$$R_k(p(k),\varepsilon) \leq R_k(i,\varepsilon), \;\; i = 1,\ldots,M(k). \tag{2.17}$$

Далее для характеристики $R_k(i,\varepsilon)$ алгоритма Б (2.6)получим в силу (1.1):

$$\begin{aligned}&2\left(R_k(i(k),\varepsilon) - f(a_{i(k)})\right) = f(b_{i(k)}) - f(a_{i(k)}) - L(\varepsilon)\left\|b_{i(k)} - a_{i(k)}\right\| = \\ &= f(b_{i(k)}) - f(a_{i(k)}) - L(\varepsilon)\left\|b_{i(k)} - a_{i(k)}\right\| + \varepsilon - \varepsilon \leq (\varepsilon - \text{липшицевость}) \leq \varepsilon\end{aligned}$$

из чего следует

$$R_k(i(k),\varepsilon) \leq f(a_{i(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для $b_{i(k)}$:

$$R_k(i(k),\varepsilon) \leq f(b_{i(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последних двух неравенств и (2.17) вытекает неравенство, схожее по смыслу с (2.12),

$$R_k(i(m(k)),\varepsilon) \leq f(x_{m(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}, \;\; i = 1,\ldots,M(k), \tag{2.18}$$

которое верно для всех чисел k.

Продолжив доказательство аналогично случаю в предложении 2.1, но заменив (2.11) на (2.17) и (2.12) на (2.18), получим оценки (2.15) и (2.16).
Доказательство завершено.

П р е д л о ж е н и е 2.4. *Пусть выполнены все условия предложения 2.2, последовательность $\left\{x_{m(k)}\right\}$ получена по алгоритму Б и x' – предельная точка этой последовательности. Кроме того, пусть величина $L(\varepsilon)$ такова, что*

$$L(\varepsilon) \geq \sqrt{2} l(\varepsilon). \tag{2.19}$$

Тогда справедлива оценка (2.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что выбор оценки $L(\varepsilon)$, удовлетворяющей неравенству (2.19) при фиксированном $\varepsilon > 0$, всегда возможен.

Рассматривая далее последовательность гиперинтервалов $D_{s(k)}^k = \left[a_{s(k)}; b_{s(k)}\right]$ из доказательства предложения 2.2, получим в силу (2.19) следующие неравенства для характеристики $R_k(s(k), \varepsilon)$, определяемой формулой (2.5):

$$R_k(s(k), \varepsilon) = \frac{f(a_{s(k)}) + f(b_{s(k)})}{2} + \frac{L(\varepsilon)}{2} \left\| a_{s(k)} - b_{s(k)} \right\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{2} l(\varepsilon) - L(\varepsilon) \right) \left\| a_{s(k)} - b_{t(k)} \right\| \right) + \varepsilon + f(x_*) \leq \varepsilon + f(x_*).$$

Далее идея доказательства совпадает с доказательством предложения 2.2, с заменой (2.11) на (2.17).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3. Численные эксперименты

В данном разделе приведем результаты численных экспериментов, проведенных предлагаемыми алгоритмами А и Б. В качестве стратегий разбиения были взяты «деление на 2», «деление на $2N$» и «безызбыточная», принцип работы которых подробно описан в книге [6].

В алгоритме А при реализации стратегий «деление на 2» и «деление на 2N» при разбиении гиперинтервала $D_s^k = [a_s; b_s]$ очередная поисковая точка v_s вычислялась по формуле

$$v_s = \frac{a_s + b_s}{2} - \frac{(f(b_s) - f(a_s))}{2L_k(\varepsilon) \left\| b_s - a_s \right\|} (b_s - a_s), \tag{3.1}$$

обобщающую формулу (4.15) из [6, с. 180]. Поскольку, как отмечалось выше, формула (3.1) не гарантирует принадлежность v_s интервалу D_s^k, в алгоритм А были добавлены шаги, аналогичны шагам 3 и 4 метода описанного в работе [16]. Очевидно, что при увеличении $L_k(\varepsilon)$ в (3.1) при фиксированных вершинах гиперинтервала итерационная точка v_s будет принадлежать D_s^k после конечного числа итераций, увеличивающих $L_k(\varepsilon)$. Параметр μ_k находится по формуле (4.16) из [6, с. 180]:

$$\mu_k = \left(4 + \frac{C}{k} \right), \tag{3.2}$$

где $C > 0$ задается вычислителем.

