Математика

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.132-140 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством

В. Д. Галкин, О. В. Починка

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»–Нижегородский филиал (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены потоки с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством без гетероклинических пересечений на произвольных замкнутых n-многообразиях. Для таких потоков доказано существование дуального аттрактора и репеллера, разделенных $(n-1)$-мерной сферой, являющейся секущей для блуждающих траекторий в дополнении к аттрактору и репеллеру. Такое представление динамики рассмотренных потоков позволяет получить топологический инвариант, названный сферической схемой потока и состоящий из совокупности разноразмерных сфер, являющихся пересечениями секущей сферы с инвариантными седловыми многообразиями. Заметим, что для некоторых классов потоков сферическая схема является полным инвариантом. Так, из результатов Ж. Флейтас следует, что для полярных потоков (с единственным стоком и единственным источником) на поверхности именно сферическая схема является полным инвариантом эквивалентности.

Ключевые слова: потоки на n-многообразиях, цепно-рекуррентное множество, градиентно-подобный поток, секущая, сферическая схема

Для цитирования: Галкин В. Д., Починка О. В. Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 132–140. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.132-140

Об авторах:

Починка Ольга Витальевна, профессор кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»–Нижегородский филиал (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6587-5305, opochinka@hse.ru

Галкин Владислав Дмитриевич, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»–Нижегородский филиал (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6796-9228, vgalkin@hse.ru

Original article

MSC2020 37D15

Spherical flow diagram with finite hyperbolic chain-recurrent set

V. D. Galkin, O. V. Pochinka

National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper, authors examine flows with a finite hyperbolic chain-recurrent set without heteroclinic intersections on arbitrary closed n-manifolds. For such flows, the existence of a dual attractor and a repeller is proved. These points are separated by a $(n-1)$-dimensional sphere, which is secant for wandering trajectories in a complement to attractor and repeller. The study of the flow dynamics makes it possible to obtain a topological invariant, called a spherical flow scheme, consisting of multi-dimensional spheres that are the intersections of a secant sphere with invariant saddle manifolds. It is worth known that for some classes of flows spherical scheme is complete invariant. Thus, it follows from G. Fleitas results that for polar flows (with a single sink and a single source) on the surface, it is the spherical scheme that is complete equivalence invariant.

Keywords: flows on n-manifolds, chain-recurrent set, gradient-like flow, secant, spherical scheme

For citation: *V. D. Galkin, O. V. Pochinka*. Spherical flow diagram with finite hyperbolic chain-recurrent set. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:2(2022), 132–140. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.132-140

About the authors:

Olga V. Pochinka, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4274-8215, opochinka@hse.ru

Vladislav D. Galkin, Research Assistant of International laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6796-9228, vgalkin@hse.ru

1. Введение и формулировка результатов

Пусть M^n, $n \geqslant 2$ — замкнутое связное n-многообразие с метрикой d.

Потоком на многообразии M^n называется непрерывное отображение

$$F\colon M^n \times \mathbb{R} \to M^n$$

с групповыми свойствами:

1) $F(x, 0) = x$, $\forall\, x \in M^n$;

2) $F(F(x, t), s) = F(x, t + s)$, $\forall\, x \in M^n$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $f^t(x) = F(x,t)$, $x \in M^n$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ отображение $f^t : M^n \to M^n$ является гомеоморфизмом (см., например, [2]), поэтому поток также называют однопараметрической группой гомеоморфизмов, действующих на многообразии M^n.

