DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.162-174 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977.56

Об одном итерационном методе решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа

М. Э. Файрузов, Ф. В. Лубышев

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Важный класс прикладных проблем составляют задачи оптимального управления состоянием исследуемого объекта. Требуется подобрать управляющие воздействия так, чтобы достичь некоторого эффекта. Мы имеем дело с распределенными системами, т. к. состояние в них описывается уравнением с частными производными. В данной работе рассматривается итерационный процесс для решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа. Подобную задачу можно рассматривать как задачу управления тепловыми процессами. Качество управления состоянием системы оценивается заданным функционалом (функционалом качества), определенным на решении задачи Дирихле для эллиптического уравнения. В качестве одного из важнейших классов задач управления тепловыми процессами можно отметить задачи термостатирования. Необходимо за счет тех или иных тепловых воздействий удерживать заданную температуру в расчётной области. Здесь в качестве управления выступает распределенный внутренний источник тепла. В работе исследована корректность постановки задачи оптимального управления с регуляризированным функционалом. Сформулировано условие оптимальности в задаче оптимального управления системой, описываемой уравнением эллиптического типа, в виде системы уравнений для исходного и сопряженного состояния. Предложен итерационный метод для решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса, установлены оценки скорости сходимости итераций.

Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптическое уравнение, краевая задача, итерационный метод, сходимость итерационного метода

Для цитирования: Файрузов М. Э., Лубышев Ф. В. Об одном итерационном методе решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 162–174. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.162-174

Об авторах:

Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

Original article

MSC2020 93-08

On an iterative method for solving optimal control problems for an elliptic type system

M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev

Bashkir State University (Ufa, Russian Federation)

Abstract. An important class of applied problems is that of optimal control of some objects' state. It is required to select control actions in such a way as to achieve desired effect. We deal with distributed systems, since their state is described by a partial differential equation. In this paper we study an iterative process for solving the problem of optimal control for an elliptic type system. Similar problem arises during the control of thermal processes. The quality of system state control is estimated by a given quality functional defined on the solution of the Dirichlet problem for an elliptic equation. One of the most important classes of thermal process control problems is temperature control, which means maintaining given temperature in the computational domain due to certain thermal effects. Here, a distributed internal heat source acts as a control. In the paper, we study statement correctness of the optimal control problem with a regularized functional. More precisely, we examine control problem for a system described by an elliptic type equation and formulate its optimality condition in the form of a system of equations for initial and conjugate states. An iterative method is proposed for solving the optimal control problem of an elliptic type system. Convergence of the iterative process is studied, and the rate of convergence is estimated.

Keywords: optimal control, elliptic equations, boundary value problem, iterative method, convergence of the iterative method

For citation: *M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev.* On an iterative method for solving optimal control problems for an elliptic type system. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:2(2022), 162–174. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.162-174

About the authors:

Mahmut E. Fairuzov, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

Fedor V. Lubyshev, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления, состоящую в том, чтобы найти такое управление $u = u_*(x) \in U = L_2(\Omega)$, которое минимизирует на множестве управлений U функционал цели

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \big(T(x,u) - T_0(x)\big)^2 d\Omega + \gamma \|u(x)\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \gamma = const > 0, \tag{1.1}$$

причем связь управления $u = u(x)$ с состоянием процесса управления $T(x) = T(x, u)$, соответствующим управлению $u \in U$, определяется как решение задачи Дирихле в $\Omega \in \mathbb{R}^2$:

$$LT(x,u) = -\Delta T(x,u) = -\left[\frac{\partial^2 T(x,u)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x,u)}{\partial x_2^2}\right] = u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$T(x,u) = 0, \qquad x \in \Gamma; \tag{1.3}$$

здесь Ω – область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Иначе говоря, задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию (управление), такую что

$$u_* \in U = L_2(\Omega), \qquad J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u). \tag{1.4}$$

Элемент $u_* \in U$, удовлетворяющий условию (1.4), называется оптимальным управлением, а совокупность U_* всех элементов u_*, удовлетворяющих (1.4) называется множеством оптимальных управлений [1–4].