В алгоритме Б при реализации тех же стратегий «деление на 2» и «деление на 2N» точка v_s вычислялась по формуле

$$v_s = \frac{a_s + b_s}{2} - \frac{(f(b_s) - f(a_s))}{2l(\varepsilon)\,\|b_s - a_s\|}\,(b_s - a_s)\,, \tag{3.3}$$

аналогичной формуле 4.12 из [6, с. 178], т. к. оценка $l(\varepsilon)$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ предполагается известной. Для того, чтобы точка v_s гарантированно принадлежала диагонали интервала D_s^k, алгоритм Б, как и алгоритм А, был дополнен итерационной процедурой, увеличивающей используемое для (3.3) значение оценки $l(\varepsilon)$.

Эффективная стратегия, предложенная в [6, с. 178] и [19], не требует вычисления поисковой точки на диагонали лучшего интервала, а потому никаких доработок алгоритмов А и Б не потребовалось.

Далее для таблиц 3.1-3.4 использованы следующие обозначения: точность δ; стратегии разбиения P: 2 – «деление на 2», $2N$ – «деление на $2N$», E — «безызбыточная»; M – общее число гиперинтервалов; $L_k(\varepsilon)$ – оценка минимальной ε-постоянной Липшица, полученная в ходе работы алгоритма А; C – параметр алгоритма А в формуле (3.2); $l(\varepsilon)$ – оценка минимальной ε-постоянной Липшица.

Все вычисления проведены для евклидовой нормы.

Таблица 3.1. Результаты вычислений с помощью алгоритма А для функций $f_i(x,y),\ i = 1,2,3.$

Table 3.1. Algorithm «A» computational results for test functions $f_i(x,y),\ i = 1,2,3.$

i	P	δ	ε	C	(x_*, y_*)	$f_i\,(x_*, y_*)$	M	$L_k(\varepsilon)$
1	2	0.01	0.5	100	$(0.073992; -0.055940)$	-7.750060	251	7.682
		0.01	0.1	100	$(-0.019504; 0.035254)$	-8.474976	715	16.525
		10^{-5}	1.0	10	$(0.073992; 0.010002)$	-8.147025	380	5.620
	2N	0.08	0.5	100	$(0.317807; 0.317807)$	-5.690744	515	6.062
		0.08	0.1	10000	$(0.020285; 0.0202854)$	-8.672509	159	37.157
	E	0.01	0.5	100	$(-0.041152; 0.074074)$	-7.866062	518	18.539
		0.01	0.1	100	$(-0.002743; -0.002743)$	-9.489698	10002	133.964
		10^{-5}	1.0	10	$(2.25E-5; 2.25E-5)$	-9.952594	168	11.156
2	2	0.01	0.5	100	$(0.163965; -0.043142)$	-9.342395	117	16.419
		0.01	0.1	100	$(0.163965; -0.043142)$	-9.342395	1282	24.407
		10^{-5}	1.0	10	$(-0.032203; -0.008222)$	-11.363615	1499	20.070
	2N	0.01	0.5	100	$(-0.025239; -0.025239)$	-11.215474	254	33.185
		0.01	0.1	2000	$(-0.025239; -0.025239)$	-11.215474	323	154.505
		10^{-5}	1.5	10	$(5.08E-5; 5.08E-5)$	-12.647243	3467	33.432
	E	0.01	0.5	100	$(-0.041152; 0.074074)$	-10.401066	864	42.544
		10^{-3}	0.1	100	$(-0.002743; -0.002743)$	-12.207576	8112	135.933
		10^{-5}	1.0	10	$(2.25E-5; 2.25E-5)$	-12.670875	798	32.235
3	2	0.06	0.5	100	$(-9.175384; -9.074912)$	-4.674386	1615	12.067
		0.07	0.1	100	$(9.559754, -10.0)$	-4.603072	1611	14.974
	2N	0.01	0.5	100	$(9.53125; -9.53125)$	-5.3210644	4811	14.553
		0.01	0.1	100	$(9.53125; -9.53125)$	-5.3210644	7097	16.515
	E	0.01	0.5	100	$(-9.506172; -9.506172)$	-5.330926	934	11.092
		0.01	0.1	100	$(-9.506172; -9.506172)$	-5.330926	1102	13.803

Таблица 3.2. Результаты вычислений с помощью алгоритма Б для функций $f_i(x,y),\ i=1,2,3$

