DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.175-184
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.929.4

Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием

Д. Х. Хусанов[1], А. Э. Каххаров[2]

[1] *Джизакский политехнический институт (г. Джизак, Узбекистан)*
[2] *Академический лицей ТашГТУ имени И. Каримова (г. Ташкент, Узбекистан)*

Аннотация. В работе рассматривается задача об устойчивости биологических, экономических и других процессов, моделируемых уравнениями Лотки-Вольтерра с запаздыванием. Отличие исследуемых уравнений от известных состоит в том, что входящие в них функции приспособленности и коэффициенты относительного изменения взаимодействующих субъектов или объектов, составляющих моделируемый процесс, являются нелинейными и учитывают переменное запаздывание в действии факторов, влияющих на количество субъектов или объектов. При этом данные функции допускают существование множества положений равновесия, конечного в ограниченной области. Исследование устойчивости трех типов положений равновесия проводится с помощью непосредственного анализа возмущенных уравнений и построения функционалов Ляпунова, удовлетворяющих условиям известных теорем. Выводятся соответствующие достаточные условия асимптотической устойчивости, в т. ч. глобальной, а также неустойчивости этих положений и их притяжения.

Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерра, дифференциальные уравнения с запаздыванием, положение равновесия, устойчивость

Для цитирования: Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 175–184. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.175-184

Об авторах:

Хусанов Джуманазар Хусанович, профессор Джизакского политехнического института (130100, Узбекистан, г. Джизак, ул. И. Каримова, д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9444-9324, d.khusanov1952@mail.ru

Каххаров Азизбек Эсанович, аспирант Академического лицея Ташкентского государственного технического университета имени И. Каримова (100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 2), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5723-8640, azizqahhorov@gmail.com

© *Д. Х. Хусанов, А. А. Каххаров*

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Original article

MSC2020 34D20

On the stability of Lotka-Volterra model with a delay

J. Kh. Khusanov[1], **A. E. Kaxxorov**[2]

[1] *Jizzakh Polytechnic Institute (Jizakh, Uzbekistan)*
[2] *I. Karimov Tashkent State Technical University (Tashkent, Uzbekistan)*

Abstract. The paper examines the stability problem of biological, economic and other processes modeled by the Lotka-Volterra equations with delay. The difference between studied equations and the known ones is that the adaptability functions and the coefficients of the relative change of the interacting subjects or objects are non-linear and take into account variable delay in the action of factors affecting the number of subjects or objects. Moreover, these functions admit the existence of equilibrium positions' set that is finite in a bounded domain. The stability study of three types of equilibrium positions is carried out using direct analysis of perturbed equations and construction of Lyapunov functionals that satisfy conditions of well-known theorems. Corresponding sufficient conditions for asymptotic stability including global stability are derived, as well as instability and attraction conditions of these positions.

Keywords: Lotka-Volterra model, delay differential equations, equilibrium position, stability

For citation: *J. Kh. Khusanov, A. E. Kaxxorov.* On the stability of Lotka-Volterra model with a delay. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:2(2022), 175–184. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.175-184

About the authors:

Jumanazar Kh. Khusanov, Professor, Jizzakh Polytechnic Institute (4 I. Karimov St., Jizakh 130100, Uzbekistan), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9444-9324, d.khusanov1952@mail.ru

Azizbeck E. Kaxxorov, Graduate Student, Academic Lyceum I. Karimov Tashkent State Technical University (2 University St., Tashkent 100095, Uzbekistan), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5723-8640, azizqahhorov@gmail.com

1. Введение

В работах В. Вольтерра и Дж. Лотки [1–3] впервые в наиболее полной форме были приведены обоснования модели взаимодействия биологических популяций посредством дифференциальных уравнений. Важной особенностью биологических и физических процессов, как отметил В. Вольтерра [1], является учет их «предыстории». Корректность математического описания таких процессов дают функционально-дифференциальные уравнения [1–2], [4]. К настоящему времени развитию качественной теории таких уравнений, их применимости для моделирования и анализа различных технических систем, биологических, экологических и экономических процессов посвящено огромное количество работы. Из них непосредственно по теме данной работы отметим фундаментальные публикации [5–7]. Однако несмотря на многочисленные исследования, ряд актуальных задач остаются неизученными. В частности, к таким задачам относится исследование устойчивости и предельного поведения систем и процессов при их существенно нелинейном моделировании, с учетом переменного запаздывания.

