

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.267-279

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 531.36:62-50

## ПИД-регуляторы с запаздыванием в задаче о стабилизации программных движений роботов-манипуляторов

А. С. Андреев, Л. В. Колегова

*Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Россия)*

**Аннотация.** Широкое применение в решении задач об управлении техническими системами, в т. ч. механическими, имеют пропорционально-интегро-дифференцирующие (ПИД) регуляторы. При этом большинство работ ограничивается исследованием задачи о стабилизации установившихся движений и состояний на основе анализа модельных уравнений в линейном приближении. Одной из актуальных задач механики управляемого движения продолжает оставаться задача использования ПИД-регуляторов в отслеживании траекторий многозвенных роботов-манипуляторов в нелинейной постановке с достижением полуглобальной и глобальной стабилизации. Практически малоисследованной является задача обоснования применимости таких регуляторов с учетом возможного запаздывания в структуре обратной связи. Настоящая работа посвящена исследованию такой задачи. В качестве решения прикладной задачи найдено управление движением шестизвенного робота-манипулятора.

**Ключевые слова:** робот-манипулятор, управление, ПИД-регулятор, запаздывание, функционал Ляпунова

**Для цитирования:** Андреев А. С., Колегова Л. В. ПИД-регуляторы с запаздыванием в задаче о стабилизации программных движений роботов-манипуляторов // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 267–279. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.267-279>

*Об авторах:*

**Андреев Александр Сергеевич**, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9408-0392>, [asa5208@mail.ru](mailto:asa5208@mail.ru)

**Колегова Любовь Владимировна**, ассистент кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3160-0602>, [lyubov\\_fedorova\\_1994@mail.ru](mailto:lyubov_fedorova_1994@mail.ru)

© А. С. Андреев, Л. В. Колегова



MSC2020 39A30

# PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions

A. S. Andreev, L. V. Kolegova

*Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)*

**Abstract.** Proportional-integro-differentiating (PID) controllers are widely used in solving control problems of technical systems, including mechanical ones. For this case, most of works are limited to the study of stabilization problem for steady motions and states; such studies are based on the analysis of model equations in a linear approximation. On the other hand, one of the urgent problems of controlled-motion mechanics is the problem of using PID controllers in tracking the trajectories of multi-link robotic manipulators with semi-global or global stabilization in a non-linear formulation. Practically little studied is the problem of justifying the applicability of such controllers taking into account possible delay in the feedback structure. This paper deals with such a problem. As an application of the theory developed in this paper, the control for a motion of a six-link manipulator is obtained.

**Keywords:** robotic arm, control, PID controller, delay, Lyapunov functional

**For citation:** A. S. Andreev, L. V. Kolegova. PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:3(2022), 267–279. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.267-279>

*About the authors:*

**Aleksandr S. Andreev**, Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 L. Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9408-0392>, [asa5208@mail.ru](mailto:asa5208@mail.ru)

**Lubov V. Kolegova**, Assistant Professor, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 L. Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), <https://orcid.org/0000-0002-3160-0602>, [lyubov\\_fedorova\\_1994@mail.ru](mailto:lyubov_fedorova_1994@mail.ru)

## 1. Введение

Математические модели современных механических систем описываются нелинейными системами дифференциальных уравнений высокой размерности. Это обуславливает достаточные сложности в обосновании методов конструирования структуры управления такими системами.

Широкое распространение в управлении техническими, в т. ч. механическими системами, имеют пропорционально-интегро-дифференцирующие (ПИД) регуляторы. Такие регуляторы используются во многих контурах управления, их структура компактна и проста, они позволяют достичь цели для большинства манипуляционных роботов. Разработка и использование ПИД-регуляторов в управлении роботами-манипуляторами является предметом многочисленных исследований уже на протяжении 40 лет. Эти исследования посвящены повышению эффективности ПИД-управления путем различной

реализации дифференцирующей части регулятора, модификацией интегральной составляющей. Основные результаты по применению различных типов ПИД-регуляторов достигнуты в решении задач в нелинейной постановке о полуглобальной и глобальной стабилизации программного положения манипулятора. Менее исследованными являются задачи об отслеживании траектории или стабилизации программного движения. Анализ известных работ в этом направлении можно найти в статьях [1–3]. Сравнительно мало работ посвящено исследованию задач по методам управления механическими системами с учетом запаздывания в управлении. Это объясняется тем, что эти задачи основываются на моделировании посредством функционально-дифференциальных уравнений, качественная теория которых значительно сложнее, чем для обыкновенных уравнений.

В данной работе решаются задачи об отслеживании траекторий многозвенных роботов-манипуляторов при помощи ПИД-регуляторов с учетом запаздывания в структуре обратной связи.

## 2. Математическая модель манипулятора и управление

Широкое применение в управлении различными системами и процессами получили пропорционально-интегро-дифференциальные (ПИД) регуляторы. В частности, множество работ посвящено задаче о стабилизации движений роботов-манипуляторов с таким управлением. Определенный анализ таких работ приведен в публикациях [1–3]. В настоящей работе эта задача исследуется с учетом запаздывания в структуре обратной связи.