Траекторией или *орбитой* точки $x \in M^n$ называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$. Любая орбита потока либо состоит из одной точки, и в этом случае эта точка называется *неподвижной*, либо гомеоморфна окружности и в этом случае любая точка орбиты называется *периодической*, либо является инъективно иммерсированной прямой. *Устойчивым и неустойчивым*, соответственно, многообразиями неподвижной точки x называются множества

$$W^s_x = \{y \in M^n : d(x, f^t(y)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\},$$
$$W^u_x = \{y \in M^n : d(x, f^t(y)) \to 0 \text{ при } t \to -\infty\}.$$

Полагают, что все траектории потока, отличные от неподвижной точки, ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t. Два потока $f^t : M^n \to M^n$ и $f'^t : M^n \to M^n$ называются топологически эквивалентными если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, переводящий траектории f^t в траектории f'^t с сохранением ориентации. Если при этом гомеоморфизм h обладает свойством $hf^t(x) = f'^t h(x)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, то потоки нзываются *топологически сопряженными*. *ε-цепью длины T*, соединяющей точку x с точкой y для потока f^t называется последовательность точек $x = x_0, \ldots, x_n = y$, для которых существует последовательность времен $t_1, \ldots, t_n$ такая, что $d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$, $t_i \geqslant 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $t_1 + \cdots + t_n = T$ (Рис. 1.1).

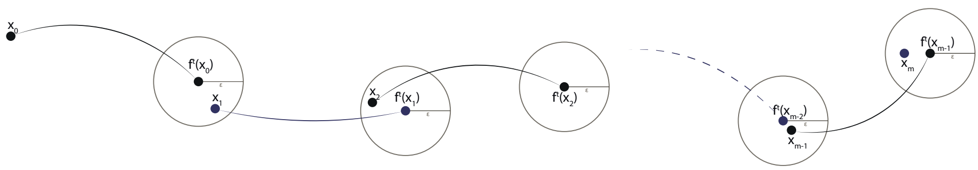

Рис. 1.1. ε-цепь длины T
Fig 1.1. ε-chain length T

Точка $x \in M^n$ называется *цепно-рекуррентной* для потока f^t, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины T, соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно-рекуррентных точек называется *цепно-рекуррентным множеством* и обозначается $\mathcal{R}_{f^t}$. Если цепно-рекуррентное множество потока конечно, то оно состоит из неподвижных точек. Следуя работе [3], назовем неподвижную точку p потока f^t *гиперболической*, если существует ее окрестность $U_p \subset M^n$, число $\lambda_p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \to \mathbb{R}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{U_p}$ с линейным потоком $a^t_{\lambda_p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданным формулой

$$a^t_{\lambda_p}(x_1, ..., x_{\lambda_p}, x_{\lambda_p+1}, \ldots, x_n) = (2^t x_1, \ldots, 2^t x_{\lambda_p}, 2^{-t} x_{\lambda_p+1}, \ldots, 2^{-t} x_n).$$

Число λ_p называется *индексом Морса* гиперболической точки p. Точки индексов n и 0 называются *источниковыми* и *стоковыми* соответственно, иначе точка p называется *седловой* (Рис. 1.2).

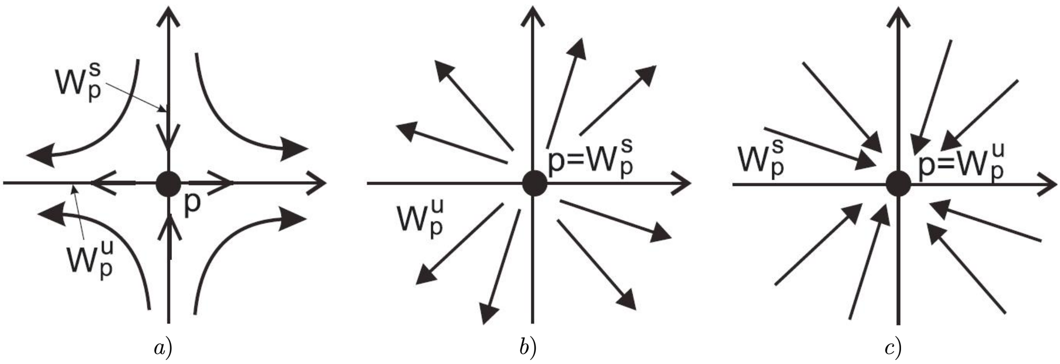

Рис. 1.2. Динамика в окрестности гиперболической неподвижной точки: a) седловая точка, b) источниковая точка, c) стоковая точка