В функционале (1.1) функция $T_0(x)$ – заданный элемент пространства $L_2(\Omega)$.

Определение 1.1. *Под решением задачи* (1.2) – (1.3) *при фиксированном управлении* $u \in U = L_2(\Omega)$ *понимается функция* $T(x) = T(x,u) \in W^1_{2,0}(\Omega)$, *удовлетворяющая тождеству*

$$Q(T,\eta) = \int_\Omega \sum_{\alpha=0}^{2} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} d\Omega = \int_\Omega u(x)\vartheta(x)\, d\Omega, \quad \forall \vartheta(x) \in W^1_{2,0}(\Omega). \tag{1.5}$$

Утверждение. Для любого управления $u(x) \in U = L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $T(x) = T(x,u) \in W^1_{2,0}(\Omega)$ задачи (1.2) –(1.3). Справедлива оценка для любого $u \in U$:

$$\|T(x,u)\|_{W^1_{2,0}(\Omega)} \le c_0 \|u(x)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad c_0 = Const > 0.$$

Обобщенное решение задачи (1.2) – (1.3) (из класса $W^1_{2,0}(\Omega)$) принадлежит также классу $W^2_{2,0}(\Omega)$ [1; 5; 6].

Справедлива следующая [1–4]

Теорема 1.1. *Задача оптимального управления* (1.1) – (1.4) *с регуляризированным функционалом* (1.1) *имеет единственное решение* $u_*(x) \in U = L_2(\Omega)$, *т. е. существует единственный элемент* $u_*(x) \in L_2(\Omega)$, *для которого*

$$J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u).$$

Справедлива следующая [1]

Теорема 1.2. *Для того чтобы элемент* $u_* \in U = L_2(\Omega)$ *был опимальным управлением задачи* (1.1) – (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия опимальности вида*

$$LT(x,u_*) = -\Delta T(x,u_*) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x,u_*), \qquad x \in \Omega, \tag{1.6}$$

$$T(x,u_*) = 0, \qquad x \in \Gamma = \partial\Omega, \tag{1.7}$$

$$L\psi(x,u_*) = -\Delta\psi(x,u_*) = T(x,u_*) - T_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.8}$$

$$\psi(x,u_*) = 0, \qquad x \in \Gamma = \partial\Omega, \tag{1.9}$$

$$\psi(x,u_*) + \gamma u_* = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{1.10}$$

Как было отмечено выше, оптимальное управление единственно, т. е. соотношениям (1.6) – (1.10) удовлетворяет единственный элемент

$$u_* \in U = L_2(\Omega).$$

Следовательно оптимальное управление $u_*(x)$ находится по следующему правилу:

1) Решить граничную задачу для системы уравнений с частными производными (1.6) – (1.9).

2) Найти оптимальное управление по формуле

$$u_*(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x,u_*), \qquad x \in \Omega. \tag{1.11}$$

Определение 1.2. *Под решением задачи* (1.6) – (1.9) *будем понимать пару функций* $\big(T(x),\psi(x)\big) \in W^1_{2,0}(\Omega) \times W^1_{2,0}(\Omega)$, *удовлетворяющих тождествам:*

$$\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\, d\Omega = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_\Omega \psi(x)\vartheta\, d\Omega, \quad x \in \Omega, \tag{1.12}$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\, d\Omega = \int\limits_\Omega (T(x) - T_0(x)), d\Omega, \quad x \in \Omega, \quad \forall\vartheta(x) \in W^1_{2,0}(\Omega). \tag{1.13}$$

Замечание 1.1. *Решение граничной задачи* (1.8) – (1.9) *относительно функции* $\psi(x)$, *удовлетворяющее интегральному тождеству* (1.13), *таково, что* $\psi(x) \in W^2_2(\Omega)$. *Таким образом, в силу* (1.11) *оптимальное управление* $u_*(x)$ *принадлежит классу* $W^2_2(\Omega)$ *(тогда как мы его искали в пространстве* $L_2(\Omega)$*)* [1].