Table 3.2. Algorithm «Б» computational results for test functions $f_i(x,y),\ i=1,2,3$

i	P	δ	ε	$l(\varepsilon)$	(x_*, y_*)	$f_i\,(x_*, y_*)$	M
1	2	0.01	0.5	25	$(-0.019504; 0.035254)$	-8.474976	5372
		0.03	0.1	125	$(-0.128338; -0.055940)$	-7.381970	3522
		10^{-5}	1.0	12.5	$(0.004509; 0.0103147)$	-9.175077	2807
	2N	0.01	0.5	25	$(0.317807; 0.317807)$	-5.690744	1529
		0.1	0.1	125	$(0.317807; 0.317807)$	-5.690744	1571
		10^{-5}	2.5	5	$(5.51E-5; 5.51E-5)$	-9.926038	2987
	E	0.01	0.5	25	$(-0.041152; 0.074074)$	-7.866062	1748
		0.01	0.1	125	$(-0.041152; 0.074074)$	-7.866062	6942
		10^{-5}	2.5	5	$(2.25E-5; 2.25E-5)$	-9.952594	148
2	2	0.1	0.5	33.539	$(0.163965; -0.043142)$	-9.342395	291
		0.08	0.1	133.539	$(0.163965; -0.043142)$	-9.342395	590
	2N	0.01	0.5	33.539	$(-0.025239; -0.025239)$	-11.215474	314
		0.08	0.1	133.539	$(-0.025239; -0.025239)$	-11.215474	575
	E	0.01	0.5	33.539	$(-0.041152; 0.074074)$	-10.401066	2488
		0.01	0.1	133.539	$(-0.041152; 0.074074)$	-10.401066	6702
		10^{-5}	1.0	21.039	$(2.25E-5; 2.25E-5)$	-12.670875	912
3	2	0.1	0.5	9.700	$(9.559754; -10.0)$	-4.603072	567
		0.09	0.1	25.803	$(9.559754, -10.0)$	-4.603072	715
	2N	0.01	0.5	9.700	$(-10.0, -10.0)$	-3.995422	287
		0.05	0.1	25.803	$(9.375, -9.375)$	-5.272921	1295
	E	0.01	0.5	9.700	$(-9.506172; -9.506172)$	-5.330926	1670
		0.01	0.1	25.803	$(-9.506172; -9.506172)$	-5.330926	6794

Пример 3.1. Найдем глобальный минимум следующих функций

$$f_1(x,y) = -10e^{-\sqrt{0.5(|x|+|y|)}} \text{ на } [-2;12]^2,$$
$$f_2(x,y) = f_1(x,y) - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} \text{ на } [-2;12]^2,$$
$$f_3(x,y) = -\left|\cos x \cos y\, e^{0.5\,\left|1-\sqrt{|x|+|y|}\right|}\right| \text{ на } [-10;10]^2.$$

рассмотренных в работе [17]. В той же работе получены формулы для оценивания величины $l(\varepsilon)$ при фиксированном $\varepsilon > 0$. Отметим, что данные функции непрерывны на области поиска, но не липшицевы. Результаты вычислений алгоритмами А и Б для трех стратегий разбиения приведены в Таблицах 3.1 и 3.2 соответственно. Для наглядности на Рис. 3.1 – 3.3 изображены графики оптимизируемых функций для указанных начальных гиперинтервалов.

Поскольку безызбыточная (эффективная) стратегия в целом показала лучший результат, то все последующие вычислительные эксперименты проводились только для данной стратегии.