Fig 1.2. Dynamics in the neighbourhood of a hyperbolic fixed point: a) saddle point, b) source point, c) sink point

Т е о р е м а 1.1. [4] *Пусть $f^t : M^n \to M^n$ – поток с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством. Тогда*

1) $M^n = \bigcup\limits_{p\in\mathcal{R}_{f^t}} W^u_p = \bigcup\limits_{p\in\mathcal{R}_{f^t}} W^s_p$;

2) неустойчивое W^u_p (устойчивое W^s_p) многообразие неподвижной точки p является топологическим подмногообразием многообразия M^n, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_p}$ $(\mathbb{R}^{n-\lambda_p})$;

3) $cl(W^u_p) \setminus W^u_p \subset \bigcup\limits_{q\in\mathcal{R}_{f^t}: W^s_q\cap W^u_p\neq\emptyset} W^u_q$ $\left(cl(W^s_p) \setminus W^s_p \subset \bigcup\limits_{q\in\mathcal{R}_{f^t}: W^u_q\cap W^s_p\neq\emptyset} W^s_q\right)$.

Обозначим через G класс потоков $f^t : M^n \to M^n$ с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством, инвариантные (устойчивые и неустойчивые) многообразия различных седловых точек которых не пересекаются.

Везде далее $f^t \in G$. Обозначим через $\Omega^\lambda_{f^t}$, $\lambda \in \{0, \dots, n\}$ множество его неподвижных точек с индексом Морса λ. Непосредственно из утверждения 1.1 следует, что множества $\Omega^0_{f^t}$ и $\Omega^n_{f^t}$, стоковых и источниковых точек, соответствено, не являются пустыми для любого градиентно-подобного потока. Положим $\Delta_{f^t} = \Omega^1_{f^t} \cup \dots \cup \Omega^{n-1}_{f^t}$. Для любого подмножества $P \subset \mathcal{R}_{f^t}$ будем полагать $W^s_P = \bigcup\limits_{p\in P} W^s_p$, $W^u_P = \bigcup\limits_{p\in P} W^u_p$. Для любого (возможно пустого) множества $\delta \subset \Delta_{f^t}$ положим

$$\Omega_\delta = \Omega^0_{f^t} \cup \delta,\ A_\delta = W^u_{\Omega_\delta}.$$

Напомним, что компактное f^t-инвариантное множество $A \subset M^n$ потока $f^t : M^n \to M^n$ называется его *аттрактором*, если оно обладает замкнутой окрестностью U_A, которая называется *захватывающей*, такой, что $f^t(U_A) \subset int\, U_A$ для $t > 0$ и $\bigcap\limits_{t>0} f^t(U_A) = A$. *Репеллером* потока f^t называется аттрактор потока f^{-t}.

Л е м м а 1.1. *Пусть $f^t \in G$. Тогда множество A_δ, $\forall\delta \subset \Delta_{f^t}$ является аттрактором потока f^t и обладает захватывающей окрестностью U_δ, граница которой*

Σ_δ *является* $(n-1)$*-мерным подмногообразием, которое каждая траектория потока* $f^t|_{W^s_{\Omega_\delta}\setminus\Omega_\delta}$ *пересекает в точности в одной точке.*

Для любой точки $p\in\delta$ положим $l^s_{p,\delta}=W^s_p\cap\Sigma_\delta$. Тогда множество $l^s_{p,\delta}$ является секущей для траекторий потока, лежащих в множестве $W^s_p\setminus p$. Из гиперболичности точки p следует, что множество $l^s_{p,\delta}$ гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^{n-\lambda_p}$. Аналогично для любой точки $q\in(\Delta_{f^t}\setminus\delta)$ множество $l^u_{q,\delta}=W^u_q\cap\Sigma_\delta$ гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^{\lambda_q}$.