Рассматривается модель многозвеного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами, движение которого описывается уравнениями Лагранжа

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + D\dot{q} = u, \quad (2.1)$$

где  $q \in \mathbb{R}^n$  – вектор обобщенных угловых координат и линейных перемещений шарниров;  $A(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица инерции;  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  – вектор кориолисовых и центробежных сил инерции, обусловленных выбором координат  $q$ ;  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  – вектор гравитационных сил;  $D\dot{q}$  – вектор сил вязкого трения, действующих в шарнирах,  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  ( $d_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ );  $u \in \mathbb{R}^n$  – управление.

Пусть  $q = q^{(0)}(t)$  ( $|q^{(0)}(t)| \leq q_{10}$ ,  $|\dot{q}^{(0)}(t)| \leq q_{20}$ ,  $|q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2$ ) – некоторое программное движение манипулятора, осуществляемое под действием программного управления

$$u^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))\ddot{q}^{(0)}(t) + C(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t)) + D\dot{q}^{(0)}(t). \quad (2.2)$$

Пусть  $x = q - q^{(0)}(t)$ ,  $\dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)$  – составляющие возмущенного движения.

Соответствующие уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} + C^{(1)}(t, x, \dot{x})\dot{x} + R(t, x) + D\dot{x} = u^{(1)}, \quad (2.3)$$

где  $A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x)$ ,  $C^{(1)}(t, x, \dot{x}) = C(q^{(0)}(t) + x, \dot{x})$ ,  $R(t, x) = (A(q^{(0)}(t) + x) - A(q^{(0)}(t)))\ddot{q}^{(0)}(t) + (C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - C^{(1)}(t, 0, \dot{q}^{(0)}(t)))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t) + x) - g(q^{(0)}(t))$ ;  $u^{(1)} = u - u^{(0)}(t)$  – управляющее воздействие, задачей которого согласно классической постановке является обеспечение стабилизации заданного программного движения  $q^{(0)}(t)$  или асимптотической устойчивости нулевого решения  $\dot{x} = x = 0$  системы (2.3).

Обобщенные координаты, соответствующие цилиндрическим шарнирам, являются угловыми. Соответственно, массо-инерционные параметры системы, центробежные, кориолисовы и гравитационные силы определяются функциями, периодическими по этим координатам, и движение системы (2.3) можно рассматривать в соответствующем цилиндрическом пространстве [4], например, без ограничения общности, с периодом  $2\pi$ .

Составляющая  $R(t, x)$  системы (2.3) может быть разложена в виде зависимости

$$R(t, x) = F(t, x)p(x), \quad (2.4)$$

где  $p(x) = (p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_n(x_n))'$ ; функции  $p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_m(x_m)$  ( $m \leq n$ ) являются линейными относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , отвечающих призматическим шарнирам,  $p_i = p_i^0 x_i$  ( $p_i^0 = \text{const} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ); функции  $p_{m+1}(x_{m+1}), p_{m+2}(x_{m+2}), \dots, p_n(x_n)$  являются периодическими относительно переменных  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ , отвечающих цилиндрическим шарнирам, при этом функции  $p_i = p_i(x_i)$  ( $i = m+1, m+2, \dots, n$ ) имеют следующие свойства [4]:

а)  $|p_j(x_j)|$  является периодической функцией с периодом  $2\pi \forall x_j \in \mathbb{R}$ ;  $p_j(2\pi l) = 0$ ,  $|p_j(x_j)| > 0 \forall x_j \neq 2\pi l$  ( $j = m+1, m+2, \dots, n$ )  $\forall l \in \mathbb{Z}$ ;

б) функция  $r(x) = (r_1(x_1), r_2(x_2), \dots, r_n(x_n))'$ , определяемая по формуле

$$r_j(x_j) = \int_0^{x_j} p_j(x_j) dx_j \quad \forall x_j \in \mathbb{R}, j = m+1, m+2, \dots, n, \quad (2.5)$$

является ограниченной и непрерывно дифференцируемой, такой, что  $r_j(x_j)$  – периодическая функция с периодом  $4\pi \forall x_j \in \mathbb{R}$ ;  $r_j(4\pi l) = 0$ ,  $r_j(x_j) > 0 \forall x_j \neq 4\pi l \forall l \in \mathbb{Z}$ ,  $j = m+1, m+2, \dots, n$ .

В дальнейшем для удобства разделим вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  на  $x^{(1)} \in \mathbb{R}^m$ ,  $x^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$  с нормой  $|x^{(1)}|_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$  и вектор  $x^{(2)} \in T^{(n-m)} = \{-\pi \leq x_s \leq \pi, s = m+1, m+2, \dots, n\}$ . Здесь и далее  $(\cdot)'$  – операция транспонирования.

