

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.40-53

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Топологическая сопряжённость неособых потоков с двумя замкнутыми траекториями на $S^2 \times S^1$

А. Л. Добролюбова, В. Е. Круглов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены неособые потоки с двумя предельными циклами на многообразии $S^2 \times S^1$. Для таких потоков получена классификация с точностью до топологической сопряжённости, показано, что они имеют функциональный модуль устойчивости. Поскольку для каждого фиксированного аргумента функциональный модуль устойчивости принимает своё значение, из наличия функционального модуля следует наличие бесконечного числа числовых модулей устойчивости. Для получения данного результата была произведена линеаризация в окрестностях двух предельных циклов с помощью конструкции, построенной в работе М. Ирвина 1970 г. Был получен результат о наличии инвариантного с точностью до топологической сопряжённости двумерного слоения в окрестности предельного цикла, именно из наличия таких слоений и вытекает факт о функциональном модуле устойчивости. А именно, при рассмотрении области пересечения двух слоений и, соответственно, двух линеаризаций, которые действуют в бассейнах двух предельных циклов, функциональным модулем становится отображение, описывающее взаимное расположение слоя слоения в окрестности первого предельного цикла относительно слоя второго предельного цикла. Используются результаты работы О. Починки и Д. Шубина 2022 г. о ровно двух классах топологической эквивалентности потоков в рассматриваемом классе и описании их отличий. В работе приведены рисунки, на которых показаны 2 класса топологической сопряжённости потоков из рассматриваемых классов. Также изображен процесс склейки \mathbb{R}^3 в многообразии с устойчивым предельным циклом. Показано построение образующей полнотория. Также проиллюстрирована согласованная и несогласованная ориентация предельных циклов, показаны инвариантные слоения, показан функциональный модуль.

Ключевые слова: топологическая классификация, модуль устойчивости, неособый поток, функциональный модуль, трёхмерное многообразие

Для цитирования: А. Л. Добролюбова, В. Е. Круглов Топологическая классификация в смысле топологической сопряжённости неособых потоков с двумя замкнутыми траекториями на многообразии вида $S^2 \times S^1$ // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 40–53. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.40-53>

Об авторах:

Добролюбова Алиса Леонидовна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7004-766X>, alicedobrolub@mail.ru

Круглов Владислав Евгеньевич, научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, аспирант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

© А. Л. Добролюбова, В. Е. Круглов



MSC2020 37C15, 37C27

Topological conjugacy of non-singular flows with two limit cycles on $S^2 \times S^1$

A. L. Dobrolyubova, V. E. Kruglov

National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In the paper, non-singular flows with two limit cycles on the manifold $S^2 \times S^1$ are considered. For such flows, a classification is obtained up to topological conjugacy, and it is shown that they have a functional modulus of stability. Since the functional modulus of stability takes on its own value for each fixed argument, the presence of such modulus implies the presence of an infinite number of numerical moduli of stability. To obtain this result, linearization is carried out in the neighbourhoods of two limit cycles using the construction from the work by M. Irwin. A result is obtained on the presence of a two-dimensional foliation in a neighborhood of the limit cycle; this foliation is invariant up to topological conjugacy. Existence of the functional modulus of stability follows from the presence of such foliations. Namely, when considering the intersection of two foliations and, accordingly, two linearizations acting in the basins of two limit cycles, the desired functional modulus is a map describing the relative position of the foliation layer in the neighborhood of the first limit cycle relative to the layer of the second limit cycle. The results are used from the work by Pochinka O. V. and Shubin D. D. on exactly two classes of topological equivalence of flows in the class under consideration and on description of their differences. The work includes figure which shows 2 classes of topological conjugacy of flows from the classes studied. Also there is a figure which shows the process of gluing \mathbb{R}^3 into a manifold with a stable limit cycle. Moreover, the construction of a solid torus is shown. The figures show consistent and inconsistent orientation of limit cycles, as well as invariant foliations. Also there is a figure which shows the functional modulus.

Keywords: topological conjugacy, modulus of stability, non-singular flow, limit cycle

For citation: A. L. Dobrolyubova, V. E. Kruglov. Topological conjugacy of non-singular flows with two limit cycles on $S^2 \times S^1$. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:1(2022), 40–53. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.40-53>

About the authors:

Dobrolyubova Alisa Leonidovna, student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7004-766X>, alicedobrolub@mail.ru

Kruglov Vladislav Evgenyevich, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Doctoral Student, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

1. Введение

Потоки $f^t, f^{tt}: M \rightarrow M$ на многообразии M называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, отображающий траектории

потока f^t в траектории потока $f^{t'}$ с сохранением направления движения по траекториям. Два потока называются *топологически сопряжёнными*, если выполняется условие $h \circ f^t = f^{t'} \circ h$. Это означает, что h отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям. Найти инвариант, описывающий класс топологической эквивалентности или топологической сопряжённости потоков в некотором классе, означает получить *топологическую классификацию* класса потоков.

Понятие *грубых потоков* на плоскости были введено в статье А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина [1]. Неблуждающее множество таких потоков состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, кроме того, седловые сепаратрисы пересекаются только трансверсально (для потоков на поверхности это означает, что отсутствуют *связки* – сепаратрисы, соединяющие седловые точки). Этот важный класс потоков был обобщён С. Смейлом в работе [2] на произвольные поверхности, назван классом *потоков Морса-Смейла* и классифицирован с точностью до топологической эквивалентности.