Теорема 1.2. *Для любого потока* $f^t\in G$ *существует множество* $\delta_*\subset\Omega^1_{f^t}$*, такое что* $\Sigma_{\delta_*}\cong\mathbb{S}^{n-1}$.

Непосредственным следствием техники доказательства теоремы 1.2 является следующий результат.

Следствие 1.1. *Для любого потока* $f^t\in G$ *мощности* $|\Omega^0_{f^t}|$, $|\Omega^1_{f^t}|$ *множеств* $\Omega^0_{f^t}$, $\Omega^1_{f^t}$ *удовлетворяют неравенству*

$$|\Omega^0_{f^t}|\leqslant|\Omega^1_{f^t}|+1.$$

Положим $L^s_{\delta_*}=W^s_{\delta_*}\cap\Sigma_{\delta_*}$ и $L^u_{\delta_*}=W^u_{\Delta_{f^t}\setminus\delta_*}\cap\Sigma_{\delta_*}$. В силу леммы 1.1, множества $L^s_{\delta_*}$, $L^u_{\delta_*}$ состоят из разноразмерных сфер. Набор

$$S_{\delta_*}=(\Sigma_{\delta_*},L^s_{\delta_*},L^u_{\delta_*})$$

назовем *сферической схемой* потока $f^t\in G$.

Сферические схемы S_{δ_*}, $S_{\delta'_*}$ потоков f^t, $f'^t\in G$ назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\psi:\Sigma_{\delta_*}\to\Sigma_{\delta'_*}$, переводящий сферы множества $L^s_{\delta_*}$ в сферы множества $L^s_{\delta'_*}$ и сферы множества $L^u_{\delta_*}$ – в сферы множества $L^u_{\delta'_*}$.

Поскольку гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность потоков, переводит инвариантные многообразия неподвижных точек одного потока в инвариантные многообразия неподвижных точек другого потока с сохранением устойчивости и размерности, то непосредственным следствием теоремы 1.2 является следующий результат.

Следствие 1.2. *Топологически эквивалентные потоки* f^t, $f'^t\in G$ *обладают эквивалентными сферическими схемами.*

Заметим, что для некоторых классов поток сферическая схема является полным инвариантом. Так, для полярных потоков (с единственным стоком и единственным источником) на поверхности именно сферическая схема является полным инвариантом эквивалентности [1].

2. Построение захватывающей окрестности множества A_δ

В настоящем разделе мы докажем лемму 1.1а именно, докажем, что для любого потока $f^t\in G$ множество A_δ, $\forall\delta\subset\Delta_{f^t}$ является аттрактором потока f^t и обладает захватывающей окрестностью U_δ, граница которой Σ_δ является $(n-1)$-мерным подмногообразием, которое каждая траектория потока $f^t|_{V_\delta}$ пересекает в точности в одной точке.

Доказательство. Пусть $f^t\in G$. Обозначим через k_{f^t} число точек в множестве Δ_{f^t}. Из утверждения 1.1 и условий, наложенных на потоки класса G, следует, что множество A_δ компактно. Кроме того, оно f^t-инвариантно, как объединение неустойчивых многообразий неподвижных точек. Индукцией по числу $i \in \{0, \dots, k_{f^t}\}$ точек в множестве δ покажем, что A_δ обладает захватывающей окрестностью U_δ с описанными в лемме свойствами.

Если $i = 0$, то $\delta = \emptyset$ и, следовательно, множество A_δ состоит из гиперболических стоков, т. е. $A_\delta = \Omega^0_{f^t}$. Из определения гиперболической точки следует, что у любой точки $p \in \Omega^0_{f^t}$ существует окрестность $U_p \subset M^n$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \to \mathbb{R}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{U_p}$ с линейным потоком $a^t_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Положим $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$, $B_p = h_p^{-1}(\mathbb{B}^n)$ и обозначим через O начало координат в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\bigcap\limits_{t>0} a^t_0(\mathbb{B}^n) = O$, $\bigcap\limits_{t>0} f^t(B_p) = O$ и, следовательно, искомая захватывающая окрестность имеет вид $U_\delta = \bigcup\limits_{p \in \Omega^0_{f^t}} B_p$.