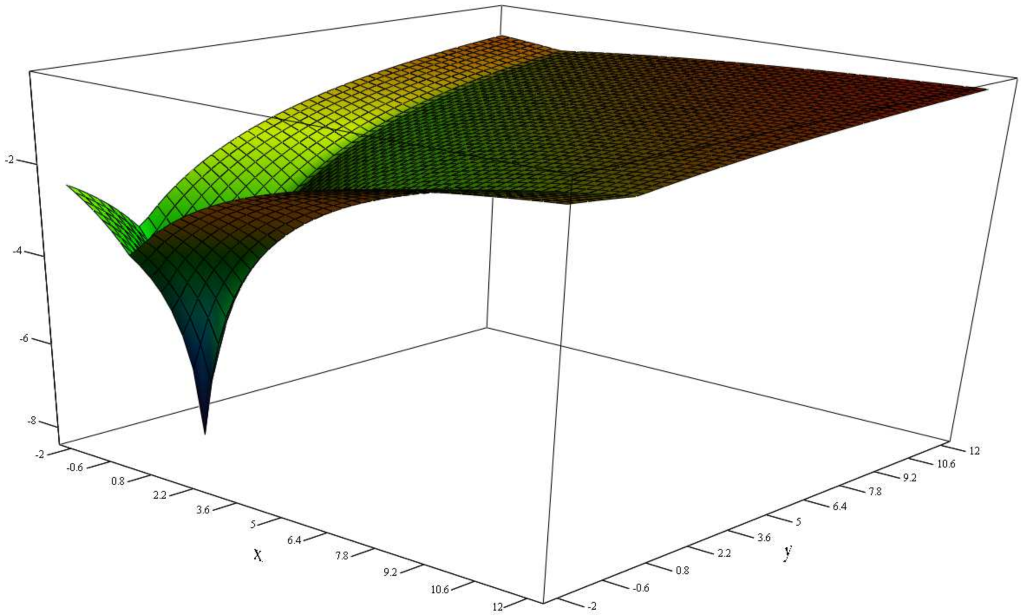

Рис. 3.1. График тестовой функции $f_1(x, y)$
Fig 3.1. Test function $f_1(x, y)$ plot

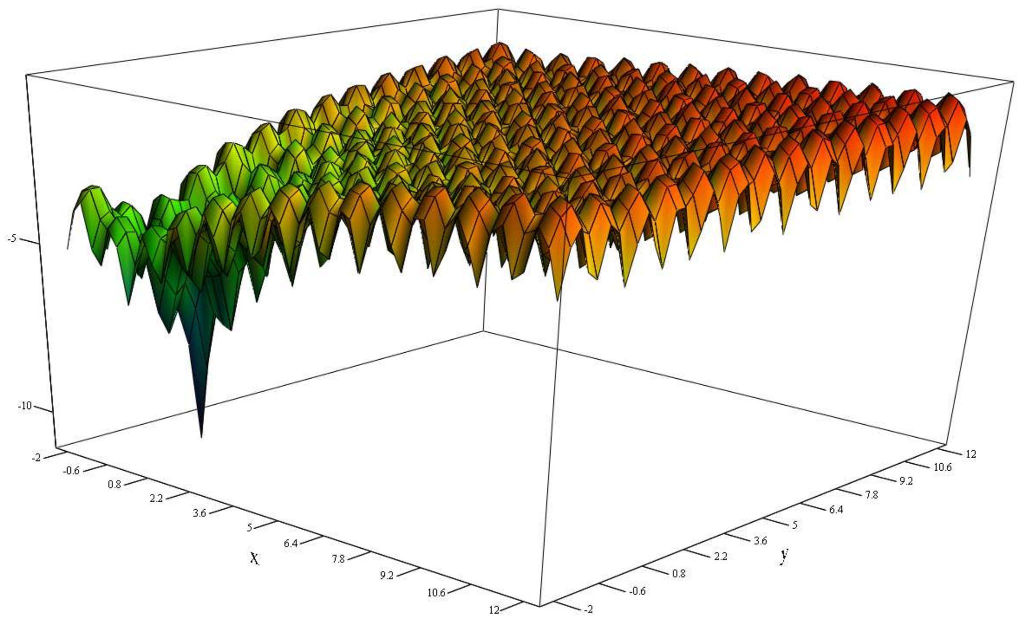

Рис. 3.2. График тестовой функции $f_2(x, y)$
Fig 3.2. Test function $f_2(x, y)$ plot