Конечность множества неблуждающих траекторий градиентно-подобного потока ведёт к идее сведения проблемы топологической классификации к комбинаторной проблеме. Впервые это было сделано Е. А. Леонтович и А. Г. Майером [3–4] для классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий. Позже их результаты были расширены в исследованиях М. Пейшото [5], А. А. Ошемкова, В. В. Шарко [6], С. Ю. Пилогина [7], А. О. Пришляка [8], где аналогичная проблема была решена для потоков Морса-Смейла на замкнутых многообразиях размерности 2, 3 и выше. Отдельно рассмотрена топологическая классификация неособых потоков с двумя предельными циклами на многообразиях произвольной размерности в работе О. В. Починки и Д. Д. Шубина [9].

Сделаны шаги и по классификации потоков Морса-Смейла в смысле топологической сопряжённости. В работе В. Е. Круглова, Д. С. Малышева, О. В. Починки и Д. Д. Шубина [10] построена классификация в смысле сопряжённости градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений на n -мерной сфере. В работе В. Е. Круглова и О. В. Починки [11] построена классификация в смысле сопряжённости для поверхностных потоков Морса-Смейла без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой, то есть с конечным числом модулей устойчивости. В работе [12] А. Е. Колобяниной и В. Е. Круглова обобщены результаты К. Мейера [13], и построена энергетическая функция для Ω -устойчивых потоков на поверхностях.

Ж. Палис в своей работе [14] указал, что наличие седловой связки у потока на поверхности приводит к тому, что класс топологической эквивалентности такого потока может содержать континуум классов топологической сопряжённости, описываемых параметрами, которые называются *модулями*. Он доказал, что каждая сепаратриса-связка даёт модуль, равный отношению собственных значений непересекающихся инвариантных многообразий седловых точек, соединённых связкой.

Цель настоящей работы – продолжить классификацию потоков Морса-Смейла в смысле топологической сопряжённости, и на этот раз рассмотреть случай предельных циклов. Для этого авторами обобщены результаты работы [9] на многообразии вида $S^2 \times S^1$ на случай сопряжённости. Рассмотрен класс неособых потоков с двумя предельными циклами на трёхмерных многообразиях и доказано, что потоки из такого класса имеют функциональный модуль, а также построена топологическая классификация в смысле сопряжённости.

2. Динамика рассматриваемого класса потоков

Поток называется неособым, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических предельных циклов.

Введем класс $G_2(M)$ неособых потоков f^t на трёхмерном многообразии $M = S^2 \times S^1$ с двумя единственными предельными циклами c_1, c_2 , где c_1 – устойчивый, c_2 – неустойчивый, с периодами T_1 и T_2 соответственно.

Предложение 2.1 ([9]). *Трёхмерное многообразие M допускает поток из класса $G_2(M)$. При этом, с точностью до топологической эквивалентности таких потоков существует ровно 2.*

На Рис. 2.1 схематически показаны два класса топологической эквивалентности потоков из класса $G_2(M)$.

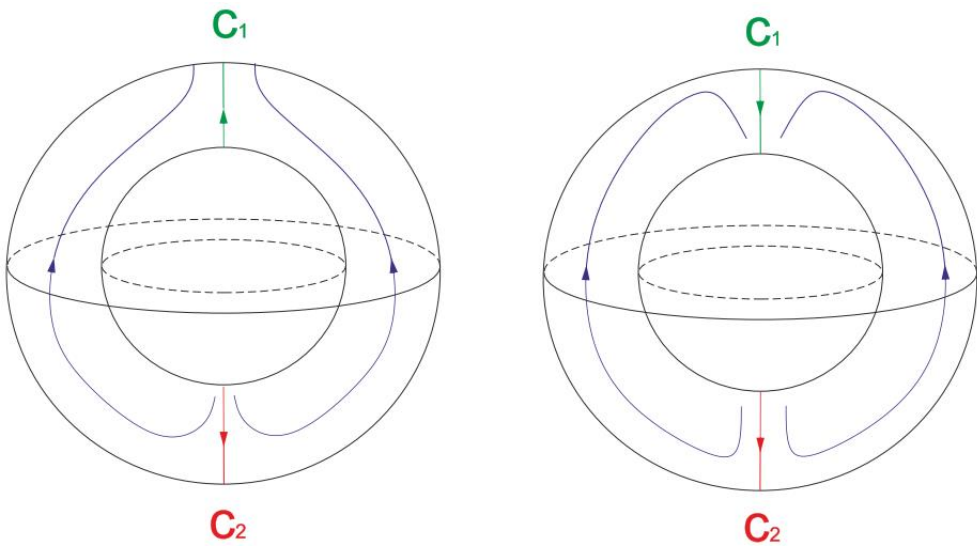


Рис. 2.1. Примеры топологически неэквивалентных потоков на $S^2 \times S^1$
Fig 2.1. The examples of topological non-equivalent flows on $S^2 \times S^1$

3. Линеаризация в окрестности предельного цикла

Определим поток A^t с помощью следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 1. \end{cases}$$

Для $i = 1, 2$ зададим гомеоморфизм $g_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ формулой

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = (2^{(-1)^i} x_i, 2^{(-1)^i} y_i, z_i - T_i)$$

и группу $G_i = \{g_i^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (см. Рис. 3.1).

Положим $\Pi_i = \mathbb{R}^3/G_i$, а через $q_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi_i$ обозначим естественную проекцию.

Обозначим через a_i^t поток, индуцированный на Π_i посредством A^t .