Пусть по предположению индукции захватывающая окрестность $U_{\tilde\delta}$ с описанными в лемме свойствами существует для любого аттрактора $A_{\tilde\delta}$, соответствующего множеству $\tilde\delta \subset \Delta_{f^t}$, состоящему из $\tilde i$ точек. Положим $\delta = \tilde\delta \cup p$, $p \in (\Delta_{f^t} \setminus \tilde\delta)$ и построим требуемую захватывающую окрестность U_δ аттрактора A_δ.

Пусть $p \in \Omega^\lambda_f$, $\lambda \in \{1, \dots, n-1\}$. Из определения гиперболической точки следует, что у точки p существует окрестность $U_p \subset M^n$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \to \mathbb{R}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{U_p}$ с линейным потоком $a^t_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Положим $\mathbb{D}_\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leqslant 1,\ x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$, $\mathbb{G}^u_\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}_\lambda : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 = 1\}$, $D_p = h_p^{-1}(\mathbb{D}_\lambda)$ и $G^u_p = h_p^{-1}(G^u_\lambda)$. Не уменьшая общности, можно считать, что множества $U_{\tilde\delta}$ и G^u_p не пересекаются (в противном случае можно уменьшить множество $\mathbb{D}_\lambda$). Тогда траектории потока f^t, проходящие через точки множества G^u_p, пересекают множество $\partial U_{\tilde\delta}$, каждая траектория в единственной точке. Для каждой точки $r \in G^u_p$ обозначим через $t_r > 0$ время, такое что $f^{t_r}(r) \in \partial U_{\tilde\delta}$, и положим $t_* = \max\limits_{r \in G^u_p} t_r$. Тогда искомая окрестность имеет вид (Рис. 2.1)

$$U_\delta = f^{-t_*}(U_{\tilde\delta}) \cup D_p.$$

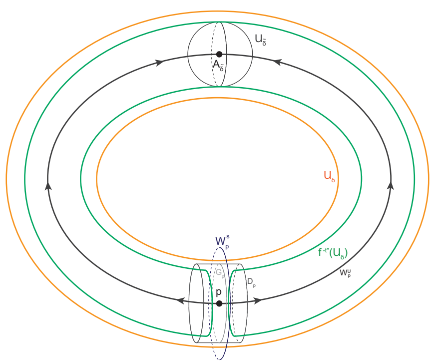

Рис. 2.1. Шаг индукции
Fig 2.1. Induction step

3. Построение секущей сферы

В настоящем разделе мы докажем теорему 1.2, а именно, докажем, что для любого потока $f^t \in G$ существует множество $\delta_* \subset \Omega^1_{f^t}$ такое, что $\Sigma_{\delta_*} \cong \mathbb{S}^{n-1}$.

Доказательство. Сначала заметим, что для любого аттрактора A_δ с захватывающей окрестностью U_δ множество

$$R_\delta = W^s_{\Omega^n_{f^t} \cup \Delta_{f^t} \setminus \delta}$$

является репеллером с захватывающей окрестностью $V_\delta = M^n \setminus int\, U_\delta$. Кроме того, если $\delta = \Delta_{f^t}$, то $R_{\Delta_{f^t}} = \Omega^n_{f^t}$. В этом случае репеллер $R_{\Delta_{f^t}}$ является нульмерным множеством, откуда следует, что аттрактор $A_{\Delta_{f^t}}$ является связным (см., например, [5]) и имеет связную захватывающую окрестность $U_{\Delta_{f^t}}$. С другой стороны, если $\delta = \emptyset$, то аттрактор $A_\emptyset = \Omega^0_{f^t}$ состоит из всех стоков потока f^t. Если сток у потока f^t – единственный, то $\delta_* = \emptyset$, и теорема доказана, поскольку захватывающая окрестность U_{δ_*} в этом случае является n-шаром с границей Σ_{δ_*} являющейся искомой $(n-1)$-сферой.