2. Постановка задачи

Пусть R^n — линейное вещественное пространство векторов x с нормой $|x|$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $R_+^n = \{x \in R^n : x_k \geq 0 \ \forall k \in Z, \ 1 \leq k \leq n\}$, $intR_+^n = \{x \in R^n : x_k > 0 \ \forall k \in Z, \ 1 \leq k \leq n\}$, $\partial R_+^n = R_+^n \setminus intR_+^n$, $h_0 > 0$ – некоторое число, C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h_0, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = max(|\varphi(s)|, -h_0 \leq s \leq 0)$, $C_+ = \{\varphi \in C : \varphi : [-h_0, 0] \to R_+^n\}$, $intC_+ = \{\varphi \in C_+ : \varphi_k(0) \neq 0 \ \forall k \in Z, \ 1 \leq k \leq n\}$, $\partial C_+ = C_+ \setminus intC_+$.

Для непрерывной функции $x : [\alpha - h_0, \beta) \to R_+^n$ $(\alpha, \beta \in R^+, \alpha < \beta)$ функцию $x_t \in C_+$ определим равенством $x_t(s) = x(t+s)$, $-h_0 \leq s \leq 0$. Под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассматривается следующее векторное уравнение типа Лотки-Вольтерра с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = D(x(t))(A + BF(x(t)) + GF(x(t - h(t)))), \tag{2.1}$$

где функции $D(x)$, $F(x)$ и $h(t)$, а также постоянные вектор A и матрицы B и G удовлетворяют условиям:

1) $D(x) = diag(d_1(x_1), d_2(x_2), \ldots, d_n(x_n))$, $d_k \in C(R^+ \to R^+)$, $d_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

2) $F(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))^T$ (здесь и далее $(\cdot)^T$ — операция транспонирования), $f_k \in C(R^+ \to R^+)$, $f_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n$;

3) $A = \{a_k\}$, $A \in R^n$, $B = \{b_{jk}\}$, $B \in R^{n \times n}$, $G = \{g_{jk}\}$, $G \in R^{n \times n}$;

4) $h = (h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t))^T$, $h_k \in C^1(R^+ \to [0, h_0])$, $h_k(t)$ – функции, учитывающие наличие запаздывания в относительной скорости прироста x_k, $\mu_0 \leq \dot{h}_k(t) \leq 1 - \mu_1$ $(\mu_1 > 0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Компоненты и параметры модельного уравнения (2.1) имеют следующий смысл: x_k – численность k-й популяции в экологической системе или объем одноименной продукции k-й фирмы; a_k и $d_k(x_k)$ – составляющие скорости относительного прироста x_k в отсутствие конкуренции в зависимости от количества x_k; $f_k(x_k)$ – функции относительного прироста при конкуренции; $h_k(t)$ – функции, учитывающие наличие запаздывания в относительной скорости прироста x_k; B и G – матрицы взаимодействия при конкуренции численностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Будем полагать, что функции $f_k(x_k)$ и $d_k(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{aligned} |f_k(x_k^{(2)}) - f_k(x_k^{(1)})| \leq L_0(m)|x_k^{(2)} - x_k^{(1)}|, \\ |d_k(x_k^{(2)}) - d_k(x_k^{(1)})| \leq L_0(m)|x_k^{(2)} - x_k^{(1)}|, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E(m), \ E(m) = \{x \in R_+^n : \ |x| \leq m, \ m = const > 0\}.$$

Отсюда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_+$ решение уравнения (2.1) $x(t, \alpha, \varphi)$, $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$ существует, является единственным, определенным на некотором интервале $[\alpha - h(\alpha), \beta)$ $(\beta > \alpha)$.

