Математика

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.11-20
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.96

Единственность решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода

А. Асанов, К. Б. Матанова, Э. Абсамат кызы

Кыргызско-Турецкий университет «Манас» (г. Бишкек, Кыргызстан)

Аннотация. В данной работе исследован вопрос единственности решения для одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода. Особую роль в исследовании играет понятие производной по возрастающей функции, которое было введено А. Асановым в 2001 г. Это понятие является обобщением обычного понятия производной функции и является обратным оператором для одного класса интеграла Стилтьеса. На основе производной по возрастающей функции, методом интегральных преобразований и методом неотрицательных квадратичных форм доказаны теоремы единственности решения для рассматриваемого класса интегральных уравнений. Построены примеры, удовлетворяющие условиям теорем единственности. Из приведенных примеров видно, что без использования понятия производной по возрастающей функции трудно исследовать линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса первого и третьего рода.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса, третий род, производная по возрастающей функции, единственность решения

Для цитирования: Асанов А., Матанова К. Б., Абсамат кызы Э. Единственность решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 11–20. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.11-20

Об авторах:

Асанов Авыт, профессор, кафедра математики Кыргызско-Турецкого университета «Манас» (720044, Кыргызстан, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова, д. 56), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0608-0860, avyt.asanov@manas.edu.kg

Матанова Калыскан Базарбаевна, доцент, кафедра математики Кыргызско-Турецкого университета «Манас» (720044, Кыргызстан, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова, д. 56), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5350-5198, kalys.matanova@manas.edu.kg

Абсамат кызы Элиза, магистрант Института естественных наук, Кыргызско-Турецкий университет «Манас» (720044, Кыргызстан, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова, д. 56), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8470-7446, 2051y03002@manas.edu.kg

Original article

MSC2020 45A05

Uniqueness of the solution of one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind

A. Asanov, K. Matanova, E. Absamat kyzy

Kyrgyz-Turkish Manas University

Abstract. In this paper, the question of uniqueness of the solution for one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind is investigated. The notion of derivative with respect to an increasing function was introduced by A. Asanov in 2001 and plays special role in the study. This notion is a generalization of the usual concept of a derivative function and is an inverse operator for one class of the Stieltjes integral. Basing on idea of such derivative, using the method of integral transformations and the method of non-negative quadratic forms, the uniqueness theorems for the solution of the considered class of integral equations are proved. Examples satisfying the conditions of uniqueness theorems are also constructed in the paper. It becomes clear from these examples that it is difficult to study Volterra-Stieltjes linear integral equations of the first and third kind without using the notion of derivative with respect to increasing function.

Keywords: Volterra-Stieltjes integral equations, third kind, derivative with respect to an increasing function, uniqueness of solution

For citation: *A. Asanov, K. Matanova, E. Absamat kyzy.* Uniqueness of the solution of one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 11–20. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.11-20

About the authors:

Avyt Asanov, Professor, Department of Mathematics, Kyrgyz-Turkish Manas University (56 Chyngyz Aitmatov Av., Bishkek 720044, Kyrgyzstan), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0608-0860, avyt.asanov@manas.edu.kg

Kalyskan Matanova, Associate Professor, Department of Mathematics, Kyrgyz-Turkish Manas University (56 Chyngyz Aitmatov Av., Bishkek 720044, Kyrgyzstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5350-5198, kalys.matanova@manas.edu.kg

Eliza Absamat kyzy, Master student, Graduate School of Natural And Applied Sciences, Kyrgyz-Turkish Manas University (56 Chyngyz Aitmatov Av., Bishkek 720044, Kyrgyzstan), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8470-7446, 2051y03002@manas.edu.kg