Пусть  $M_1(H_0) \subset \mathbb{R}^n$  есть область  $M_1 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) : |x^{(1)}|_m \leq H_0, x^{(2)} \in T^{(n-m)}\}$ ,  $M_2 \subset \mathbb{R}^n$  есть соответствующая область, такая, что  $M_2 = \{p \in \mathbb{R}^n : |p(x)| \leq p_0 \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in M_1\}$ .

Исследуется задача о стабилизации программного движения манипулятора посредством управляющего воздействия типа ПИД-регулятора с учетом запаздывания в структуре обратной связи

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t-h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t-h_2(t)) - \int_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau-t) \dot{x}(\tau) d\tau - \int_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau-t) p(x(\tau)) d\tau, \quad (2.6)$$

где  $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $B_1$  и  $B_2$  – постоянные матрицы),  $B_3, B_4 \in C([-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n})$  – матрицы усиления;  $h_k$  – запаздывания, определяемые структурой обратной связи,  $h_i \in C^1(\mathbb{R}^+ \rightarrow [0, h_0])$ ,  $i = 1, 2, 3, h_0, h_4$  – положительные постоянные.

### 3. Отслеживание траектории манипулятора в случае достаточных сил вязкого трения

Вначале рассмотрим случай достаточных сил вязкого трения, или когда отсутствует запаздывание в измерениях по скоростям. Соответственно, будем полагать, что управляющее воздействие имеет следующий вид:

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t - h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t) - \int_{t-h_0}^{t-h_2} B_4(\tau - t) p(x(\tau)) d\tau, \tag{3.1}$$

где  $B_1 = \text{diag}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$ ,  $b_{1i} = \text{const} > 0$ ,  $B_2 = \text{diag}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$ ,  $b_{2i} = \text{const} \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $B_4(s) = \text{diag}(b_{41}(s), b_{42}(s), \dots, b_{4n}(s))$ ,  $b_{4i} \in C([-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Преобразуем выражение (3.1) для  $u^{(1)}$  следующим образом

$$u^{(1)} = -(B_1 + B_{41})p(x(t)) - B_2 \dot{x}(t) + B_1 \int_{t-h_1(t)}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + \int_{t-h_0}^{t-h_2} B_{42}(\tau - t) \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + B_{41} \int_{t-h_2}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau, \tag{3.2}$$

где

$$B_{41} = \int_{-h_0}^{-h_2} B_4(s) ds, \quad B_{42}(\tau - t) = \int_{-h_0}^{\tau-t} B_4(s) ds.$$

Подставив выражение (3.2) для  $u^{(1)}$  в уравнение (2.3), получим

$$A^{(1)}(t, x) \ddot{x} = -C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x}) \dot{x} - (B_1 + B_{41} + F(t, x))p(x) - (D + B_2) \dot{x} + B_1 \int_{t-h_1(t)}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + \int_{t-h_0}^{t-h_2} B_{42}(\tau - t) \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + B_{41} \int_{t-h_2}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau. \tag{3.3}$$

Для решения задачи воспользуемся методами работ [4–5]. Для этого отметим, что предельные к (3.3) уравнения имеют аналогичную структуру. Поэтому для применения теорем из [4–5] достаточно провести качественный анализ системы на основе уравнений (3.3).

Введем функционал Ляпунова

$$V_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}(t) + Sp(x(t)))' A^{(1)}(t, x(t))(\dot{x}(t) + Sp(x(t))) + \sum_{i=1}^n (b_{1i} + s_i(b_{2i} + d_i)) \int_0^{x_i} p_i(x_i) dx_i + \frac{\lambda_1}{2} \int_{-h_0}^0 \left( \int_{\tau}^0 \dot{x}^2(\tau + s) ds \right) d\tau + \frac{\lambda_2}{2} \int_{-h_0}^{-h_2} \left( \int_{\tau}^0 \dot{x}^2(\tau + s) ds \right) d\tau + \frac{\lambda_3}{2} \int_{-h_2}^0 \left( \int_{\tau}^0 \dot{x}^2(\tau + s) ds \right) d\tau, \tag{3.4}$$

где

$$\lambda_1 = |B_1| \left( \max \left| \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right| \right) + \varepsilon_0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \max \left( |B_4(s)|, \max \left| \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right| \right) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Для функционала (3.4) находим оценки

$$a_0(|\dot{x}(t)|^2 + |p(x(t))|^2) \leq V_1 \leq a_1(\sup(|\dot{x}(t+s)|^2, -h_0 \leq s \leq 0) + |p(x(t))|^2) \quad a_0, a_1 = \text{const} > 0. \tag{3.5}$$

Функционал  $V_1$  обращается в нуль на множестве

$$E_1 = \{V_1 = 0\} = \{\dot{x} = 0, x^{(1)} = 0, x^{(2)} = 4\pi k, k = (k_1, k_2, \dots, k_{n-m})', k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, (n-m)\}.$$