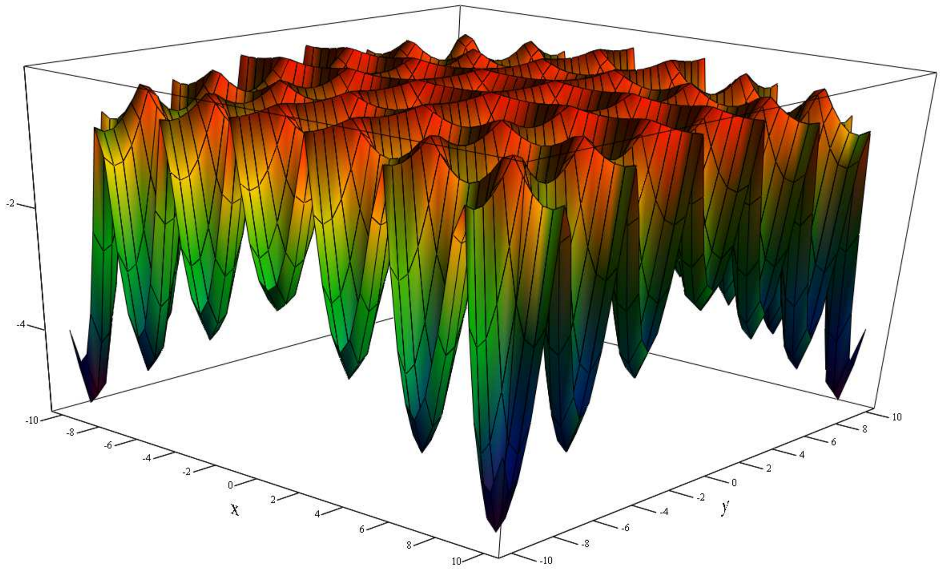

Рис. 3.3. График тестовой функции $f_3(x,y)$
Fig 3.3. Test function $f_3(x,y)$ plot

П р и м е р 3.2. Требуется найти глобальный минимум непрерывных функций:

$$f_4(x,y) = \min\left(\sqrt{|x+4|+|y+4|}-1, \sqrt{|x+1|+|y+1|}-1.005, \sqrt{|x-3|+|y-3|}+0.5\right)$$

и

$$f_5(x,y) = \sin(5y)\arcsin(x) - \sin(5x)\arcsin(y),$$

заданных на различных начальных гиперинтервалах поиска, на которых эти функции не являются липшицевыми. Функция f_4 является модификацией функции одной переменной f_1 из статьи [16], где она была оптимизирована обобщенным алгоритмом Стронгина. Функция f_5 приведена в качестве примера в работе [17], где для неё была получена процедура получения значения $l(\varepsilon)$ при заданном $\varepsilon > 0$. Оптимизация данных функций f_4 и f_5 проводилась алгоритмом A с помощью безызбыточной стратегии. Результаты расчетов представлены в Таблице 3.3, а на Рис. 3.4-3.5 приведены графики рассмотренных целевых функций. В таблице дополнительно через D обозначены начальные области поиска.

П р и м е р 3.3. Рассматриваются модификации некоторых функций из примера 3.1 на случай трех переменных:

$$f_1(x,y,z) = -10e^{-\sqrt{\frac{(|x|+|y|+|z|)}{3}}} \text{ на } [-2;12]^3$$

и

$$f_2(x,y,z) = f_1(x,y,z) - e^{\frac{(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi \mathrm{y})+\cos(2\pi z))}{3}} \text{ на } [-2;12]^3.$$

Таблица 3.3. Результаты вычислений с помощью алгоритма A для функций $f_i(x, y), \ i = 4, 5$

Table 3.3. Algorithm «A» computational results for test functions $f_i(x, y), \ i = 4, 5$

i	D	δ	ε	(x_*, y_*)	$f_i\,(x_*, y_*)$	M	$L_k(\varepsilon)$
4	$[-5; 5]^2$	0.01	0.5	$(-1.008230; -0.925925)$	-0.718112	88	2.363
			0.1	$(-4.012345; -4.012345)$	-0.842865	486	6.671
		10^{-3}	0.5	$(-0.999085; -0.999085)$	-0.962233	98	2.276
			0.1	$(-0.999988; -0.999988)$	-1.000248	114	2.168
		10^{-5}	0.5	$(-0.999988; -0.999988)$	-1.000248	114	2.168
			0.1	$(-0.999988; -0.999988)$	-1.000248	556	6.592
	$[-10; 10]^2$	0.01	0.5	$(-4.074074; -4.074074)$	-0.615099	150	1.994
			0.1	$(-4.074074; -4.074074)$	-0.615099	408	4.067
		10^{-3}	0.5	$(-4.000914; -4.000914)$	-0.957233	160	1.962
			0.1	$(-1.001371; -1.001371)$	-0.952621	1854	9.279
		10^{-5}	0.5	$(-4.000011; -4.000011)$	-0.995248	176	1.920
			0.1	$(-1.000016; -1.000016)$	-0.999180	1870	9.277
5	$[-1; 1]^2$	0.01	0.5	$(-1.0; 0.333333)$	-1.889461	218	17.546
			0.1	$(0.341563; 1.0)$	-1.890335	488	29.563
		10^{-3}	0.5	$(0.341563, 1.0)$	-1.890335	390	16.102
			0.1	$(1.0, -0.340649)$	-1.890367	1204	27.929
		10^{-5}	0.5	$(0.341563, 1.0)$	-1.890335	408	16.021
			0.1	$(0.340344, 1.0)$	-1.890370	1226	27.909