1. Введение

Теоретическая часть и приложения интегральных уравнений исследовались во многих работах. В частности, в работе [1] приведен обзор результатов исследований интегральных уравнений Вольтерра второго рода. В работе [2] изучаются интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода с гладкими ядрами, где приводится доказательство существования многопараметрического семейства решений. В работе [3] исследованы линейные интегральные уравнения Фредгольма первого рода, для которых построены регуляризирующие операторы по Лаврентьеву. В работе [4] приводится теория и используются численные методы решения неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода с дифференцируемыми и отличными от нуля ядрами на диагонали. В работах [4–7] описано применение неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода к различным прикладным задачам. В работе [8] используется метод регуляризации М. М. Лаврентьева для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гладкими и отличными от нуля ядрами на диагонали дифференцируемыми решениями, для которых построено приближенное решение. В работах [9–10] получены достаточные условия единственности решений и исследованы вопросы регуляризации решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. В работе [11] доказывается теорема единственности решений и находится регуляризирующий оператор для решения системы линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. В работах [12–13] использован новый подход для исследования вопросов существования и единственности решений скалярных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями и их систем. В работе [14] исследованы интегральные уравнения Вольтерра первого рода. В [15] введено понятие производной по возрастающей функции, с помощью которого в работах [16–19] исследованы интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса и Фредгольма-Стильтьеса первого и второго рода.

2. Линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса третьего рода

Будем рассматривать уравнение

$$m(t)u(t) + \int_a^t K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{2.1}$$

где $m(t), \varphi(t), K(t,s)$ и $f(t)$ – известные функции, $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$, $m(t) \in C[a,b]$, $0 \leq m(t)$ при всех $t \in [a,b]$ и $m(t)$ равна нулю хотя бы в одной точке сегмента $[a,b]$, $u(t)$ – неизвестная функция. Здесь интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Пусть

$$K(t,s) = P(t)H(t,s)P(s), \quad (t,s) \in G = \{(t,s) : a \leq t \leq s \leq b\}, \tag{2.2}$$

где $P(t)$ и $H(t,s)$ – известные непрерывные функции соответственно на $[a,b]$ и G.

Пусть справедливы следующие условия

a) $P(t) \in C[a,b], P(t) \neq 0$ при почти всех $t \in [a,b]$, $H'_{\varphi(t)}(t,s)$ и $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)$ – непрерывные функции в области G, $H'_{\varphi(t)}(t,a)$ и $H'_{\varphi(t)}(b,t)$ - непрерывные функции в $[a,b]$, где

$$H'_{\varphi(t)}(t,s) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{H(t+\Delta,s) - H(t,s)}{\varphi(t+\Delta) - \varphi(t)},$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{H'_{\varphi(t)}(t,s+\Delta) - H'_{\varphi(t)}(t,s)}{\varphi(s+\Delta) - \varphi(s)};$$

б) $m(t) \geq 0,\ H(t,a) \geq 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,a) \leq 0, \forall t \in [a,b],\ H'_{\varphi(s)}(t,s) \geq 0,\ H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) \leq$ $\leq 0\ \ \forall (t,s) \in G$;

в) выполняется хотя бы одно из следующих условий:
   1) $m(t) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;
   2) $H(t,a) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;
   3) $H'_{\varphi(t)}(t,a) < 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;

г) выполняется хотя бы одно из следующих условий:
   1) $H'_{\varphi(t)}(b,t) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;
   2) $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) < 0$ при почти всех $(t,s) \in G$.

С учетом (2.2) уравнение (2.1) запишем в виде

$$m(t)u(t) + \int_a^t P(t)H(t,s)P(s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \ \ t \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Умножив на $u(t)$ уравнение (2.3) и проинтегрировав по Стилтьесу на отрезке $[a,t]$, $t \in [a,b]$ получим

$$\int_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \int_a^t \int_a^s P(s)H(s,\tau)P(\tau)u(\tau)u(s)d\varphi(\tau)d\varphi(s) = \int_a^t f(s)u(s)d\varphi(s).$$

Отсюда, используя обобщенную формулу Дирихле [16], запишем

$$\int_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \int_a^t \left[\int_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)\right] P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) = \int_a^t f(s)u(s)d\varphi(s). \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$Z(t,s) = \int_s^t P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau). \tag{2.5}$$