Для производной функционала (3.4) в силу системы (3.3) найдем оценку

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq (\dot{x}(t))' L_1(t, x(t)) \dot{x}(t) + (p(x(t)))' L_2(t, x(t)) \dot{x}(t) + (p(x(t)))' L_3(t, x(t)) p(x(t)), \\ L_1(t, x) &= C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) - (D + B_2) + A^{(1)}(t, x) S \frac{\partial p(x)}{\partial x} + 2\lambda_0 h_0 E, \\ L_2(t, x) &= S(C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t))' + A^{(1)}(t, x) S \frac{\partial p(x)}{\partial x} - F'(t, x), \\ L_3(t, x) &= SC^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) - F'(t, x) S - B_1 S, \lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Выберем матрицы  $B_1$  и  $B_2$  управляющего воздействия (3.1) с величиной запаздывания  $h_0 > 0$  из условия отрицательной определенности квадратичной по  $(\dot{x}, p)$  формы

$$\begin{aligned} W_1(t, x, \dot{x}, p) &= \dot{x}' L_1(t, x) + \dot{x} L_2(t, x) p + p' L(t, x) p \leq -W_0(\dot{x}, p) = -\alpha_1 |\dot{x}|^2 - \alpha_2 |p|^2, \\ \alpha_1, \alpha_2 &= const > 0, \end{aligned}$$

при значениях  $(t, x, \dot{x}, p) \in \mathbb{R}^+ \times M_1 \times \mathbb{R}^n \times M_2$ .

Тогда для  $\dot{V}_1(t)$  будем иметь оценку

$$\dot{V}_1(t) \leq -W_0(\dot{x}, p(x)) = -\alpha_1 |\dot{x}|^2 - \alpha_2 |p(x)|^2 \leq 0.$$

Множество  $\{W_0 = 0\}$  содержит лишь положения равновесия системы (3.3) вида  $E_2 = \{\dot{x} = 0, x^{(1)} = 0, x^{(2)} = 2\pi k, k = (k_1, k_2, \dots, k_{n-m})', k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n-m\}$ .

Согласно [4–5], под действием управляющего воздействия (3.1) каждое из положений равновесия  $x = x^{(0)} \in E_1$  будет равномерно асимптотически устойчиво. При этом каждое ограниченное решение (3.3) по  $x^{(1)}$  область  $\{x^{(1)} \in \mathbb{R}^m : |x^{(1)}| \leq H_0\}$  будет притягиваться к одному из положений равновесия  $x = x^{(0)} \in E_2$ . Эти положения равновесия отвечают заданному программному движению  $q = q^{(0)}(t)$  (с точностью до кратных  $2\pi$  поворотов манипулятора вокруг цилиндрических шарниров). Таким образом достигается полуглобальная стабилизация  $q = q^{(1)}(t)$  управлением

$$u = u^{(0)}(t) + u^{(1)}(t, \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t), q - q^{(0)}(t)).$$

#### 4. Отслеживание траектории манипулятора управлением с запаздыванием по фазовым переменным

Рассмотрим решение задачи о стабилизации положения  $\dot{x} = x = 0$  системы (2.3) управляющим воздействием вида

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t-h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t-h_2(t)) - \int_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau-t) \dot{x}(\tau) d\tau - \int_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau-t) p(x(\tau)) d\tau, \quad (4.1)$$

где  $B_1 = \text{diag}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$ ,  $B_2 = \text{diag}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$ ;  $b_{1j}, b_{2j}$  – положительные постоянные  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $B_3 \in C([-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $B_4(s) = \text{diag}(b_{41}(s), b_{42}(s), \dots, b_{4n})$ .

Преобразуем выражение (4.1) с учетом (3.2) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} = & -(B_1 + B_{41})p(x(t)) - B_2\dot{x}(t) + B_1 \int_{t-h_1(t)}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + \\
 & + \int_{t-h_0}^{t-h_2(t)} B_{42}(\tau - t) \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + B_{41} \int_{t-h_2(t)}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau - \\
 - & \int_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t) \dot{x}(\tau) d\tau - B_2 \int_{t-h_0}^t (A^{(1)}(\tau, x(\tau)))^{-1} (C^{(1)}(\tau, x(\tau), 2\dot{q}^{(0)}(\tau) + \dot{x}(\tau)) \dot{x}(\tau) + \\
 & + F(\tau, x(\tau))p(x(\tau)) + D\dot{x}(\tau) + B_2\dot{x}(\tau - h_2(\tau)) + B_1p(x(\tau - h_1(\tau))) + \\
 & + \int_{\tau-h_0}^{\tau-h_3(\tau)} B_3(s - t) \dot{x}(s) ds + \int_{t-h_0}^{\tau-h_4} B_4(s - t) p(x(s)) ds) d\tau.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Вновь применяя методику решения поставленной задачи об управлении, построим функционал Ляпунова