2. Итерационный процесс

Рассмотрим последовательность управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемую формулой

$$u_*^{(n)}(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x), \qquad n = 0,1,2,..., \tag{2.1}$$

где последовательность $\{\psi^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется из итерационного процесса (приближенного решения системы уравнений в частных производных (1.6) – (1.9)):

$$-\Delta T^{(n+1)}(x) = -\Delta T^{(n)}(x) - \tau\left[LT^{(n)}(x) + \frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x)\right], \qquad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$T^{(n+1)}(x) = 0, \qquad n = 0,1,2,\dots, \tag{2.3}$$

$$-\Delta\psi^{(n)}(x) = T^{(n)}(x) - T_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$\psi^{(n)}(x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.5}$$

Здесь $\tau > 0$, $\gamma > 0$ – параметры, которыми следует распорядиться для достижения сходимости последовательности управлений $\left\{u_*^{(n)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Построение последовательности управлений $\left\{u_*^{(n)}(x)\right\}$ осуществляется по схеме:

$$T^{(0)}(x) \Rightarrow \psi^{(0)}(x) \Rightarrow u_*^{(0)}(x) \Rightarrow T^{(1)}(x) \Rightarrow \psi^{(1)}(x) \Rightarrow u_*^{(1)}(x) \Rightarrow \dots$$
$$\dots T^{(n)}(x) \Rightarrow \psi^{(n)}(x) \Rightarrow u_*^{(n)}(x) \Rightarrow \dots,$$

здесь $T^{(0)}(x)$ – произвольная функция, принадлежащая $W_{2,0}^1(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Под решением задачи* (2.2) – (2.5) *будем понимать пару функций* $(T^{(n)}(x), \psi^{(n)}(x)) \in W_{2,0}^1(\Omega) \times W_{2,0}^1(\Omega)$*, удовлетворяющих интегральным тождествам:*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\, d\Omega - \\ -\tau \Bigg[\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\, d\Omega + \frac{1}{\gamma} \int\limits_{\Omega} \psi^{(n)}(x) \vartheta\, d\Omega \Bigg], \quad \forall \vartheta \in W_{2,0}^1(\Omega), \quad n = 0, 1, 2, ...,\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \big(T^{(n)} - T_0(x)\big) \vartheta\, d\Omega, \quad \forall \vartheta \in W_{2,0}^1(\Omega), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.7}$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $u_*(x)$ *– оптимальное управление задачи* (1.1) – (1.4)*. Пусть выполнено условие*

$$0 < 1 - M < \tau < 1 + M, \qquad M = \sqrt{\frac{2-c}{2(1+c)}}, \quad 0 < c < 2, \quad 0 < M < 1, \tag{2.8}$$

обеспечивающее справедливость неравенства

$$q = (1-\tau)^2(1+c) + \frac{c}{2} < 1,$$

где $c = const > 0$ *в неравенстве Фридрихса* [5–6]

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x)\, d\Omega \le c \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega = c\|v\|_*^2, \quad v(x) \in W_{2,0}^1(\Omega).$$

Пусть, кроме того, параметры $\tau > 0$*,* $\gamma > 0$*,* $c > 0$ *связаны соотношением*

$$1 - \frac{c}{2} - c(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2 = 0,$$

т. е. параметры τ, γ, c связаны соотношением

$$\tau=\sqrt{\frac{(2-c)\gamma^2}{2c(1+c)}}=M\frac{\gamma}{\sqrt{c}},\qquad 0<c<2,$$

причем выполнено условие

$$0<\frac{1-M}{M}<\frac{\gamma}{\sqrt{c}}<\frac{1+M}{M},$$

следовательно справедлива оценка (2.8). *Тогда последовательность управлений* $\{u_*^{(n)}(x)\}$, $n=0,1,2,...$, *определяемая соотношениями* (2.1) – (2.5) *сходится в* $L_2(\Omega)$ *норме к* $u_*(x)$, *при этом справедливы оценки*

$$\|u_*^{(n+1)}(x)-u_*^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}\le\frac{c\sqrt{c}}{\gamma}q^{n/2}\|T^1(x)-T^0(x)\|_*,\quad n=0,1,2,...;$$

$$\|u_*^{(n+1)}(x)-u_*(x)\|_{L_2(\Omega)}\le\frac{c\sqrt{c}}{\gamma}q^{n/2}\|T^1(x)-T^0(x)\|_*,\quad n=0,1,2,....$$