Тогда, согласно работе [16],

$$P(s)u(s)d\varphi(s) = -d_{\varphi(s)}Z(t,s), \tag{2.6}$$

$$P(t)u(t)d\varphi(t) = d_{\varphi(t)}Z(t,s), \tag{2.7}$$

$$Z(t,s)P(t)u(t)d\varphi(t) = \frac{1}{2}d_{\varphi(t)}Z^2(t,s), \tag{2.8}$$

$$Z(t,s)P(s)u(s)d\varphi(s) = -\frac{1}{2}d_{\varphi(s)}Z^2(t,s). \tag{2.9}$$

Учитывая соотношения (2.5)–(2.9) и применяя метод интегрирования по частям и обобщенную формулу Дирихле, для двойного интеграла из (2.4) имеем

$$\int\limits_a^t \int\limits_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) = \int\limits_a^t \left[\int\limits_\tau^t H(s,\tau)d_{\varphi(s)}Z(s,\tau)\right] P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) =$$

$$= \int\limits_a^t \left[H(s,\tau)Z(s,\tau)\,\Big|_{s=\tau}^{s=t} - \int\limits_\tau^t H'_{\varphi(s)}(s,\tau)Z(s,\tau)d\varphi(s)\right] u(\tau)P(\tau)d\varphi(\tau) =$$

$$= \int\limits_a^t H(t,\tau)Z(t,\tau)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) - \int\limits_a^t \int\limits_a^s H'_{\varphi(s)}(s,\tau)Z(s,\tau)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau)d\varphi(s) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_a^t H(t,\tau)d_{\varphi(\tau)}Z^2(t,\tau) + \frac{1}{2}\int\limits_a^t \int\limits_a^s H'_{\varphi(s)}(s,\tau)d_{\varphi(\tau)}Z^2(s,\tau)d\varphi(s) =$$

$$= \frac{1}{2}H(t,a)Z^2(t,a) + \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)Z^2(t,\tau)d\varphi(\tau) - \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)Z^2(s,a)d\varphi(s) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_a^t \int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)Z^2(s,\tau)d_\varphi(\tau)d\varphi(s).$$

Отсюда в силу (2.5) получим

$$\int\limits_a^t \int\limits_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) = \frac{1}{2}H(t,a)\left[\int\limits_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)\left[\int\limits_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int\limits_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_a^t \int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s) \quad (2.10)$$

Учитывая (2.10), из (2.4) имеем

$$\int\limits_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \frac{1}{2}H(t,a)\left[\int\limits_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)\left[\int\limits_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int\limits_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^t\int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s)=\int\limits_a^t f(s)u(s)d\varphi(s). \quad (2.11)$$

Таким образом, если $f(t)=0$ при всех $t\in[a,b]$, то в силу условия а), б) и в) из (2.11) получим:

$$\int\limits_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\equiv 0$$

или

$$\int\limits_s^t P(\xi)u(\xi)d\varphi(\xi)\equiv 0,\ \ t,s\in[a,b],\ s<t.$$

Отсюда $u(t)=0$ при всех $t\in[a,b]$. Тем самым доказана следующая

Т е о р е м а 2.1. *Если условия а), б) и в) выполнены, то уравнение (2.1) в пространстве $C[a,b]$ имеет не более одного решения.*

Подставив $t=b$ из (2.11), получим

$$\int\limits_a^b m(s)u^2(s)d\varphi(s)+\frac{1}{2}H(b,a)\left[\int\limits_a^b P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b H'_{\varphi(\tau)}(b,\tau)\left[\int\limits_\tau^b P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_a^b H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int\limits_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s)=\int\limits_a^b f(s)u(s)d\varphi(s). \quad (2.12)$$

Из (2.12) вытекает справедливость следующей теоремы:

Т е о р е м а 2.2. *Если условия а), б) и г) выполнены, то уравнение (2.1) в пространстве $C[a,b]$ имеет не более одного решения.*

3. Примеры

Приведем примеры, которые будут удовлетворять условиям сформулированных теорем о единственности решения интегральных уравунений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $P(t) = \sqrt[4]{t}$, $m(t) = t$, $H(t,s) = \dfrac{s}{1+\sqrt{t}}$.