В силу условий 1 и 2 множество ∂C_+ является полуинвариантным: каждое решение $x(t, \alpha, \varphi)$, $\varphi \in \partial C_+$ будет таким, что из $x_t(\alpha, \varphi) \in \partial C_+$, так что $\varphi_j(0) = 0$, следует $x_j(t, \alpha, \varphi) = 0$ при $t \in [\tau, \beta)$.

Система (2.1) имеет в области R_+^n следующие положения равновесия.

1. Тривиальное

$$x(t, \alpha, \varphi) = 0, \ t \geq \alpha - h. \tag{2.3}$$

2. Нетривиальное в области $intR_+^n$

$$x(t,\alpha,\varphi)=x_0^{(l)},\ t\geq\alpha-h,\ l=1,2,\ldots,N \tag{2.4}$$

в предположении, что система линейных уравнений

$$(B+G)y+A=0 \tag{2.5}$$

имеет в области $intR_+^n$ единственное решение $y=y_0$.

При этом функциональное векторное уравнение

$$F(x)=y_0 \tag{2.6}$$

имеет в ограниченной области $E(m)\cap intR_+^n$ конечное число решений

$$x=x_0^{(l)};\ l=1,2,\ldots,N;\ N=N(m). \tag{2.7}$$

3. Кроме того, уравнение (2.1) может иметь в области ∂R_+^n в силу условия $d_k(0)=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$ положение равновесия, в котором одна или несколько координат равны нулю.

В качестве конкретного такого случая рассмотрим случай, в котором координата $x_n=0$. Введем вектор $A^{(1)}=(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})^T$ и матрицы $B^{(1)}=\{b_{jk}\}$, $G^{(1)}=\{g_{jk}\}$ $(j,k=1,2,\ldots,n-1)$.

Предположим, что система линейных уравнений

$$(B^{(1)}+G^{(1)})y^{(1)}+A^{(1)}=0 \tag{2.8}$$

имеет в некоторой ограниченной области R_+^{n-1} решение $y^{(1)}=y_0^{(1)}$, $y_0^{(1)}\notin\partial R_+^{n-1}$, при этом векторное уравнение

$$F^{(1)}(x)=y_0^{(1)},\quad F^{(1)}=(f_1,f_2,\ldots,f_{n-1})^T$$

имеет решение $x=x_0^{(1)}\in R_+^{n-1}$.

Таким образом, система (2.1) будет иметь положение равновесия

$$\begin{gathered} x_1=x_1^{(1)}(t,\alpha,\varphi)=x_{10}^{(1)},\ldots,x_{n-1}=x_{n-1}^{(1)}(t,\alpha,\varphi)=x_{(n-1)0}^{(1)} \\ x_n=x_n(t,\alpha,\varphi)=0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Целью работы является исследование устойчивости указанных положений равновесия.

3. Устойчивость положения равновесия (2.3)

Т е о р е м а 3.1. *При условии $a_k<0$ $\forall k=1,2,\ldots,n$ тривиальное положение равновесия (2.3) асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем Γ_0 – окрестность точки $\varphi=0$ из условия

$$\Gamma_0=sup\{\varphi\in C_+:\ |\sum_{j=1}^n b_{kj}f_j(\varphi_j(0))+\sum_{j=1}^n g_{kj}f_j(\varphi_j(s))|\leq -a_k/4,$$
$$-h_0\leq s\leq 0;\ k=1,2,\ldots,n\}$$

Для производной $\dot{x}(t)$ решения $x(t) = x(t, \alpha, \varphi)$, $\varphi \in \Gamma_0$ из условия (2.2) при $\alpha \le t < \beta$ имеем

$$\dot{x}_k(t) \le -\frac{a_k}{2} d_k(x_k(t)).$$

Отсюда следует, что $x_k(t) \le \varphi_k(0)$ $\forall t \ge \alpha$, $x(t) \searrow 0$ при $t \to \infty$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.
Доказательство завершено.