Рассмотрим случай, когда множество $\Omega^0_{f^t}$ состоит из $l > 1$ точек. В этом случае захватывающая окрестность $U_\emptyset$ аттрактора $A_\emptyset$ является дизъюнктным объединением m штук n-шаров. При этом связная захватывающая окрестность $U_{\Delta_{f^t}}$ получается из несвязной окрестности $U_\emptyset$ добавлением трубчатых окрестностей неустойчивых многообразий всех седловых точек. При этом если $\lambda_p > 1$ для седловой точки p, то множество $W^u_p \setminus p$ связно и целиком принадлежит устойчивому многообразию какого-либо одного стока. Таким образом, добавление к $U_\emptyset$ трубчатых окрестностей неустойчивых многообразий размерности большей единицы, не уменьшает числа компонент связности аттрактора. Отсюда следует, что с точностью до перенумерации стоков $\omega_1, \dots, \omega_l$ существует последовательность седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$ с индексом Морса 1, таких что компоненты связности множества $W^u_{\sigma_j} \setminus \sigma_j$ принадлежат $W^s_{\omega_j}, W^s_{\omega_{j+1}}$. Тогда множество $\Omega^0_{f^t} \cup \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{l-1}$ связно и, следовательно, связен аттрактор A_{δ_*} для $\delta_* = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{l-1}$. Кроме того, захватывающая окрестность U_{δ_*} аттрактора A_{δ_*} является n-шаром, а его граница Σ_{δ_*} – искомой секущей сферой (Рис. 3.1).

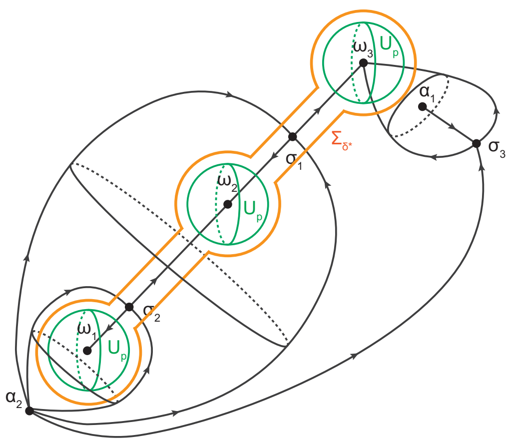

Рис. 3.1. Секущая сфера Σ_{δ_*}
Fig 3.1. Secant sphere Σ_{δ_*}

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00010), кроме раздела 3, который выполнен при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Список литературы

1. Fleitas G. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three //Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática. 1975. Vol. 19, No. 6 pp. 155-187.

2. Kosniowski C. A first course in algebraic topology. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511569296

3. Medvedev T. V., Pochinka O. V., Zinina S. Kh. On existence of Morse energy function for topological flows // Advances in Mathematics. 2021. Vol. 378. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107518

4. Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. Vol. 26, No. 4. pp. 350–369. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354721040031

5. Гринес В. З., Медведев В. С., Починка О. В., Жужома Е. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла // Труды МИАН. 2010. Т. 271. С. 111 –133.

Поступила 2.04.2022; доработана после рецензирования 7.05.2022; принята к публикации 25.05.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows on dimensions two and three”, *Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **19**:6 (1975), 155-187.

2. C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980 DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511569296.

3. T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, “On existence of Morse energy function for topological flows”, *Advances in Mathematics*, **378** (2021), 15 p. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107518

4. O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, “Construction of the Morse-Bott Energy Function for Regular Topological Flows”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **26**:4 (2021), 350–369. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354721040031

5. V. Z. Grines, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, E. V. Zhuzhoma, "Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms", *Trudy MIAN*, **271** (2010), 111–133.

Submitted 2.04.2022; Revised 7.05.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.