Так как

$$H(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(s)}(t,s) = \frac{2\sqrt{s}}{1+\sqrt{t}},\ H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -\frac{2\sqrt{s}}{(1+\sqrt{t})^2},\ (t,s) \in G,$$

то все условия теоремы 2.1 выполняются.

П р и м е р 3.2. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(t) = \sqrt[3]{t}$, $P(t) = \sqrt[8]{t}$, $H(t,s) = \dfrac{\sqrt[3]{s^2}+1}{2+\sqrt[3]{t}}$,

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ t - \dfrac{1}{2}, & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Здесь

$$H(t,0) = \frac{1}{2+\sqrt[3]{t}},\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = -\frac{1}{(2+\sqrt[3]{t})^2},\ H'_{\varphi(s)}(t,s) = \frac{2\sqrt[3]{s}}{2+\sqrt[3]{t}},$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -\frac{2\sqrt[3]{s}}{(2+\sqrt[3]{t})^2},\ (t,s) \in G$$

и все условия теоремы 2.1 выполняются.

П р и м е р 3.3. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi(t) = \sin\sqrt{t}$, $P(t) = \sin 2\sqrt{t}$, $H(t,s) = \dfrac{\sin\sqrt{s}}{3+\sin\sqrt{t}}$,

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right], \\ t - \dfrac{\pi}{4}, & t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Для этого случая

$$H(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = 0,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$H'_{\varphi(s)}(t,s) = \frac{1}{3+\sin\sqrt{t}},\ H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -\frac{1}{(3+\sin\sqrt{t})^2},\ (t,s) \in G.$$

и, соответственно, все условия теоремы 2.2 выполняются.

П р и м е р 3.4. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(t) = \ln(1+\sqrt{t})$, $P(t) = \sqrt{t}$, $m(t) = t^2$, $H(t,s) = \ln^2(1+\sqrt{s})[1-\ln(1+\sqrt{t}]^2$. Так как

$$H(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(s)}(t,s) = 2\ln(1+\sqrt{s})[1-\ln(1+\sqrt{t}]^2,$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -4\ln(1+\sqrt{s})[1-\ln(1+\sqrt{t})],\ (t,s) \in G,$$

то все условия теоремы 2.1 выполняются.

Список литературы

1. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники Сер. «Мат. анализ». 1977. Т. 15. С. 131–198. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01844490

2. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журнал вычислит. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 4. С. 970–989.

3. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.

4. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 1943 с.

5. Апарцин А.С., Караулова И.В., Маркова Е.В., Труфанов В.В. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество. 2005. № 10. С. 69–75.

6. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Исследование тестовых уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 24–33. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33

7. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, Физматлит, 1983. 351 с.

8. Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15, № 4. С. 1053–1056.

9. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309, № 5. С. 1052–1055.

10. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады РАН. 2007. Т. 415, № 1. С. 14–17.

11. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады РАН. 2010. Т. 430, № 6. С. 1–4.

12. Иманалиев М.И., Асанов А., Асанов Р.А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 3. С.387–397

13. Asanov A., Matanova K., Asanov R. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind // Kuwait J. Sci. 2017. Vol. 44, No. 1. pp. 17–28.

14. Lamm P.K. A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations // Surveys on Solution Methods for Inverse Problems. Springer, Vienna, 2000. pp. 53–82. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6296-5_4

15. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. 2001. Т. 1, № 1. С. 18–67.

16. Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго и первого рода // Табигый илимдер журналы. 2002. № 2. С. 79–95.

17. Тойгонбаева А.К., Асанов А., Калимбетов Б. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода // Вестник Карагандинского университета. Сер. «Математика». 2012. Т. 68, № 4. С. 3-6.