Теорема 3.2. *Если существует какое-либо a_k, такое что $a_k > 0$, то тривиальное положение равновесия (2.3) неустойчиво.*

Доказательство. Найдем $\varepsilon_0 > 0$, при котором

$$|b_{kk}|\varphi_k(0) + \sum_{j=1}^{n} |g_{kj}|\|\varphi\| \le \frac{1}{2} a_k, \tag{3.1}$$

$\forall \varphi \in \{\varphi \in C_+ : \ \|\varphi\| \le \varepsilon_0\}$.

Для любого $\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon_0$, в качестве начальной точки $\varphi_0 \in \{\varphi \in C_+ : \|\varphi\| < \delta\}$ выберем функцию φ, такую что

$$\varphi_{j0}(0) = 0 \ (j \ne k), \quad 2\varphi_{k0}(0) = \delta.$$

Определим $d_{k0} = \min(d_k(x_k), \dfrac{\delta}{4} \le x_k \le \varepsilon_0) > 0$.

Из полуинвариантности ∂C_+ следует, что соответствующее решение будет таким, что

$$x(t, \alpha, \varphi_0) \in \partial R^n_+, \ x_j(t, \alpha, \varphi_0) = 0 \ (j \ne k) \ \forall t \in [\alpha, \beta)$$

Соответственно, для составляющей $x_k(t) = x_k(t, \alpha, \varphi_0)$ этого решения в силу (3.1) будем иметь при $t \in [\alpha, \beta)$

$$\frac{dx_k(t)}{dt} \ge \frac{1}{2} d_{k0} a_k > 0.$$

Из этого неравенства следует, что найдется $T > \alpha$, такое что

$$x_k(T, \alpha, \varphi_0) = \varepsilon_0,$$

что и означает неустойчивость $x = 0$.
Доказательство завершено.

4. Устойчивость положения равновесия (2.4)

Из условия (2.2) находим, что коэффициенты $d_k(x_k)$ $k = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют неравенствам

$$d_k(x_k) \ge L(m) x_k \ \forall x \in E(m). \tag{4.1}$$

Пусть $x_0^{(1)}$ – какое-либо положение равновесия (2.4).

Введем возмущения и соответствующие функции

$$y = x - x_0^{(l)}, \ \psi(s) = \varphi(s) - x_0^{(l)}, \ f_k^{(l)}(y_k) = f_k(x_{k0}^{(l)} + y_k) - f_k(x_{k0}^{(l)}),$$

$$F^{(l)}(y) = (f_1^{(l)}(y_1), f_2^{(l)}(y_2), \dots, f_n^{(l)}(y_n))^T,$$

$$D^{(l)}(y) = diag(d_1^{(l)}(x_{10}^{(l)} + y_1), d_2^{(l)}(x_{20}^{(l)} + y_2), \ldots, d_n^{(l)}(x_{n0}^{(l)} + y_n)).$$

Составим уравнение возмущенного движения для (2.1):

$$\frac{dy(t)}{dt} = D^{(l)}(y(t))(BF^{(l)}(y(t)) + GF^{(l)}(y(t-h(t)))). \tag{4.2}$$

Введем функции

$$s_k(y_k) = \int\limits_{x_{k0}^{(l)}}^{y_k} \frac{f_k^{(l)}(\tau)d\tau}{d_k(\tau)},\ k = 1, 2, \ldots, n,\ S(y) = (s_1(y_1), s_2(y_2), \ldots, s_n(y_n))$$

Из свойств (4.1) функций $d_k(x_k)$ найдем

$$s_k(y_k) \to \infty \ \text{ при } y_k \to 0,\ \forall k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$V = V(t, \psi) = \sum_{k=1}^{n} p_k s_k(\psi_k(0)) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-h_k(t)}^{0} q_k(\tau) f_k^2(\psi_k(\tau))d\tau, \tag{4.4}$$

где постоянные $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ и функции $q_1(\tau), q_2(\tau), \ldots, q_n(\tau)$, $q_k \in C([-h_0, 0] \to \to R^+)$ подлежат определению.