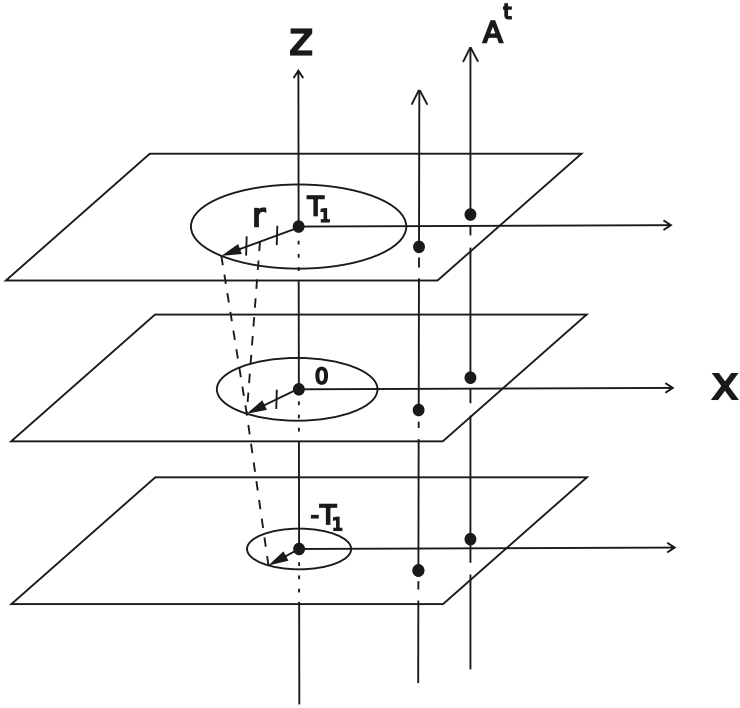


Рис. 3.1. Поток A^t , действие гомеоморфизма g_1
 Fig 3.1. The flow A^t , the action of homeomorphism g_1

4. Два класса топологической эквивалентности: согласованная и несогласованная ориентация предельных циклов

Предложение 4.1 ([15]). *Неустойчивый предельный цикл c_2 потока $f^t: M \rightarrow M$ обладает неустойчивым многообразием $W_{c_2}^u = \{x \in M : \min_{p \in c_2} d(p, f^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}$, таким что существует гомеоморфизм $\eta_2: W_{c_2}^u \rightarrow \Pi_2$, сопрягающий потоки $f|_{W_{c_2}^u}^t$ и a_2^t .*

Аналогичный факт имеет место для устойчивого многообразия предельного устойчивого цикла c_1 , утверждающий, что поток f^t в устойчивом многообразии $W_{c_1}^s = \{x \in M : \min_{p \in c_1} d(p, f^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\}$ цикла c_1 сопряжен потоку a_1^t посредством некоторого гомеоморфизма $\eta_1: W_{c_1}^s \rightarrow \Pi_1$.

Положим

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2^{-z}\}, \mathbb{V}_2 = q_2(V_2).$$

Обозначим $\tilde{c}_i = q_i(Oz) = \eta_i(c_i)$. По построению факторпространство \mathbb{V}_2 гомеоморфно полноторию, а $U_2 = \eta_2^{-1}(\mathbb{V}_2)$ является замкнутой окрестностью цикла c_2 . Зададим

окрестность U_1 цикла c_1 как $U_1 = \text{cl}(M \setminus U_2)$. Заметим, что U_1 является полноторием согласно [9]. Положим $\mathbb{V}_1 = \eta_1(U_1)$; при этом \mathbb{V}_1 – полноторий, являющийся подмножеством Π_1 , содержащий внутри устойчивый предельный цикл \tilde{c}_1 потока A^t , траектории этого потока трансверсальны границе \mathbb{V}_1 .

Положим, $\bar{\alpha}_2$ – компонента связности пересечения плоскости O_{yz} и $\text{cl}(V_2)$, ориентированная в сторону возрастания координаты z (см. Рис. 4.1), а также $\alpha_2 = q_2(\bar{\alpha}_2)$ – образующая полнотория \mathbb{V}_2 . По построению цикл \tilde{c}_2 и α_2 гомотопны. Положим $\alpha_1 = \eta_1(\eta_2^{-1}(\alpha_2))$ – образующая полнотория \mathbb{V}_1 по построению.

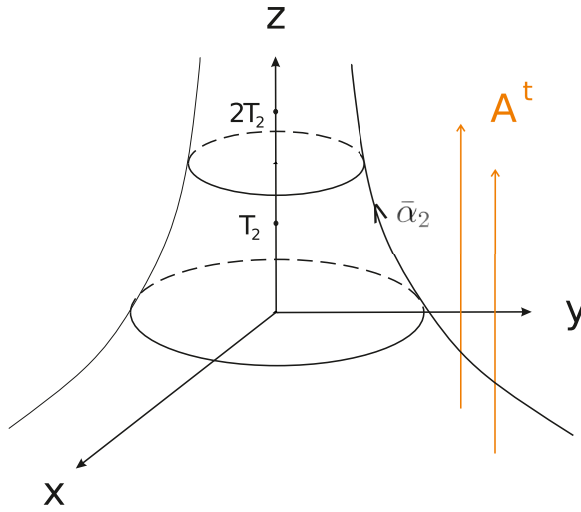


Рис. 4.1. Прообраз $\bar{\alpha}_2$ образующей α_2 полнотория \mathbb{V}_2
Fig 4.1. Preimage of $\bar{\alpha}_2$ of generator α_2 of solid torus \mathbb{V}_2