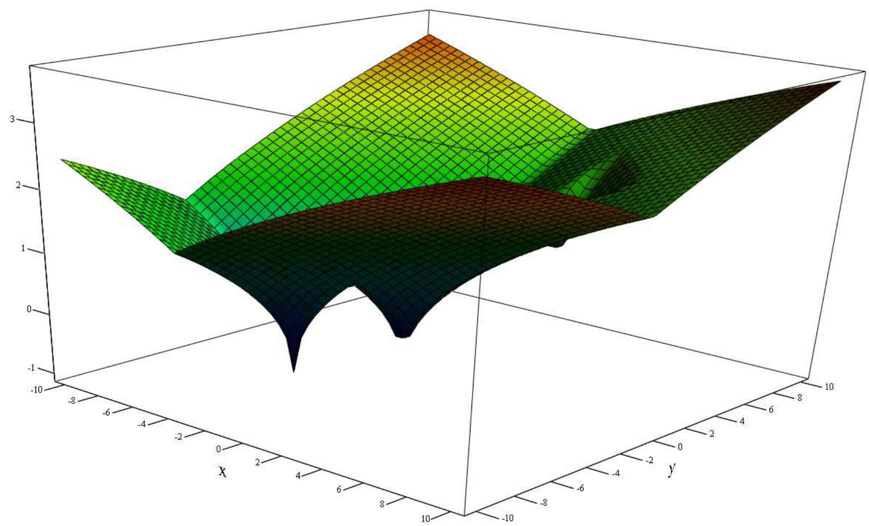

Рис. 3.4. График тестовой функции $f_4(x, y)$

Fig 3.4. Test function $f_4(x, y)$ plot

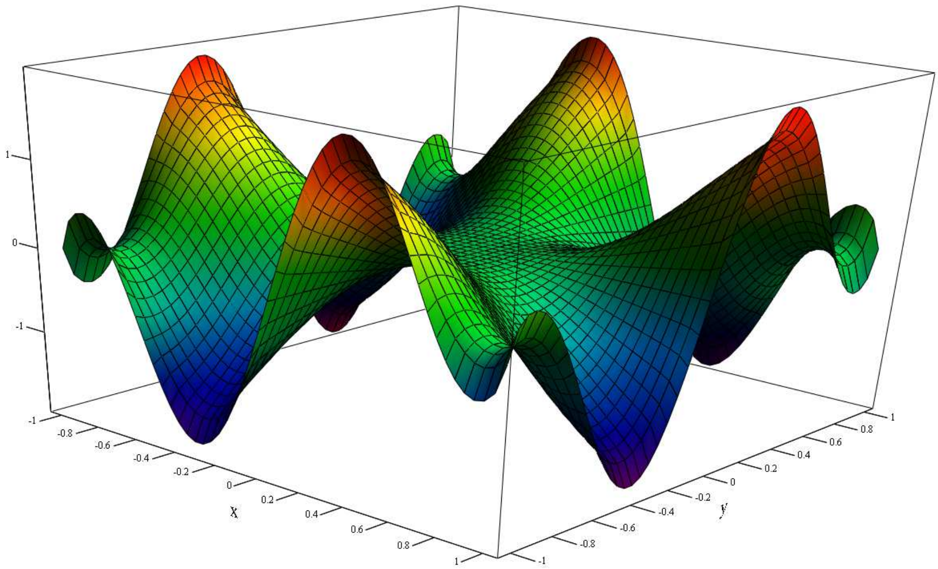

Рис. 3.5. График тестовой функции $f_5(x, y)$
Fig 3.5. Test function $f_5(x, y)$ plot

Также в рамках примера рассмотрена модификация функций $f_4(x, y)$ на случай трех переменных:

$$\begin{aligned}
&f_3(x, y, z) = \min\left(a, b, c\right), \\
&a = a(x, y, z) = \sqrt{|x+4| + |y+4| + |z+4|} - 1, \\
&b = b(x, y, z) = \sqrt{|x+1| + |y+1| + |z+1|} - 1.005, \\
&c = c(x, y, z) = \sqrt{|x-3| + |y-3| + |z-3|} + 0.5.
\end{aligned}$$

на множестве $[-5; 5]^3$.