Доказательство. Положим $z^{(n)}=T^{(n)}(x)-T^{(n-1)}(x)$. Из (2.6) найдем

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}\,d\Omega=\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}\,d\Omega-\\ -\tau\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}\,d\Omega-\frac{\tau}{\gamma}\int\limits_\Omega(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))\vartheta\,d\Omega,\quad\forall\vartheta(x)\in W_{2,0}^1(\Omega).\end{gathered}\tag{2.9}$$

Полагая в (2.9) $\vartheta(x)=T^{(n+1)}(x)-T^{(n)}(x)$, найдем

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2d\Omega=\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\,d\Omega-\\ -\tau\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\,d\Omega-\frac{\tau}{\gamma}\int\limits_\Omega(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))\vartheta\,d\Omega,\quad\forall\vartheta(x)\in W_{2,0}^1(\Omega).\end{gathered}\tag{2.10}$$

Из (2.10) имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2d\Omega=\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}(1-\tau)\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}d\Omega-\\ -\frac{\tau}{\gamma}\int\limits_\Omega(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))z^{(n+1)}\,d\Omega\le\\ \le\left[\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}(1-\tau)^2\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2+\frac{\tau^2}{\gamma^2}\int\limits_\Omega(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))^2d\Omega\right]^{1/2}\times\\ \times\left[\int\limits_\Omega\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2d\Omega+\int\limits_\Omega(z^{(n+1)})^2d\Omega\right]^{1/2}.\end{gathered}\tag{2.11}$$

Принимая во внимание неравенство [5–6]

$$\int\limits_{\Omega}(z^{(n+1)})^2 d\Omega \le c\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2, \quad c = const > 0, \tag{2.12}$$

из (2.11) получим оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \le \Bigg[\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}(1-\tau)^2\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega + \\ + \left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2\int\limits_{\Omega}(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega\Bigg]^{1/2}\Bigg[(1+c)\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega\Bigg]^{1/2}.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Откуда получаем

$$\begin{gathered}\Bigg[\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega\Bigg]^{1/2} \le \Bigg[\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}(1-\tau)^2\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega + \\ + \left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2\int\limits_{\Omega}(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega\Bigg]^{1/2}(1+c)^{1/2}.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Из (2.14) имеем оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \le (1+c)\Bigg[\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}(1-\tau)^2\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega + \\ + \left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2\int\limits_{\Omega}(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega\Bigg].\end{gathered} \tag{2.15}$$

Обратимся к тождеству (2.7)

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial\psi^{(n)}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}\,d\Omega = \int\limits_{\Omega}\big(T^{(n)}-T_0(x)\big)\vartheta\,d\Omega, \quad \forall\vartheta\in W^1_{2,0}(\Omega), \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Вычитая друг из друга два последовательных равенства (2.7), получим

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}d\Omega = \int\limits_{\Omega}z^{(n)}(x)\vartheta\,d\Omega, \quad n=0,1,2,...,\forall\vartheta(x)\in W^1_{2,0}(\Omega). \tag{2.16}$$

Положим (2.16) $\vartheta(x) = \psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)$. Тогда получим

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega}z^{(n)}(x)(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))\,d\Omega. \tag{2.17}$$

Складывая тождество (2.17) с тождеством (2.15), найдем

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega+\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega\le$$
$$\le\int\limits_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))\,d\Omega+(1+c)\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}(1-\tau)^2\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega+ \qquad (2.18)$$
$$+(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2\int\limits_{\Omega}(\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega.$$