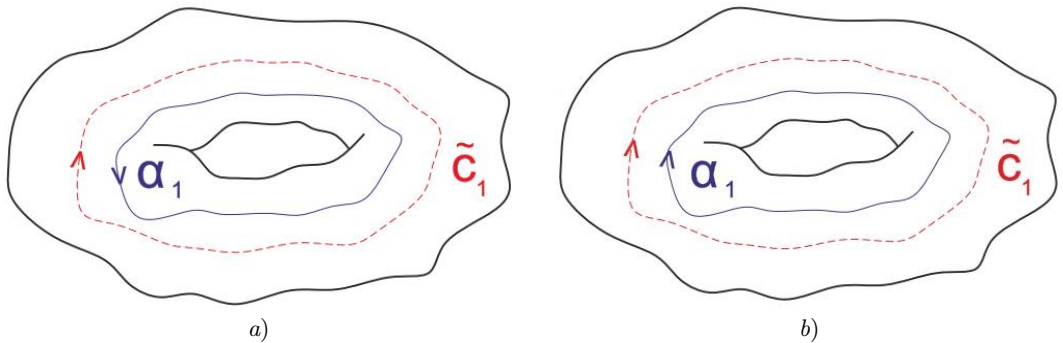


Рис. 4.2. а) несогласованная ориентация циклов c_1 и c_2 ; б) согласованная ориентация циклов c_1 и c_2
Fig 4.2. а) c_1 and c_2 with inconsistent orientation; б) c_1 and c_2 with consistent orientation

Введем понятие согласованности ориентаций предельных циклов. Будем говорить, что циклы c_1 и c_2 ориентированы согласованно, если гомотопны устойчивый цикл \tilde{c}_1 и α_1 . В противном случае положим, что циклы c_1 и c_2 ориентированы несогласованно

(см. Рис. 4.2). Присвоим потоку f^t значение $\nu = +1$ ($\nu = -1$) в первом (втором) случае.

5. Единственность инвариантного слоения в окрестности предельного цикла

Обозначим через $K_1 = M \setminus c_2$ и $K_2 = M \setminus c_1$. Согласно работе [15], существует гомеоморфизм $\eta_i: K_i \rightarrow \Pi_i$, сопрягающий поток $f^t|_{K_i}$ с потоком \tilde{a}_i^t .

Для точки $p \in K_i$ будем называть её локальными координатами (x_i, y_i, z_i) координаты некоторой точки $\hat{p} \in \mathbb{R}^3$, такой что $\eta_i(q_i(\hat{p})) = p$ и $0 \leq z_i \leq T_i$.

Обозначим через $\chi_i = \{z_i = c, c \in \mathbb{R}\}$ слоение на \mathbb{R}^3 , представляющее из себя горизонтальные плоскости, $\tilde{\chi}_i = q_i(\chi_i)$, $\Xi_i = \eta_i^{-1}(\tilde{\chi}_i)$ (см. Рис. 5.1).

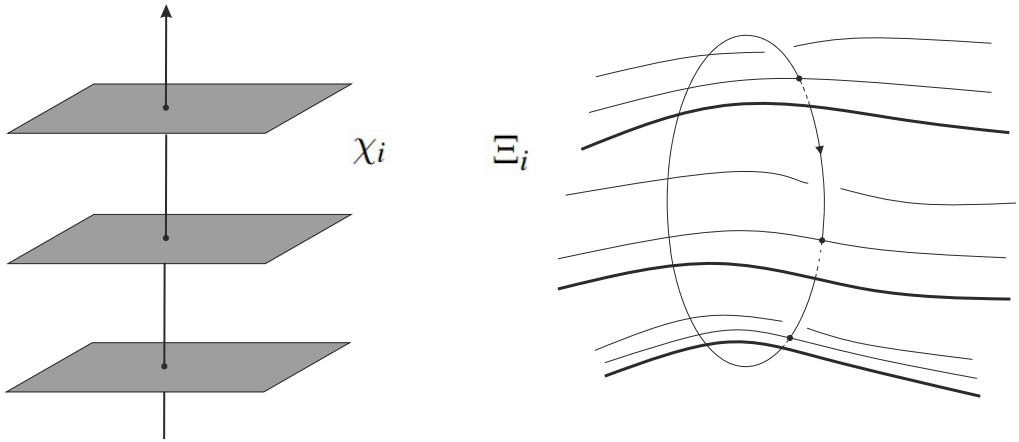


Рис. 5.1. Инвариантные слоения χ_i и Ξ_i
Fig 5.1. The invariant foliations Ξ and χ

Л е м м а 5.1. Слоение Ξ_i единственно, т. е. оно не зависит от выбора сопрягающего гомеоморфизма η_i .

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Вначале заметим, что существование хотя бы одного слоения Ξ_i с требуемыми свойствами следует из линеаризации. Действительно, пусть $\chi_i = \{y_i = c, c \in \mathbb{R}\}$ – слоение на \mathbb{R}^2 , чьи слои являются горизонтальными прямыми, и пусть $\tilde{\chi}_i = q_i(\chi_i)$. Тогда

$$\Xi_i = \eta_i^{-1}(\tilde{\chi}_i).$$

Докажем единственность.