$$\begin{aligned}
 V_2 = & V_1 + \lambda_4 \int_{-2h_0}^0 \left( \int_{\tau}^0 \dot{x}^2(t + s) ds \right) d\tau + \\
 & + \lambda_4 \int_{-2h_0}^0 \left( \int_{\tau}^0 p^2(x(t + s)) ds \right) d\tau \quad (\lambda_4, \lambda_5 = const > 0).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Находим, что поставленная задача сводится к нахождению параметров управляющего воздействия (4.1) из условия определенной отрицательности квадратичной формы

$$W_2(t, x, \dot{x}, p) = W_1(t, x, \dot{x}, p) + 4\lambda_4 h_0 |\dot{x}|^2 + 2\lambda_5 h_0 |p|^2$$

при значениях  $(t, x, \dot{x}, p) \in R^+ \times M_1 \times \mathbb{R}^n \times M_2$ .

Соответственно, находим управляющее воздействие (4.1), решающее задачу о равномерной асимптотической устойчивости каждого положения равновесия  $x = x^{(0)} \in E_1$  системы (2.3), и управление

$$u = u^{(0)}(t) + u^{(2)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)),$$

решающее задачу о полуглобальной стабилизации программного движения  $(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$  манипулятора.

## 5. Отслеживание траектории шестизвенного робота-манипулятора

В качестве прикладной рассмотрена задача об управлении робототехнической системой, целью которой является проведение разного рода работ в горячей камере. Горячая камера представляет собой герметичную камеру, изготовленную с применением экранящих материалов. В камере находится ведомый манипулятор, имеющий шесть степеней свободы (см. Рис. 5.1) и управляемый на основе ведущего манипулятора [6]. Ведущий манипулятор представляет собой уменьшенную версию ведомого манипулятора. Он имеет приводы во всех шарнирах с датчиками, измеряющих значения их фазовых координат. Манипуляторы соединены между собой сквозной трубой. Труба содержит набор параллельных валов для передачи движения от ведущего манипулятора

к ведомому. Сквозные валы имеют на концах муфты с прорезями для зацепления их с валами ведомого манипулятора.

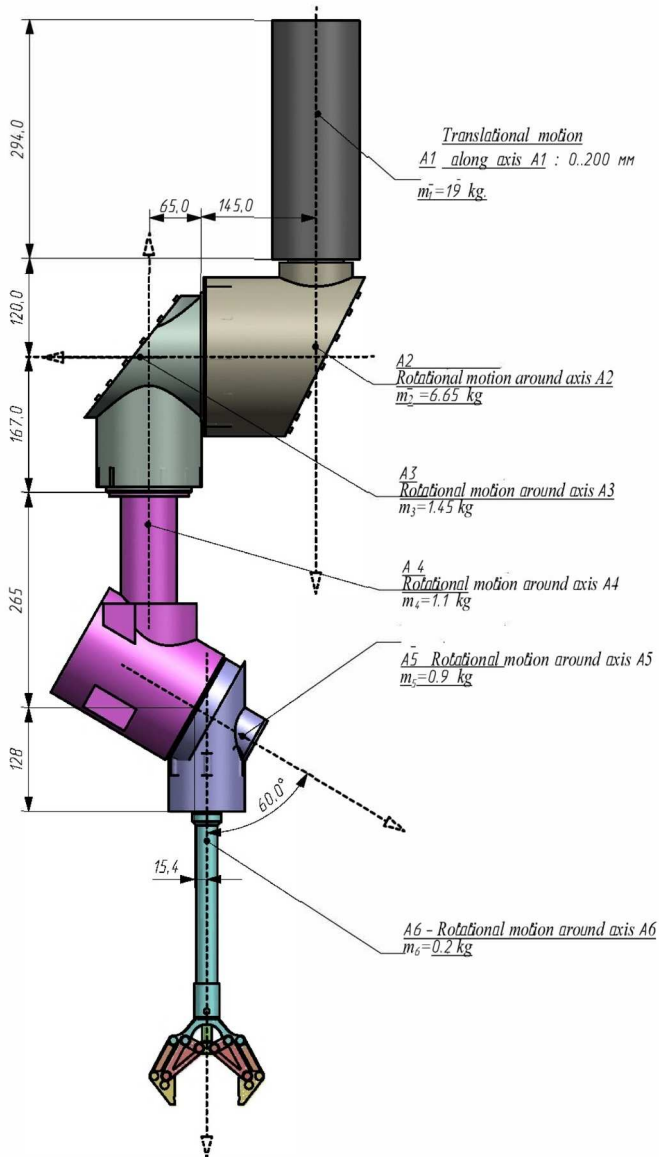


Рис. 5.1. Модель шестизвенного робота-манипулятора  
Fig 5.1. Model of a six-link robotic arm

Пусть обобщенные координаты  $q_1 = z_1$ ,  $q_i = \varphi_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5, 6$  представляют собой



поступательные и угловые перемещения призматического и вращательных шарниров  $O_1, O_2, \dots, O_6$  соответственно. Обозначим через  $l_i$  длину  $i$ -го звена, символом  $m_i$  – массу  $i$ -го звена,  $l_{i2}$  – длина отрезка  $O_i C_i$ , где  $C_i$  – центр масс  $i$ -го звена. Обозначим через  $I_{ix}, I_{iy}$  и  $I_{iz}$  моменты инерции  $i$ -го относительно соответствующих осей  $x, y$  и  $z$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).