18. Тойгонбаева А.К., Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода с разрывным ядром // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. 2012. Т. 45. С. 50-55.

19. Toigonbaeva A.K., Asanov A. The choice of regularization parameter of solutions of linear Fredgolm-Stieltjes integral equations of the first kind // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. № 6. С. 3-8.

Поступила 5.12.2021; доработана после рецензирования 14.02.2022;
принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Z. B. Tsalyuk, "Volterra integral equations", *J. Soviet Math.*, **12**:6 (1979), 715–758. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01844490

2. N. A. Magnitsky, "Linear Volterra integral equations of the first and third kinds", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **19**:4 (1979), 182–200. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90166-6

3. M. M. Lavrentyev, "Integral equations of the first kind", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **127**:1 (1959), 31–33 (In Russ.).

4. A. S. Apartsyn, *[Non-classical Volterra equations of the first kind: theory and numerical methods]*, Nauka, Novosibirsk, 1999 (In Russ.), 1943 p.

5. A. S. Apartsyn, I. V. Karaulova, E. V. Markova, V. V. Trufanov, "Application of Volterra integral equations for modeling strategies of power industry technical re-equipment", *Elektrichestvo*, 2005, no. 10, 69–75 (In Russ.).

6. A. S. Apartsyn, I. V. Sidler, "Study of test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **24**:2 (2018), 24–33 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33

7. V. M. Glushkov, V. V. Ivanov, V. M. Yanenko, *[Modeling of developing systems]*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 350 p.

8. A. M. Denisov, “On the approximate solution of the Volterra equation of the first kind”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **15**:4 (1975), 237–239. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(75)90185-8

9. M. I. Imanaliev, A. Asanov, “Solutions of system of nonlinear Volterra integral equations of the first kind”, *Soviet Math. Dokl.*, **309**:5 (1989), 1052–1055 (In Russ.).

10. M. I. Imanaliev, A. Asanov, “Regularization and uniqueness of solutions to systems of nonlinear Volterra integral equations of the third kind”, *Doklady Math.*, 2007, no. 76, 490–493. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562407040035

11. M. I. Imanaliev, A. Asanov, “Solutions to systems of linear Fredholm integral equations of the third kind”, *Doklady Math.*, 2010, no. 81, 115–118. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562410010321

12. M. I. Imanaliev, A. Asanov, R. A. Asanov, “On a class of systems of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind with multipoint singularities”, *Differential Equations*, 2018, no. 54, 381–391. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118030096

13. A. Asanov, K. B. Matanova, R. A. Asanov, “A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind”, *Kuwait J. Sci.*, **44**:1 (2017), 17–28.

14. P. K. Lamm, “A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations”, *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*, 2000, 53–82. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6296-5_4

15. A. Asanov, “The derivative of a function by means of an increasing function.”, *Manas Journal of Engineering*, **1**:1 (2001), 18–64 (In Russ.).

16. A. Asanov, “Volterra-Stieltjes integral equations of the second kind and the first kind”, *Manas Journal of Engineering*, **1**:2 (2002), 79–95 (In Russ.).

17. A. K. Toygonbaeva, A. Asanov, B. Kalimbetov, “On one class of Fredholm-Stiltjes linear integral equations of the first kind”, *Bulletin of Karaganda University: Mathematics Series*, **68**:4 (2012), 3–6 (In Russ.).

18. A. K. Toygonbaeva, A. Asanov, “On a class of systems of Fredholm-Stiltjes integral equations of the first kind with a discontinuous kernel”, *Studies on Integro-Differential Equations*, 2012, no. 45, 50–55 (In Russ.).

19. A. K. Toygonbaeva, A. Asanov, “The choice of regularization parameter of solutions of linear Fredgolm-Stieltjes integral equations of the first kind”, *New Technologies and Innovations of Kyrgyzstan*, 2019, no. 6, 3–8.

Submitted 5.12.2021; Revised 14.02.2022 Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.