Положим, что Ξ_i и $\hat{\Xi}_i$ – два слоения с требуемыми свойствами, определённые на K_i . Покажем, что существует гомеоморфизм $\hat{\eta}_i: K_i \rightarrow \Pi_i$, сопрягающий $\phi^t|_{K_i}$ с a_i^t , и $\hat{\eta}_i(\hat{\Xi}_i) = \tilde{\chi}_i$. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 кольцо $\varpi = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Пусть $\tilde{\varpi} = \hat{\eta}_i^{-1}$ от $q_i(\varpi)$. Заметим, что для точки p_0 , лежащей на внутренней границе $\tilde{\varpi}$, $\phi_i^T(p_0)$ лежит на внешней границе $\tilde{\varpi}$, таким образом, $\tilde{q}_i(\varpi)$ и $\tilde{\varpi}$ пересекают все траектории $K_i \setminus \Omega_i$ и $\Pi_i \setminus \tilde{c}_i$. Тогда пусть $\hat{\eta}_i(\phi^t(p)) = a_i^t(\hat{\eta}_i(p))$ для $z \in [\tilde{\varpi}]$. По непрерывности такой гомеоморфизм может быть продолжен на циклы.

Тогда гомеоморфизм $\tilde{\theta}_i = \hat{\eta}_i \eta_i^{-1} : \Pi_i \rightarrow \Pi_i$ сопрягает поток A^t с собой. Тогда существует поднятие

$$\theta_i = (\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i), \varphi_i^2(x_i, y_i, z_i), \tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i)) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

отображения $\tilde{\theta}_i (q_i \theta_i = \tilde{\theta}_i q_i)$, сопрягающее поток A^t с собой, где $\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i), \varphi_i^2(x_i, y_i, z_i), \psi_i(x_i, y_i, z_i)$ – непрерывные отображения.

Гомеоморфизм θ_i переводит траектории в траектории, но траектории A^t являются вертикальными прямыми, поэтому

$$\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i) = \varphi_i^1(x_i, y_i), \varphi_i^2(x_i, y_i, z_i) = \varphi_i^2(x_i, y_i).$$

По определению потока A^t :

$$A^t(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, z_i + t).$$

Тогда, в силу сопряжения,

$$\tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i + t) = \tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i) + t.$$

Перепишем $\tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i)$ в виде $\tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i) = z_i + \psi_i(x_i, y_i, z_i)$. Тогда

$$z_i + t + \psi_i(x_i, y_i, z_i + t) = z_i + \psi_i(x_i, y_i, z_i) + t$$

и, следовательно,

$$\psi_i(x_i, y_i, z_i + t) = \psi_i(x_i, y_i, z_i), t \in \mathbb{R}.$$

Это означает, что отображение ψ не зависит от z_i , положим

$$\psi_i(x_i, y_i, z_i) = \psi_i(x_i, y_i).$$

Таким образом, θ_i имеет форму

$$\theta_i(x_i, y_i, z_i) = (\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i), \varphi_i^2(x_i, y_i, z_i), z_i + \psi_i(x_i, y_i)).$$

Поскольку $\Pi_i = \mathbb{R}^3/G_i$, где G_i – циклическая группа, порождённая гомеоморфизмом $g_i(x_i, y_i, z_i) = (\mu_i 2^{(-1)^i} x_i, \mu_i 2^{(-1)^i} y_i, z_i - T_i)$, и θ_i спроецировано с \mathbb{R}^3 на Π_i , тогда выполняется равенство $g_i \theta_i = \theta_i g_i$. Отсюда

$$\begin{aligned} ((\varphi_i^1(x_i/2, y_i/2), \varphi_i^2(x_i/2, y_i/2), z_i + \psi_i(x_i/2, y_i/2) - T_i)) = \\ = ((\varphi_i^1(x_i)/2, \varphi_i^2(x_i)/2, (y_i)/2, z_i + \psi_i(x_i, y_i) - T_i)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\psi_i(x_i/2, y_i/2) = \psi_i(x_i, y_i).$$

Покажем, что в таком случае $\psi_i(x_i, y_i)$ является константой. Действительно, пусть $(x_i, y_i) \in X_i O Y_i$ и $z_i^n = \psi_i(x_i/2^n, y_i/2^n), n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\psi_i(x_i/2, y_i/2) = \psi_i(x_i, y_i)$, имеем $z_i^n = \psi_i(x_i, y_i)$ для каждого натурального n . Поскольку ψ_i – непрерывное отображение, тогда последовательность констант $\psi_i(x_i/2^n, y_i/2^n)$ сходится к $\psi_i(0, 0)$ и $\psi_i(x_i, y_i) = \psi_i(0, 0)$ для каждого $(x_i, y_i) \in X_i O Y_i$.

Таким образом, $\theta_i(x_i, y_i, z_i) = (\varphi_i^1(x_i, y_i), \varphi_i^2(x_i, y_i), z_i + b_i)$, где b_i является константой. Следовательно, θ_i сохраняет слоение χ_i . Тогда

$$\tilde{\chi}_i = \tilde{\theta}_i(\tilde{\chi}_i) = \hat{\eta}_i \eta_i^{-1}(\tilde{\chi}_i) = \hat{\eta}_i(\Xi_i),$$

и, поскольку $\tilde{\chi}_i = \hat{\eta}_i(\Xi_i)$, следовательно, $\Xi_i = \hat{\eta}_i^{-1}(\tilde{\chi}_i) = \hat{\Xi}_i$.