Динамика многозвенного робота-манипулятора с шестью вращательными и призматическими шарнирами определяется уравнениями (2.1). Элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A(q)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sum_{i=1}^6 m_i, \quad a_{12} = a_{16} = a_{21} = a_{61} = 0, \\
 a_{22} &= I_{2z} + I_{3y} \sin^2 q_3 + \cos^2 q_3 \sum_{j=3}^6 I_{jz} + \sin^2 q_3 \sum_{j=3}^6 I_{jy} + \\
 &\quad + \frac{1}{4}(I_{5x} - I_{5z}) \cos^2 q_3 + m_2 l_{22}^2 + m_3 (l_{22}^2 + l_3^2 \sin^2 q_3) + \\
 &\quad + m_4 ((l_{32} + l_4)^2 \sin^2 q_3 + l_{22}^2) + m_5 ((l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2} l_{52} + l_{62})^2 \sin^2 q_3 + (l_{22} - \frac{1}{2} l_{52})^2), \\
 a_{33} &= I_{3x} + I_{4x} + \frac{3}{4}(I_{5x} + I_{5z}) + I_{6x} + m_3 l_3^2 + m_4 (l_{32} + l_4)^2 + \\
 &\quad + m_5 (l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_5)^2 + m_6 (l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_{52} + l_6)^2, \\
 a_{44} &= I_{4z} + \frac{3}{4}(I_{5x} + I_{5z}) + I_{6z} + \frac{1}{2} m_5 l_5^2 + \frac{1}{2} m_6 l_{52}^2, \\
 a_{55} &= I_{5z} + \frac{1}{2}(I_{6x} + I_{6z}) + \frac{1}{2} m_6 l_6^2, \quad a_{66} = I_{6z}, \\
 a_{13} &= a_{31} = m_3 l_3 \sin q_3 + m_4 (l_{32} + l_4) \sin q_3 + m_5 (l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_{52}) \sin q_3 \\
 &\quad + m_6 (l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2} l_{52} + l_{61}) \sin q_3, \\
 a_{14} &= a_{41} = -\frac{1}{2} m_5 l_5 \sin q_3 - \frac{1}{2} m_6 l_{52} \sin q_3, \quad a_{15} = a_{51} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_6 l_6 \sin q_3, \\
 a_{23} &= a_{32} = m_4 (l_{32} + l_{41}) l_{22} \cos q_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} I_{5x} \cos q_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} I_{5z} \cos q_3 \\
 &\quad + m_5 (l_{22} - \frac{1}{2} l_5) (l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_5) \cos q_3 \\
 &\quad + m_6 (l_{22} - \frac{1}{2} l_5) (l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2} l_{52} + l_6) \cos q_3, \\
 a_{24} &= a_{42} = (I_{4z} + I_{5x} + I_{5z} + I_{6z} - m_5 (l_{22} - \frac{1}{2} l_5) \frac{\sqrt{3}}{2} l_5 \\
 &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} m_6 (l_{22} - \frac{1}{2} l_{52}) l_{52}) \cos q_3, \\
 a_{25} &= a_{52} = (\frac{3}{4}(I_{5z} + I_{6z}) + (l_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2} l_{52})) \cos q_3, \\
 a_{26} &= a_{62} = I_{6z} \cos q_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{34} = a_{43} &= -\frac{3}{4}I_{5x} + \frac{3}{4}I_{5z} - \frac{\sqrt{3}}{2}m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} + l_{61})l_{52}, \\
 a_{35} = a_{53} &= \frac{1}{4}(I_{5z} + I_{6x}) + \frac{1}{2}m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} + l_6)l_6, \\
 a_{45} = a_{54} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(I_{5z} + I_{6z}) - \frac{m_6}{2}l_5l_6, \\
 a_{46} = a_{64} &= I_{6z}, \quad a_{56} = a_{65} = \frac{1}{2}I_{6z}.
 \end{aligned}$$

Элементы  $c_{ij}$  матрицы  $C(q, \dot{q})$  вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k.$$

Компоненты  $g_i$  вектора  $g(q)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -g \sum_{i=1}^6 m_i, \quad g_2 = 0, \\
 g_3 &= -g(m_3l_3 + m_4(l_{32} + l_4) + m_5(l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_5) + \\
 &\quad + m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_{52} + l_6)) \sin q_3, \\
 g_4 &= 0, \quad g_5 = -gm_6 \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 \sin q_5, \quad g_6 = 0.
 \end{aligned}$$