Далее имеем оценки правой части (2.18)

$$\int\limits_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})\,d\Omega\le\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(z^{(n)}(x))^2\,d\Omega+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})^2\,d\Omega, \qquad (2.19)$$

$$\int\limits_{\Omega}(z^{(n)}(x))^2\,d\Omega\le c\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega; \qquad (2.20)$$

$$\int\limits_{\Omega}(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})^2\,d\Omega\le c\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega; \qquad (2.21)$$

$$\int\limits_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})^2\,d\Omega\le\frac{c}{2}\int\limits_{\Omega}(z^{(n)}(x))^2 d\Omega+\frac{c}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega, \qquad (2.22)$$

$$(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})^2 d\Omega\le(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2 c\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega. \qquad (2.23)$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})\,d\Omega+(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})^2 d\Omega\le$$
$$\le\frac{c}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega+\left[\frac{c}{2}+(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2 c\right]\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega. \qquad (2.24)$$

Из (2.18), (2.24) имеем

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega+\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega\le$$
$$\le(1+c)\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}(1-\tau)^2\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega+ \qquad (2.25)$$
$$+\frac{c}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega+\left[\frac{c}{2}+(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2 c\right]\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\left[1-\frac{c}{2}-c(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2\right]\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega+ \\ +\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega\le\left[(1+c)(1-\tau)^2+\frac{c}{2}\right]\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega. \tag{2.26}$$

Нетрудно убедиться, что справедлива оценка

$$q=(1-\tau)^2(1+c)+\frac{c}{2}<1, \tag{2.27}$$

если выполнено условие

$$0<1-M<\tau<1+M,\quad M=\sqrt{\frac{2-c}{2(1+c)}},\quad 0<c<2,\quad 0<M<1, \tag{2.28}$$

где $c>0$ – константа в неравенстве Фридрихса [5–6]

$$\int\limits_{\Omega}v^2(x)\,d\Omega\le c\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega,\qquad v(x)\in W^1_{2,0}(\Omega). \tag{2.29}$$

Пусть, кроме того, параметры $\tau>0$, $\gamma>0$, $c>0$ связаны соотношением

$$1-\frac{c}{2}-c(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2=0, \tag{2.30}$$

т. е. параметры τ, γ, c связаны соотношением

$$\tau=\sqrt{\frac{(2-c)\gamma^2}{2c(1+c)}}=M\frac{\gamma}{\sqrt{c}},\qquad 0<c<2, \tag{2.31}$$

причем выполнено условие

$$0<\frac{1-M}{M}\le\frac{\gamma}{\sqrt{c}}\le\frac{1+M}{M}, \tag{2.32}$$

следовательно справедлива оценка (2.18)

$$1-M<\tau<1+M.$$

Из (2.16) следует, что если выполняется (2.20)

$$1-\frac{c}{2}-c(1+c)\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^2=0,$$

т. е. если параметры τ, γ, c связаны соотношением

$$\tau=\sqrt{\frac{(2-c)\gamma^2}{2c(1+c)}}=M\frac{\gamma}{\sqrt{c}},\qquad 0<c<2,$$

причем выполнено условие

$$0 < \frac{1-M}{M} < \frac{\gamma}{\sqrt{c}} < \frac{1+M}{M},$$

то имеем оценку

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \leq \left[(1+c)(1-\tau)^2 + \frac{c}{2}\right] \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega. \tag{2.33}$$

Принимая во внимание (2.19), из (2.33) получим

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \leq q \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega, \tag{2.34}$$

т. е.