Заметим, что в силу сделанных предположений для функционала $V(t, \psi)$ имеет место оценка

$$|V(t, \psi)| \leq b(||\psi||),$$

где $b \in \mathcal{K}$, $(b : R^+ \to R^+)$, $\mathcal{K}$ – класс функций типа Хана [8].

Для производной функционала (4.4) в силу уравнений (4.2) находим

$$\begin{aligned}&\dot V(t, \psi) = V_1(t, \psi) = \frac{1}{2}(F^{(1)}(\psi(0)))^T(PA + A^TP)F^{(1)}(\psi(0) + \\ &+ (F^{(1)}(\psi(0)))^T PBF^{(1)}(\psi(-h(t)) + \\ &+ \frac{1}{2}(F^{(1)}(\psi(0)))^T Q^{(0)}(F^{(1)}(\psi(0))) - \frac{1}{2}F^{(1)}(\psi(-h(t)))^T Q^{(1)}(t)F^{(1)}(\psi(-h(t)))\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&Q^{(0)} = diag(q_1(0), q_2(0), \ldots, q_n(0)),\\ &Q^{(1)} = diag\left(q_1(-h_1(t))\left(1 - \frac{dh_1(t)}{dt}\right), q_2(-h_2(t))\left(1 - \frac{dh_2(t)}{dt}\right), \ldots\right.\\ &\left.\ldots, q_n(-h_n(t))\left(1 - \frac{dh_n(t)}{dt}\right)\right).\end{aligned}$$

Положим, что постоянные p_k и функции $q_k(\tau)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ могут быть подобраны так, что имеют место оценки

$$\begin{aligned}&y^TQ^{(1)}(t)y \geq q_0||y||^2,\ (q_0 > 0),\ y^TQ^{(2)}y \leq 0\ \forall (t, y) \in R^+ \times R^n,\\ &Q^{(2)} = PA + A^TP + Q^{(0)} + q_0^{-1}PBB^TP.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Тогда для $\dot V(t, \psi)$ имеет место оценка

$$\dot V_1(t, \psi) \leq -W_1(\psi(0)) = (F^{(1)}(\psi(0)))^T Q^{(2)} F^{(1)}(\psi(0)) \leq 0.$$

Отсюда на основании классических теорем из [4; 9] получим следующие результаты.

Т е о р е м а 4.1. *Предположим, что:*

1) функции $s_k(y_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ при некотором $\delta > 0$ имеют оценки: $s_k(y_k) > 0$, $\forall y_k \in \{0 < |y_k| < \delta\}$;

2) выполняются неравенства (4.5).

Тогда положение равновесия (2.4) равномерно устойчиво.

Т е о р е м а 4.2. *При выполнении условия 1 Теоремы 4.1 и усилении второго неравенства (4.5) в виде*

$$y^T Q^{(2)} y \le -q_0||y||^2 \tag{4.6}$$

положение равновесия (2.4) является равномерно асимптотически устойчивым.

Т е о р е м а 4.3. *Если вместо условия 1 Теоремы 4.2 предположить, что существует хотя бы одна функция $s_k(y_k)$, принимающая в любой достаточно малой окрестности $y_k = 0$ отрицательные значения, то положение равновесия (2.4) является неустойчивым.*

Дополним предположения относительно функций $s_k(x_k)$ следующим образом:

$$s_k(y_k) \to \infty \text{ при } t_k \to \infty \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.7}$$

Тогда для функционала $V = V(t, \psi)$ будем иметь соотношение: $V(t, \psi) \to \infty$ при $\psi(0) \to \partial R^n_+$ и $\psi_k(0) \to \infty$.

Соответственно имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 4.4. *Дополним условия Теоремы 4.2 указанным предположением и условием единственности положения равновесия (2.4) в области $intR^n_+$. Тогда это положение равновесия глобально равномерно асимптотически устойчиво.*

На основании теоремы о предельном поведении решений из [10; 11] получим также следующий результат.