Численные значения параметров робота выбраны следующими

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 18 \text{ кг}, \quad m_2 = 6.5 \text{ кг}, \quad m_3 = 1.5 \text{ кг}, \quad m_4 = 1.2 \text{ кг}, \\
 &\quad m_5 = 0.8 \text{ кг}, \quad m_6 = 0.3 \text{ кг}, \\
 l_1 &= 0.294 \text{ м}, \quad l_2 = 0.12 \text{ м}, \quad l_3 = 0.167 \text{ м}, \\
 l_4 &= 0.265 \text{ м}, \quad l_5 = 0.128 \text{ м}, \quad l_6 = 0.45 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

Желаемая траектория робота задается следующим образом

$$\begin{aligned}
 q_1^{(0)}(t) &= 0.1 + 0.1 \cos(t) \text{ м}, \quad q_2^{(0)}(t) = \cos(2t) \text{ рад}, \\
 q_3^{(0)}(t) &= \sin(3t) \text{ рад}, \quad q_4^{(0)}(t) = 2 \cos(2t) \text{ рад}, \\
 q_5^{(0)}(t) &= \sin(2t) \text{ рад}, \quad q_6^{(0)}(t) = 2 \sin(3t) \text{ рад}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Закон управления определяется формулой (2.6), где

$$p(x) = (x_1, \sin(x_2/2), \sin(x_3/2), \sin(x_4/2), \sin(x_5/2), \sin(x_6/2))'. \tag{5.2}$$

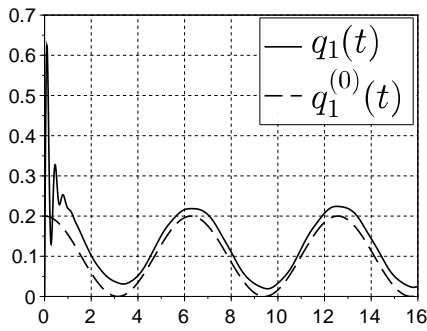
Параметры усиления управления выбираются следующими:

$$b_1 = 20, \quad b_2 = 10, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 1, \quad h_1 = h_2 = 0.1 \text{ с}, \quad h_3 = h_4 = 0.5 \text{ с}. \tag{5.3}$$

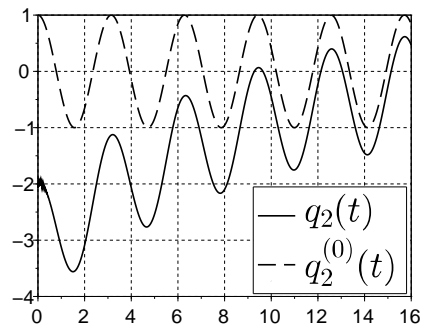
Начальные положения и скорости звеньев робота-манипулятора выбраны следующими

$$\begin{aligned}
 q_1(0) &= 0.1 \text{ м}, \quad q_2(0) = -2.1 \text{ рад}, \quad q_3(0) = 2.2 \text{ рад}, \\
 q_4(0) &= 3.0 \text{ рад}, \quad q_5(0) = 2.9 \text{ рад}, \quad q_6(0) = 2.8 \text{ рад}, \\
 \dot{q}_1(0) &= -11 \text{ м/с}, \quad \dot{q}_2(0) = -16 \text{ рад/с}, \quad \dot{q}_3(0) = 15 \text{ рад/с}, \\
 \dot{q}_4(0) &= 16 \text{ рад/с}, \quad \dot{q}_5(0) = 18 \text{ рад/с}, \quad \dot{q}_6(0) = 19 \text{ рад/с}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

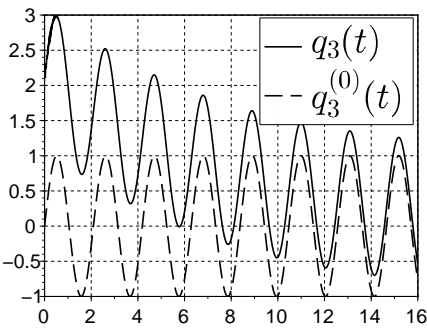
На Рис. 5.2 *a)-f)* показаны графики желаемого и реального движений для каждого звена робота (2.1). Из этих рисунков видно, что закон управления (2.6) обеспечивает асимптотическую сходимость реальной траектории робота к желаемой.