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\|\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega)} d\Omega \leq q \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\|\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega)} d\Omega, \tag{2.35}$$

или

$$\begin{cases} \|z^{(n+1)}\|_*^2 \leq q\|z^{(n)}\|_*^2, \quad 0 < q < 1, \\ \|z^{(n)}\|_* = \left[\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega\right]^{1/2}, \end{cases} \tag{2.36}$$

где

$$q = (1+c)(1-\tau)^2 + \frac{c}{2} < 1. \tag{2.37}$$

Из (2.36) последовательно найдем

$$\|z^{(n+1)}\|_*^2 \leq q^n \|z^{(1)}\|_*^2, \qquad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{2.38}$$

Принимая во внимание, что

$$u_*^{(n)}(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

находим

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*^{(n+1)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{\gamma^2}\|\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n+1)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.39}$$

Из тождества (2.17)

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial(\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega} z^{(n+1)}(x)(\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x))\, d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2.40}$$

имеем оценку

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial(\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \leq \|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)} \|\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2.41}$$

Далее имеем оценку

$$\|\psi^{(n+1)}(x)-\psi^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq c\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial(\psi^{(n+1)}-\psi^{(n)})}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \leq$$
$$\leq c\|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)}\|\psi^{(n+1)}(x)-\psi^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Следовательно,

$$\|\psi^{(n+1)}(x)-\psi^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq c\|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{2.42}$$

Из (2.39) и (2.42) получим

$$\|u_*^{(n+1)}(x)-u_*^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{\gamma^2}c^2\|z^{(n+1)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{2.43}$$

В силу неравенства Фридрихса [5–6]

$$\|z^{(n+1)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq c\|z^{(n+1)}(x)\|^2_*, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{2.44}$$

из (2.43) получим

$$\|u_*^{(n+1)}(x)-u_*^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{\gamma^2}c^3\|z^{(n+1)}(x)\|^2_*, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{2.45}$$

Принимая во внимание оценку (2.38), из (2.44) получим неравенство

$$\|u_*^{(n+1)}(x)-u_*^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c^3}{\gamma^2}q^n\|z^{(1)}(x)\|^2_*, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{2.46}$$

Следовательно, имеем оценку

$$\|u_*^{(n+1)}(x)-u_*^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma}q^{n/2}\|z^{(1)}(x)\|^2_*, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{2.47}$$

формула (2.46) справедлива и при $n=0$. Это следует из (2.43). Положив там $n=0$, получим

$$\|u_*^{(1)}-u_*^{(0)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma}\|z^{(1)}\|_*. \tag{2.48}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\|u_*^{(n+1)}-u_*^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma}q^{n/2}\|z^{(1)}\|_*, \quad n=0,1,2,..., \tag{2.49}$$

где $z^{(1)}(x)=T^{(1)}(x)-T^{(0)}(x)$.

Поскольку точное решение $(T(x),\psi(x))$ задачи (1.6) – (1.10) является неподвижной точкой процесса (2.2) – (2.5), т. е. пара $(T(x),\psi(x))$ является решением задачи (1.6) – (1.10), то совершенно аналогично получим оценку

$$\|u_*^{(n+1)}-u_*\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma}q^{n/2}\|T^{(1)}(x)-T^{(0)}(x)\|_*, \quad n=0,1,2,..., \tag{2.50}$$

где $u_*(x)$ – оптимальное управление исходной задачи оптимального управления (1.1) – (1.3).

Из соотношения (2.50) следует, что

$$u_*^{(n)}(x) \to u_*(x), \qquad n \to \infty \text{ в } L_2(\Omega), \tag{2.51}$$

при этом справедливы оценки (2.49) – (2.50).

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.

2. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.

3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

4. Лубышев Ф. В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999. 244 с.

5. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.

6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

Поступила 22.03.2022; доработана после рецензирования 27.04.2022; принята к публикации 25.05.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. J. L. Lions, *Controle optimal do systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968, 426 p.

2. V. G. Litvinov, *[Optimization in elliptic boundary value problems with applications to mechanics]*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 368 p.

3. F. P. Vasil'ev, *[Optimization methods]*, Faktorial Press, Moscow, 2002 (In Russ.), 824 p.

4. F. V. Lubyshev, *[Difference approximations of optimal control problems for systems described by partial differential equations]*, BashGU, Ufa, 1999 (In Russ.).

5. V. P. Mikhaylov, *[Partial Differential Equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 391 p.

6. O. A. Ladyzhenskaya, *[Boundary value problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 408 p.

Submitted 22.03.2021; Revised 27.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.