Т е о р е м а 4.5. *Допустим, что существует функционал V вида (4.4), удовлетворяющий условиям:*

1) справедливы неравенства (4.5) и (4.6);

2) выполнено условие (4.7).

Тогда каждое решение $x(t, \alpha, \varphi)$, $\varphi \in intC_+$ неограниченно приближается к одному из положений равновесия (2.4) при $t \to \infty$, а именно, $\exists x = x_0^{(l)} \in intR^n_+$, такое что $x(t, \alpha, \varphi) \to x_0^{(l)}$ при $t \to \infty$.

5. Устойчивость положения равновесия (2.9)

Пусть $x_0^{(1)} = (x_{10}^{(1)}, x_{20}^{(1)}, \dots, x_{(n-1)0}^{(1)}, 0)^T$ – заданное положение равновесия.

Введем возмущения и функции

$$
\begin{aligned}
& y = x - x_0^{(1)}, \ \psi^{(1)}(s) = \varphi(s) - x_0^{(1)}, \\
& f_k^{(1)}(y_k) = f_k(x_{k0}^{(1)} + y_k) - f_k(x_{k0}^{(1)}) \ (k = 1, 2, \dots, n-1), \ f_n^{(1)}(y_n) = f_n(y_n), \\
& F^{(1)}(y) = (f_1^{(1)}(y_1), f_2^{(1)}(y_2), \dots, f_n^{(1)}(y_n)), \\
& D^{(1)}(y) = diag(d_1(x_{10}^{(1)} + y_1), d_2(x_{20}^{(1)} + y_2), \dots, d_n(y_n)).
\end{aligned}
$$

Соответствующие первые $(n-1)$ уравнений возмущенного движения будут совпадать с первыми $(n-1)$ уравнениями (4.2). Последнее уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = d_n(y_n(t))(a_n^{(1)} + (B^{(1)})^T F^{(1)}(y^{(1)}(t)) + (G^{(1)})^T F^{(1)}(y^{(1)}(t-h^{(1)}(t))), \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}&(B^{(1)})^T = (b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn}),\\ &(G^{(1)})^T = (g_{n1}, g_{n2}, \ldots, g_{nn}),\ a_n^{(1)} = a_n + (B^{(1)})^T + (G^{(1)})^T)F^{(1)}(x_0^{(1)}).\end{aligned}$$

Аналогично Теореме 3.2 может быть доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 5.1. *Допустим, что* $a_n^{(1)} > 0$. *Тогда положение равновесия (2.9) неустойчиво.*

Для случая $a_n^{(1)} < 0$ введем функционал

$$V = \sum_{k=1}^{n-1} p_k s_k(\psi_k(0)) + p_n \psi_n(0) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-h_k(t)}^{0} q_k(\tau) f_k^2(\psi_k(\tau)) d\tau,$$

где постоянные $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ и функции $q_1(\tau), q_2(\tau), \ldots, q_n(\tau)$, $q_k \in C([-h_k, 0] \to R^+$ подлежат определению.

Для производной этого функционала в силу первых $(n-1)$ уравнений (4.2) и уравнения (5.1) находим

$$\begin{aligned}&\dot V(t,\psi) = V_2(t,\psi) = V_1(t,\psi) + p_n a_n^{(1)} d_n(\psi_n^{(1)}(0)) +\\ &+ p_n(d_n(\psi_n(0)) - f_n(\psi_n(0))((B^{(1)})^T F^{(1)}(\psi^{(1)}(0)) + (G^{(1)})^T F^{(1)}(\psi^{(1)}(-h(t))))).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Допустим, что постоянные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и функции $q_k(\tau)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ могут быть подобраны так, что

$$\begin{aligned}&y^T(Q^{(1)}(t) - G^{(1)}(G^{(1)})^T)y \geq q_0||y||^2,\\ &2p_n a_n^{(1)} d_n(y_n) + 2p_n(d_n(y_n) - f_n(y_n))(B^{(1)})^T F^{(1)}(y) +\\ &+ y^T(PA + A^T P + Q^{(0)} + q_0^{-1} PBB^T P)y +\\ &+ p_n^2(d_n(y_n) - f_n(y_n))^2 \leq -W_2(y) \leq 0.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Тогда для производной (5.2) функционала V имеем оценку

$$V_2(t,\psi) \leq -W_2(\psi(0)) \leq 0$$

На основании теорем из [4; 9] получим следующие результаты.