6. Функциональные модули

Зададим отображение $\phi: \Pi_1 \setminus \tilde{c}_1 \rightarrow \Pi_2 \setminus \tilde{c}_2$ формулой

$$\phi = \eta_2 \eta_1^{-1}.$$

Также зададим его поднятие $\Phi: \mathbb{R}^3 \setminus Oz_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$ ($q_2 \Phi = \phi q_1$). По определению гомеоморфизма Φ , заданного формулой

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = (\gamma(x_1, y_1, z_1), \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1)),$$

где $\gamma(x_1, y_1, z_1): W_1 \rightarrow \mathbb{X}_2 OY_2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1): W_2 \rightarrow \mathbb{O}_{z_2}$ – непрерывные функции, $W_1, W_2 \subset \mathbb{X}_1 OY_1 \setminus Oz_1$. Отображение Φ сопрягает поток A^t с потоком A^t , отправляя вертикальные траектории в вертикальные траектории, поэтому

$$\gamma(x_1, y_1, z_1) = \gamma(x_1, y_1), \quad \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1 + t) = \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1) + t.$$

Положим $\delta(x_1, y_1, z_1) = \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1) - z_1$, из формулы выше следует, что $\delta(x_1, y_1, z_1) = \delta(x_1, y_1)$, и Φ примет форму

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = (\gamma(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1)),$$

поэтому $W_1 = W_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, и теперь $\gamma: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Напомним, что $g_i(x_i, y_i, z_i) = (2^{(-1)^i} x_i, 2^{(-1)^i} y_i, z_i - T_i)$, $G_i = \{g_i^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Поскольку $\Pi_i = \mathbb{R}^3/G_i$ и $\Phi: \mathbb{R}^3 \setminus Oz_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$ проецируются на $\phi: \Pi_1 \setminus \tilde{c}_1 \rightarrow \Pi_2 \setminus \tilde{c}_2$, тогда $g_2 \Phi = \Phi g_1$ в случае согласованной ориентации циклов и $g_2^{-1} \Phi = \Phi g_1$ в противном случае. Тогда

1) в случае согласованной ориентации предельных циклов:

$$(2\gamma(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1) - T_2) = (\gamma(x_1/2, y_1/2), z_1 + \delta(x_1/2, y_1/2) - T_1)$$

и

$$\delta(x_1, y_1) = \delta(x_1/2, y_1/2) + (T_2 - T_1).$$

2) в случае несогласованной ориентации предельных циклов:

$$(2\gamma(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1) + T_2) = (\gamma(x_1/2, y_1/2), y_1 + \delta(x_1/2, y_1/2) - T_1)$$

и

$$\delta(x_1, y_1) = \delta(x_1/2, y_1/2) - (T_2 + T_1);$$

Действительно, отображение δ показывает меру смещения слоя ξ_1 слоения Ξ_1 от слоя ξ_2 слоения Ξ_2 в следующем смысле. Пусть $(x_1, y_1) \in X_1 OY_1$, тогда $\gamma(x_1, y_1) \in X_2 OY_2$ и $\eta_2^{-1}(q_2(\gamma(x_1, y_1)))$ принадлежит слоению $\xi_2 \in \Xi_2$ для каждого $(x_1, y_1) \in X_1 OY_1$. Из смещения δ следует, что

$$f^{\delta(x_1, y_1)}(\eta_2^{-1}(q_2(\gamma(x_1, y_1), 0)))$$

принадлежит слоению $\xi_1 \in \Xi_1$ для каждого $x, y \in X_1 OY_1$ (см. Рис. 6.1).

Отображение $\delta: X_1 OY_1 \rightarrow Oz_2$ может быть спроецировано в виде отображения $\hat{\delta}: \mathbb{T}^2 \rightarrow S^1$. Пусть $\beta: X_1 OY_1 \rightarrow X_1 OY_1$ задано формулой $\beta(x_1, y_1) = (x_1/2, y_1/2)$ и $B = \{\beta^n(x_1, y_1), n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $\mathbb{T}^2 = X_1 OY_1/B$, обозначим через $p_\beta: X_1 OY_1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Пусть $e: Oz_2 \rightarrow Oz_2$ задано следующими формулами:

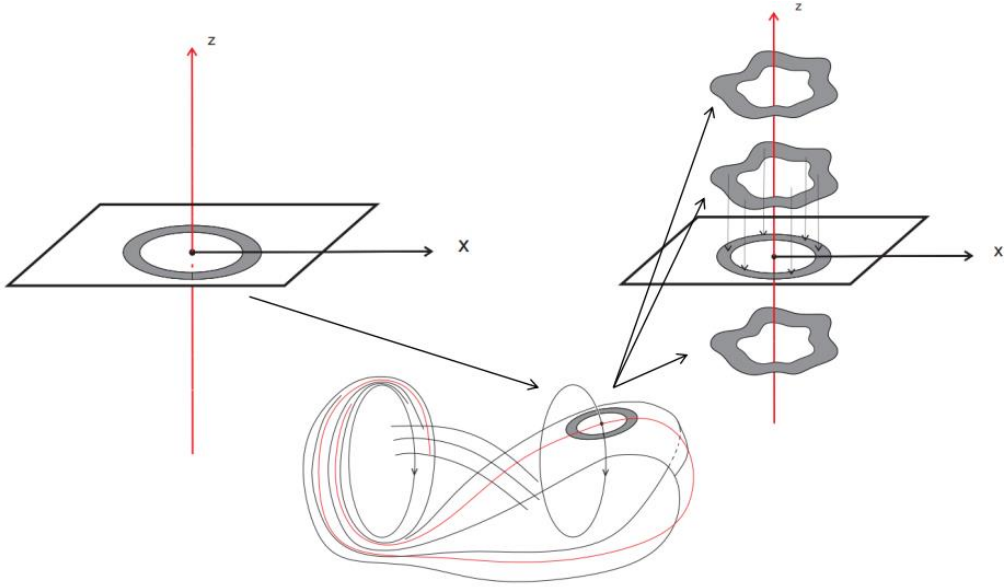


Рис. 6.1. Расположение слоя ξ_1 относительно слоя $\xi_2, \eta_2(\eta_1^{-1}(\omega))$ относительно ω

Fig 6.1. The location of an element of Ξ_1 relatively to an element of $\Xi_2, \eta_2(\eta_1^{-1}(\omega))$ relatively to ω

- 1) $e(z_2) = z_2 + (T_2 - T_1)$, если $T_2 \neq T_1$, $e(z_2) = z_2 + 1$, если $T_2 = T_1$;
- 2) $e(z_2) = z_2 - (T_2 + T_1)$.