Как и в предыдущих примерах указанные целевые функции нелипшицевы на задаваемых начальных гиперинтервалах. Для данных функций с помощью алгоритма A при безызбыточной стратегии был приближенно найден глобальный минимум. Результаты расчетов приведены в Таблице 3.4.

П р и м е р 3.4. Пусть далее $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 10$ и на гиперинтервале $D = [-5; 5]^{10}$ задана функция $F(x)$ вида

$$F(x) = \min\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + 4|} - 1, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + 1|} - 1.005, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - 3|} + 0.5\right).$$

Таблица 3.4. Результаты вычислений с помощью алгоритма A для функций $f_i(x, y, z),\ i = 1, 2, 3$

Table 3.4. Algorithm «A» computational results for test functions $f_i(x, y, z),\ i = 1, 2, 3$

i	ε	(x_*, y_*)	$f_i\,(x_*, y_*)$	M	$L_k(\varepsilon)$
1	2.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-9.952594	118	3.087
	1.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-9.952594	1070	8.887
	0.8	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-9.952594	1332	9.773
2	2.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-12.670875	2456	13.373
	1.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-12.670875	8654	19.661
	0.8	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-12.670875	20182	28.835
3	1.0	$(-3.999983; -3.999983; -3.999983)$	-0.992872	74	0.483
	0.5	$(-0.999988; -0.999988; -0.999988)$	-0.999180	102	0.829
	0.1	$(-0.999988; -0.999988; -0.999988)$	-0.999180	6956	6.473

С помощью алгоритма A при $\delta = 10^{-5}$ был рассчитан глобальный минимум $F(x)$ на D при параметрах алгоритма $\varepsilon = 1.0$, $C = 100$ и безызбыточной стратегии. В результате вычислений получена точка

$$x_* = \begin{pmatrix} \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-0.9999887099414605;} \\ \text{-1.00010161052685;} \\ \text{-1.00010161052685} \end{pmatrix}^T$$

и соответствующее ей значение функции $F(x_*) =$ -0.9878669465063515. Алгоритм завершился за 2 034 шага, было построено 4 070 областей поиска и была вычислена приблизительная оценка величины минимальной ε-постоянной Липшица $L_k(\varepsilon) = 0.675204$.

Список литературы

1. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Теория оптимальных решений. 1967. Т. 2. С. 13–24.

2. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12, № 4. С. 885–896. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90115-2

3. Евтушенко Ю. Г. Численный метод поиска глобального экстремума функции (перебор на неравномерной сетке) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11, № 6. С. 1390–1403. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90065-6

4. Shubert B. A sequential method seeking the global maximum of a function // SIAM J. Numer. Anal. 1972. Vol. 9, No. 3. pp. 379–388. DOI: https://doi.org/10.1137/0709036

5. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978. 240 с.

6. Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. 251 с.

8. Vanderbei R. J. Extension of Piyavskii's algorithm to continuous global optimization // Journal of Global Optimization. 1999. Vol. 14. pp. 205–216. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1008395413111

9. Romaguera S., Sanchis M. Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric space // J. Approx. Theory. 2000. Vol. 103, No. 2. pp. 292–301. DOI: https://doi.org/10.1006/jath.1999.3439

10. Jouini E. Generalized Lipschitz functions // Nonlinear Anal. 2000. Vol. 41. pp. 371–382.

11. Садыгов М. А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве // ДАН. 2013. Т. 52, № 5. С. 490–493. DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565213300075

12. Sergeyev Y. D., Candelieri A., Kvasov D. E., Perego R. Safe global optimization of expensive noisy black-box functions in the δ-Lipschitz framework // Soft. Comput. 2020. Vol. 24, pp. 17715–17735. DOI: https://doi.org/10.1007/s00500-020-05030-3

13. Заботин В. И., Чернышевский П. А. Две модификации обобщенного метода Пиявского поиска глобального минимума непрерывной на отрезке функции и их сходимость // Вестник Тверского государственного университета. Сер. «Прикладная математика». 2021. № 3. С. 70–85. DOI: https://doi.org/10.26456/vtpmk624

14. Арутюнова Н. К. Метод Евтушенко поиска глобального минимума ε–липшицевой функции и его приложения // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2013. № 2. С. 154–157.