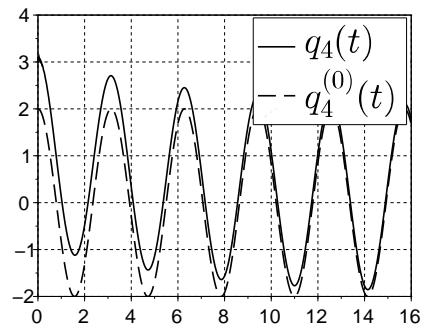
a)



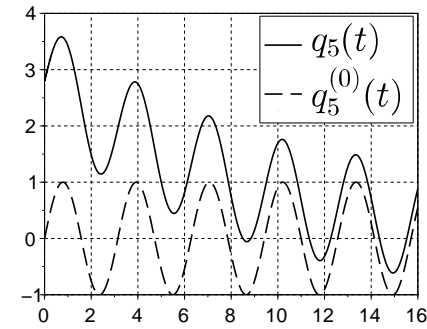
b)



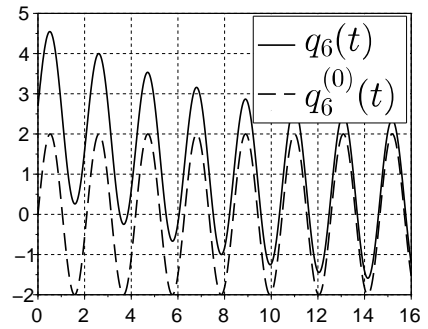
c)



d)



e)



f)

**Рис. 5.2.** Графики зависимости от времени желаемого и реального движений *a)* первого звена, *b)* второго звена, *c)* третьего звена, *d)* четвертого звена, *e)* пятого звена, *f)* шестого звена

**Fig 5.2.** Graphs of the desired and actual movements depending on the time *a)* of the first link, *b)* of the second link, *c)* of the third link, *d)* of the fourth link, *e)* of the fifth link, *f)* of the sixth link

Полученные результаты являются развитием и дополнением работ [4–5].

## 6. Заключение

В работе обоснован метод построения нелинейного ПИД-регулятора в задаче об управлении с запаздывающей обратной связью многозвенным роботом-манипулятором с цилиндрическими и призматическими шарнирами. Отдельно рассмотрены задачи об отслеживании траектории при достаточных силах вязкого трения и дополнения структуры регулятора пропорциональными составляющими по скоростям с учетом запаздывания. В качестве прикладной решена задача о применении ПИД-регулятора для шестизвеного манипулятора, функционирование которого в горячей камере в достаточной степени зависит от запаздывания, вызванной принятым способом управления.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90120.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orrante J., Santibanez V., Campa R. On saturated PID controllers for industrial robots: the PA10 robot arm as case of study. In: Advanced Strategies for Robot Manipulators / ed.by S. Ehsan Shafiei. 2010. DOI: <https://doi.org/10.5772/10196>
2. Santibanez V., Camarillo K., Moreno-Valenzuela J., Campa R. A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators // International Journal of Control, Automation and Systems. 2010. Vol. 8, No. 3. pp. 544–555. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-010-0307-4>
3. Андреев А.С., Перегудова О.А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, вып. 2. С. 156–186.
4. Andreev A. S., Peregudova O. A. On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space // International Journal of Control. 2020. Vol. 93. pp. 3003–3015. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1575526>
5. Andreev A., Peregudova O. On global trajectory tracking control of robot manipulators with a delayed feedback // Cybernetics and Physics. 2021. Vol. 10, No 4. pp. 231–239. DOI: <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-4-231-239>
6. Prikhodko V. V., Sobolev A. A., Zhukov A. V., Chavkin E. M., Fomin A. N., Levshchanov V. V., Pavlov S. V., Svetukhin V. V. Radiation-resistant robotic manipulator controlled by 6-DoF haptic control device to perform technological tasks in hot cells // Journal of Physics: Conference Series. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012045>

*Поступила 07.06.2022; доработана после рецензирования 09.08.2022;  
принята к публикации 24.08.2022*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. J. Orrante, V. Santibanez, R. Campa, *Advanced Strategies for Robot Manipulators*, eds. S. Ehsan Shafiei, 2010 DOI: <https://doi.org/10.5772/10196>.
2. V. Santibanez, K. Camarillo, J. Moreno-Valenzuela, R. Campa, “A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, **8**:3 (2010), 544–555. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-010-0307-4>
3. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, “Nonlinear regulators in position stabilization problem of holonomic mechanical system”, *Mechanics of Solids*, **53**:3 (2018), S22–S38.
4. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, “On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space”, *International Journal of Control*, **93** (2020), 3003–3015. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1575526>
5. A. Andreev, O. Peregudova, “On global trajectory tracking control of robot manipulators with a delayed feedback”, *Cybernetics and Physics*, **10**:4 (2021), 231–239. DOI: <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-4-231-239>
6. V. V. Prikhodko, A. A. Sobolev, A. V. Zhukov, E. M. Chavkin, A. N. Fomin, V. V. Levshchanov, S. V. Pavlov, V. V. Svetukhin, “Radiation-resistant robotic manipulator controlled by 6-DOF haptic control device to perform technological tasks in hot cells”, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012045>

*Submitted 07.06.2022; Revised 09.08.2022; Accepted 24.08.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.