Пусть $E = \{e^n(z_2), n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $S^1 = \mathbb{R}/E$, обозначим через $p_e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ естественную проекцию. Таким образом, отображение $\hat{\delta}: \mathbb{T}^2 \rightarrow S^1$ определяется формулой

$$\hat{\delta}(\tau) = p_e(\delta(p_\beta^{-1}(\tau))), \tau \in \mathbb{T}^2.$$

Далее докажем, что класс эквивалентности данного отображения относительно следующего отношения эквивалентности является полным инвариантом потока $f^t: M \rightarrow M$ с точностью до топологической сопряженности, т. е. такой поток имеет функциональный модуль.

Назовем два отображения $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$ эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\vartheta}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, сохраняющий ориентацию, и константа $s_0 \in S^1$, такая что

$$\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(\tau)) = \hat{\delta}(\tau) + s_0.$$

Обозначим все объекты на f^{tt} аналогично объектам на f^t .

Т е о р е м а 6.1. *Потоки $f^t, f^{tt}: M \rightarrow M$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда*

- 1) $T_i = T'_i$;
- 2) циклы c_1, c_2 и c'_1, c'_2 или попарно согласованно ориентированы, или попарно несогласованно ориентированы;
- 3) отображения $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$ эквивалентны в смысле сопряженности.

Доказательство. Необходимость. Пусть $h: M \rightarrow M$ – гомеоморфизм, сопрягающий f^t с f'^t . Поскольку $h|_{c_i}$, $i = 1, 2$, тоже сопрягающий, имеем $T_i = T'_i$. Согласно предложению 2.1, у обоих потоков циклы имеют один класс согласованности ориентаций.

По предположению $hf^t = f'^th$. Обозначим через $\theta_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ поднятие гомеоморфизма $h|_{K_i}$. Тогда θ_i топологически сопрягает A^t с собой. Аналогично доказательству леммы можно показать, что

$$\theta_i(x_i, y_i, z_i) = (\varphi_i(x_i, y_i), y_i + b_i),$$

где $\varphi_i(x_i, y_i): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывное отображение; b_i – константа. Также имеем два отображения из $\mathbb{R}^3 \setminus Oz_1$ в $\mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$, заданные формулами $\Phi(x_1, y_1, z_1) = (\gamma(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1))$, $\Phi'(x_1, y_1, z_1) = (\gamma'(x_1, y_1), z_1 + \delta'(x_1, y_1))$, где $\gamma(x_1, y_1): \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\delta(x_1, y_1): \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\gamma'(x_1, y_1): \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\delta'(x_1, y_1): \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ – непрерывные отображения. С другой стороны, имеем $\Phi' = \theta_2\Phi\theta_1^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1) = (\varphi_2(\gamma(\varphi_1^{-1}(x_1, y_1)), z_1 + b_2 + \delta(\varphi_1^{-1}(x_1, y_1)) - b_1).$$

Таким образом, $\delta'(x_1, y_1) = \delta(\varphi_1^{-1}(x_1, y_1)) + z_2^0$, где $z_2^0 = b_2 - b_1$ или, эквивалентно, $\delta'(\varphi_1(x_1, y_1)) = \delta(x_1, y_1) + z_2^0$. Положим $\vartheta = \varphi_1: X_1OY_1 \rightarrow X_1OY_1$ и $\hat{\vartheta} = p_\beta\vartheta p_\beta^{-1}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Тогда $\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(\tau)) = \hat{\delta}(\tau) + s_0$, где $s_0 = p_e(z_2^0)$ и $\tau = p_\beta(x_1, y_1)$.

Достаточность. Построим сопрягающий гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$ для f^t и f'^t , что докажет теорему.

Во-первых, циклы c_1 , c_2 и c'_1 , c'_2 имеют одинаковые периоды соответственно и один знак согласованности ориентаций.

Во-вторых, существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\hat{\vartheta}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ и константа $s_0 \in S^1$ такая, что $\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(\tau)) = \hat{\delta}(\tau) + s_0$, $\tau \in \mathbb{T}^2$. Пусть $\vartheta: X_1OY_1 \rightarrow X_1OY_1$ – поднятие $\hat{\vartheta}$. Определим гомеоморфизм $\theta_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ формулой

$$\theta_1((x_1, y_1), z_1) = (\vartheta(x_1, y_1), z_1).$$

Тогда θ_1 сопрягает \hat{A}^t с собой и может быть спроецировано на гомеоморфизм $h: K_1 \rightarrow K'_1$, сопрягающий $f^t|_{K_1}$ с $f'^t|_{K'_1}$ формулой