15. Arutyunova N. K., Dulliev A. M., Zabotin V. I. Models and methods for three external ballistics inverse problems // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2017. Т. 10, № 4. С. 78–91. DOI: https://doi.org/10.14529/mmpl70408

16. Zabotin V. I., Chernyshevskij P. A. Extension of Strongin's global optimization algorithm to a function continuous on a compact interval // Computer Research and Modeling. 2019. Vol. 11, No. 6. pp. 1111–1119. DOI: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1111-1119

17. Arutyunova N. K., Dulliev A. M., Zabotin V. I. Global optimization of multivariable functions satisfying the Vanderbei condition // J. Appl. Math. Comput. 2022. Vol. 68, No. 3. 1135–1161. DOI: https://doi.org/10.1007/s12190-021-01563-4

18. Заботин В. И., Чернышевский П. А. Алгоритм вычисления минимальной оценки ε-постоянной Липшица непрерывной функции // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2018. № 2. С. 127–132.

19. Sergeyev Y. D. Efficient strategy for adaptive partition of N-dimensional intervals in the framework of diagonal algorithms // Journal of Optimization Theory and Applications 2000. Vol. 107. pp. 145–168. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1004613001755

Поступила 19.07.2022; доработана после рецензирования 07.10.2022; принята к публикации 23.11.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. S. A. Piyavskii, “An algorithm for finding the absolute extremum of a function”, *Teoriya optimalnykh resheniy*, **2** (1967), 13–24 (In Russ.).

2. S. A. Piyavskii, “An algorithm for finding the absolute extremum of a function”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **12**:4 (1972), 57–67885–896 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90115-2

3. Yu. G. Evtushenko, “Numerical method for finding the global extremum of a function (iteration on an uneven grid)”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **11**:6 (1971), 38–54 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90065-6 1390–1703

4. B. Shubert, “A sequential method seeking the global maximum of a function”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **9**:3 (1972), 379-388.

5. R. G. Strongin, *[Numerical methods in multiextremal problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 240 p.

6. Ya. D. Sergeev, D. E. Kvasov, *[Diagonal methods of global optimization]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 352 p.

7. B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1967, 251 p.

8. R. J. Vanderbei, “Extension of Piyavskii’s algorithm to continuous global optimization”, *Journal of Global Optimization*, **14** (1999), 205-216. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1008395413111

9. S. Romaguera, M. Sanchis, “Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric space”, *J. Approx. Theory*, **103**:32 (2000), 292–301. DOI: https://doi.org/10.1006/jath.1999.3439

10. E. Jouini, “Generalized Lipschitz functions”, *Nonlinear Anal.*, **41** (2000), 371-382.

11. M. A. Sadygov, “[Extremum problems with constraints in metric space]”, *Doklady akademii nauk*, **52**:5 (2013), 490–493 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565213300075

12. Y. D. Sergeyev, A. Candelieri, D. E. Kvasov, R. Perego et al., “Safe global optimization of expensive noisy black-box functions in the δ-Lipschitz framework”, *Soft. Comput.*, **24** (2020), 17715-17735. DOI: https://doi.org/10.1007/s00500-020-05030-3

13. V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij, “Two modifications of extension of Piyavskii's global optimization algorithm to a function continuous on a compact interval and its convergence”, *Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics*, **3** (2021), 70-85 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.26456/vtpmk624

14. N. K. Arutyunova, “[Yevtushenko's method of finding the global minimum of the ε-Lipschitz function and its applications]”, *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva*, **2**:2 (2013), 154-157 (In Russ.).

15. N. K. Arutyunova, A. M. Dulliev, V. I. Zabotin, “Models and methods for three external ballistics inverse problems”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, **10**:4 (2017), 78-91. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp170408

16. V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij, “Extension of Strongin's global optimization algorithm to a function continuous on a compact interval”, *Computer Research and Modeling*, **11**:6 (2019), 1111-1119. DOI: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1111-1119

17. N. K. Arutyunova, A. M. Dulliev, V. I. Zabotin, “Global optimization of multivariable functions satisfying the Vanderbei condition”, *J. Appl. Math. Comput.*, **68**:3 (2022), 1135-1161. DOI: https://doi.org/10.1007/s12190-021-01563-4

18. V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij, “[Algorithm for calculating the minimum estimate of the ε-Lipschitz constant of a continuous function]”, *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva*, **2** (2018), 127-132 (In Russ.).

19. Y. D. Sergeyev, “Efficient strategy for adaptive partition of N-dimensional intervals in the framework of diagonal algorithms.”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **107** (2000), 145-168. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1004613001755

Submitted 19.07.2022; Revised 07.10.2022; Accepted 23.11.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.