Т е о р е м а 5.2. *Предположим, что:*

1) функции $s_k(y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ *при некотором* $\delta > 0$ *имеют оценки* $s_k(y_k) > 0$ $\forall y_k \in \{0 < |y_k| < \delta\}$;

2) выполнены неравенства (5.3).

Тогда положение равновесия (2.9) равномерно устойчиво.

Т е о р е м а 5.3. *При выполнении условия 1 Теоремы 5.2 и условия* $W(y) > 0$ $\forall y \in$ $\in \{0 < ||y|| < \delta\}$ *положение равновесия (2.9) равномерно асимптотически устойчиво.*

6. Заключение

В работе получены новые результаты о достаточных условиях устойчивости существенно нелинейных уравнений типа Лотки-Вольтерра с переменным запаздыванием. Доказанные теоремы позволяют расширить применение метода функционалов Ляпунова к исследованию более широкого класса прикладных задач, моделируемых указанными уравнениями.

Список литературы

1. Volterra V. Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie / Ed. by J. Gabay. Paris: Gauthier-Villars. 1990. 226p.
2. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. New York: Dover Publications, 1959. 288 p.
3. Lotka A. J. Elements of physical biology. Baltimore: Williams and Wilkins Co., 1925. 460 p.
4. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag. 1977. 366 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2
5. Свережев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
6. Кирьянен А. И. Устойчивость систем с последействием и их приложения. СПб.: Изд-во С. Пб. ун-та, 1994. 240 с.
7. Александров А. Ю., Платонов А. В., Старков В. Н., Степаненко Н. А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: "Лань 2017. 270 с.
8. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Lyapunov's Direct Method. New York: Springer, 1977. 396 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9362-7
9. Krasovskii N. N. Stability of Motion. Standford: Standford University Press, 1963. 218 p.
10. Андреев А. С., Хусанов Д. Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 7. С. 876–885.
11. Хусанов Д. Х. К конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 2002.

Поступила 28.02.2022; доработана после рецензирования 1.04.2022; принята к публикации 25.05.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. V. Volterra, *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1990, 226 p.
2. V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover Publications, New York, 1959, 288 p.
3. A. J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins Co, Baltimore, 1925, 460 p.
4. J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977 DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2, 366 p.
5. Yu. M. Sverezhev, D. O. Logofet, *Stability of biological communities*, Nauka, Moscow, 1978 (In Russ.), 352 p.
6. A. I. Kiryanen, *Stability of systems with aftereffect and their applications*, St. Petersburg University Publ., St. Petersburg, 1994 (In Russ.), 240 p.
7. A. Yu. Alexandrov, A. V. Platonov, V. N. Starkov, N. A. Stepanenko, *Mathematical modeling and study of the stability of biological communities*, Lan Publ., St. Petersburg, 2017 (In Russ.), 270 p.
8. N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability theory by Lyapunov's direct method*, Springer, New York, 1977 DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9362-7, 396 p.
9. N. N. Krasovskii, *Stability of motion*, Standford University Press, Standford, 1963, 218 p.
10. A. S. Andreev, D. Kh. Khusanov, "On the method of Lyapunov functionals in the problem of asymptotic stability and instability", *Differential Equations*, **34**:7 (1998), 876–885 (In Russ.).
11. D. Kh. Khusanov, *On the constructive and qualitative theory of functional differential equations*, Fan Publ., Tashkent, 2002 (In Russ.).

Submitted 28.02.2021; Revised 1.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.