$$h|_{K_1} = \eta_1^{-1}q_1\theta_1q_1^{-1}\eta_1.$$

Чтобы доказать, что гомеоморфизм h может быть продолжен на c_2 сопряжением $f^t|_{c_2}$ с $f'^t|_{c'_2}$ достаточно показать, что поднятие $\theta_2: \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$ будет в форме

$$\theta_2(x_2, y_2, z_2) = (\varphi_2(x_2, y_2), z_2 + b_2),$$

где $\varphi_2(x_2, y_2)$ – непрерывное отображение; b_2 – константа. Действительно, пусть $\delta, \delta': \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – поднятия отображений $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$ соответственно, такие что $\delta'(\vartheta(x_1, y_1)) = \delta(x_1, y_1) + z_2^0$, где $p_e(z_2^0) = s_0$. По определению отображения Φ, Φ' имеем $\theta_2 = \Phi'\theta_1\Phi^{-1}$, тогда

$$\theta_2(x_2, y_2, z_2) = (\gamma'(\vartheta(\gamma^{-1}(x_2, y_2))), z_2 - \delta(\gamma^{-1}(x_2, y_2) + \delta'(\vartheta(\gamma^{-1}(x_2, y_2)))).$$

Пусть $\varphi_2 = (\gamma'\vartheta\gamma^{-1})$, $(x_1, y_2) = \gamma^{-1}(x_2, y_2)$ и $b_2 = z_2^0$. Таким образом, $\theta_2(x_2, y_2, z_2) = (\varphi_2(x_2, y_2), z_2 + b_2)$.

С л е д с т в и е 6.1. *Потоки из класса $G_2(M)$ имеют бесконечное число модулей устойчивости.*

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке гранта РФФ (проект № 17-11-01041), кроме леммы 5.1 о единственности слоения в окрестности предельного цикла, которая доказана при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90067. Авторы благодарят Починку Ольгу Витальевну за постановку задачи и внимательное прочтение рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. Smale S., Differentiable dynamical systems // Uspekhi Mat. Nauk. 1970. Vol. 25, No. 1. pp. 113–185.
3. Леонтович Е. А., Майер А. Г., О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 251–257.
4. Леонтович Е. А., Майер А. Г., О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 557–560.
5. Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds // Dynamical systems Proc. 1971. pp. 389–419. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3>
6. Ошемков А. А., Шарко В. В., О классификации потоков Морса-Смейла на трёхмерном многообразии // Математический сборник. 1998. Т. 189, №. 8. С. 93–140.
7. Пилюгин С. Ю. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 2. С. 245–254.
8. Пришляк А. О. Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трёхмерных многообразиях // Математические заметки 2002. Т. 71, №. 2. С. 254–260.
9. Починка О. В., Шубин Д. Д. Неособые потоки с динамикой аттрактор-репеллер на n -многообразиях // Nonlinearity (принято в печать).
10. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O., Shubin D. On Topological Classification of Gradient-like Flows on an n -sphere in the Sense of Topological Conjugacy // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. Vol. 25, No. 6. pp. 716–728. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354720060143>
11. Круглов В. Е., Починка О. В. Критерий и топологическая классификация потоков Морса-Смейла с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6. С. 835–850.

12. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω -устойчивых потоков // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 4. С. 434–441. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441>
13. Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 1031–1040.
14. Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacy and moduli of stability // Asterisque. 1978. Vol. 51. pp.335–346.
15. Irwin M. C. A classification of elementary cycles // Topology. 1970. Vol. 9 No. 1, pp. 35–47. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(70\)90047-9](https://doi.org/10.1016/0040-9383(70)90047-9)

*Поступила 01.12.2021; доработана после рецензирования 06.02.2022;
принята к публикации 24.02.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, “Rough systems”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **14**:5 (1937), 247–250.
2. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Uspekhi Mat. Nauk.*, **25**:1 (1970), 113–185.
3. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “About trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, **14**:5 (1937), 251–257.
4. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “On a scheme determining the topological structure of the separation of trajectories”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, **103**:4 (1955), 557–560.
5. M. Peixoto, “On the classification of flows on two manifolds”, *Dynamical systems Proc.*, 1971, 389–419. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3>
6. A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Matematicheskii sbornik*, **189**:8 (1998), 93–140.
7. S. Yu. Pilyugin, “Phase diagrams that determine Morse–Smale systems without periodic trajectories on spheres”, *Differential Equations*, **14**:2 (1978), 245–254.
8. A. O. Prishlyak, “Morse–Smale vector fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds”, *Mathematical Notes*, **71**:2 (2002), 254–260.
9. O. V. Pochinka, D. D. Shubin, “Vector Morse-Smale fields without closed trajectories on 3-dimensional manifolds”, *Nonlinearity*.

10. V. Kruglov, D. Malyshev, O. Pochinka, D. Shubin, “On topological classification of gradient-like flows on an n -sphere in the sense of topological conjugacy”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **25:6** (2020), 716–728. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354720060143>
11. V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, “Classification of the Morse - Smale flows on surfaces with a finite moduli of stability number in sense of topological conjugacy”, *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, **29:6** (2021), 835–850.
12. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, “Morse-Bott energy function for surface Ω -stable flows”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **22:4** (2020), 434–441. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441>
13. K. R. Meyer, “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031–1040.
14. J. A. Palis, “A differentiable invariant of topological conjugacy and moduli of stability”, *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.
15. M. C. Irwin, “A classification of elementary cycles”, *Topology*, **9:1** (1970), 35–47. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(70\)90047-9](https://doi.org/10.1016/0040-9383(70)90047-9)

Submitted 01.12.2021; Revised 06.02.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.