

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.461–471

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9:532.5:539.3

## Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред

Ю. А. Тамарова, П. А. Вельмисов, Н. Д. Алексанин, Н. И. Нуруллин

*ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»  
(г. Ульяновск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Рассматриваются начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, представляющие собой математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления». В такой системе для ослабления воздействия виброускорений и высоких температур датчик с помощью трубопровода соединен с двигателем и располагается на некотором расстоянии от него. Механическая система «трубопровод – датчик давления» предназначена для измерения давления в газожидкостных средах, например, для контроля давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. На основе указанных моделей изучается совместная динамика упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Движение рабочей среды описывается линейными моделями механики жидкости и газа, для описания динамики упругого чувствительного элемента применяются линейные модели механики твердого деформируемого тела. Представлены аналитические и численные методы решения исследуемых начально-краевых задач. Численное исследование начально-краевой задачи проведено на основе метода Галеркина. При аналитическом исследовании с помощью введения усредненных характеристик решение исходной двумерной задачи сведено к исследованию одномерной модели, дальнейшее исследование которой позволило свести решение одномерной задачи к изучению дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Также проведен численный эксперимент и представлен пример расчета отклонения подвижного элемента датчика.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, аэроупругость, упругий элемент, датчик давления, динамический процесс, трубопровод

**Для цитирования:** Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461–471>

### 1. Введение

В связи с постоянным развитием техники необходимо улучшать и разрабатывать новые типы первичных преобразователей, а именно датчики давления [1–6], которые характеризуются в т. ч. аварийными режимами работы. Для получения максимально точных данных датчики рекомендуется размещать непосредственно на двигателе, но при этом на них воздействуют повышенные виброускорения и широкие диапазоны температур. Это приводит к ошибочным измерениям датчика и, в некоторых случаях, к поломке его упругого чувствительного элемента. Работа [7] посвящена влиянию на погрешность измерения датчика нестационарной температуры измеряемой среды. В работе [8] рассматриваются проблемы повышения устойчивости датчиков к вибрациям, выбора конструкционных и функциональных материалов.

Ввиду вышесказанного возникает важная проблема проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления». Задача заключается в получении системы дифференциальных уравнений, которая связывает закон изменения давления рабочей



среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого чувствительного элемента датчика (размещенного на выходе из трубопровода). Эти уравнения предназначены для расчета изменения давления в двигателе по величине деформации упругого элемента. В работах [9–10] представлены некоторые модели и методы исследования механической системы «трубопровод – датчик давления». В случае несжимаемости рабочей среды такие модели рассматривались в работах [11–15]. Некоторые двумерные и трехмерные модели механической системы «трубопровод – датчик давления» и методы их исследования указаны в работе [16].

В данной статье на основе двумерной плоской модели, представляющей собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Динамика чувствительного элемента описывается линейными моделями механики твердого деформируемого тела. Для описания движения рабочей среды применяются линейные модели механики жидкости и газа. Исследование предложенной начально-краевой задачи с помощью приближенного метода решения, основанного на введении усредненных характеристик, сведено к исследованию одномерной модели. Для полученной одномерной задачи проведено аналитическое исследование, позволяющее свести решение задачи к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего между собой величину перемещения чувствительного элемента датчика с законом изменения давления рабочей среды в двигателе.

Также предложена математическая постановка задачи для давления и проведено ее исследование на основе метода Галеркина.

## 2. Двумерная модель системы «трубопровод–датчик давления»

Рассмотрим математическую постановку начально-краевой задачи, описывающей двумерную плоскую модель механической системы «трубопровод–датчик давления»

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, h), \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(l, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.3)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.4)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, t) - P_* = L(w(y, t)), \quad y \in (0, h). \quad (2.5)$$

В уравнении (2.5) дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор  $L(w(y, t))$  задается в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например,

$$L(w(y, t)) = L^*(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}''' + f(\dot{w}, w). \quad (2.6)$$

В (2.1)–(2.6)  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с прямолинейными стенками  $y = 0$ ,  $y = h$ ;  $w(y, t)$  – деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P_0$ ,  $a_0$ ,  $\rho_0$  – давление, скорость звука, плотность, соответствующие состоянию покоя рабочей среды;  $P_*$  – внешнее воздействие на упругий элемент;  $P(y, t)$  – заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ;  $D$  и  $m$  – изгибная

жесткость и погонная масса упругого элемента;  $\beta$  - коэффициент внутреннего демпфирования;  $N$  - сжимающее (растягивающее) элемент усилие;  $f(\dot{w}, w)$  - некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации упругого элемента  $w(y, t)$  и скорости деформации  $\dot{w}(y, t)$ ; индексами  $x, y, t$  снизу обозначены частные производные по координатам  $x, y$  и времени  $t$ , точка сверху обозначает частную производную по  $t$ , штрих - частную производную по  $y$ .

Уравнение (2.1) описывает движение идеального газа в трубопроводе; условия (2.2)–(2.3) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.4) определяет закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.5) описывает динамику упругого элемента. Необходимо задать начальные условия для функций  $\varphi(x, y, t)$  и  $w(y, t)$ , а также граничные условия для функции деформации  $w(y, t)$  при  $y = 0, y = h$ , соответствующие типу закрепления концов упругого элемента (например,  $w = w_{yy} = 0$  для шарнирного закрепления,  $w = w_y = 0$  для жесткого защемления). Таким образом, имеем связанную краевую задачу для функций  $\varphi(x, y, t)$  и  $w(y, t)$ , которую следует дополнить начальными условиями.

Для решения задачи (2.1)–(2.5) введем усредненные характеристики основных величин системы

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \int_0^h \varphi(x, y, t) dy, & \xi(t) &= \int_0^h w(y, t) dy, \\ G(t) &= \int_0^h P(y, t) dy, & Q(w) &= \int_0^h L(w(y, t)) dy. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Интегрируя (2.1)–(2.5) по  $y$  в пределах от 0 до  $h$ , с учетом обозначений (2.7) и граничных условий (2.2), получим:

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \tag{2.8}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \tag{2.9}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \tag{2.10}$$

$$(P_0 - P_*)h - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w). \tag{2.11}$$

Пусть  $w(y, t) = g(y)\theta(t)$ ,  $w_0 = \int_0^h g(y) dy$ , где функция  $g(y)$  удовлетворяет граничным условиям в соответствии с типом закрепления концов упругого элемента (в частности, при шарнирном закреплении обоих концов элемента можно задать  $g(y) = \sin \frac{\pi y}{h}$ ). При этом  $\xi(t) = \theta(t) \cdot \int_0^h g(y) dy = w_0 \theta(t)$ .

В линейной модели оператор (2.6) принимает вид  $L(w(y, t)) = m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + \alpha\dot{w} + \gamma w$ , где  $\alpha, \gamma$  - коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. В этом случае

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \tag{2.12}$$

где  $m_0 = m \int_0^h g(y) dy$ ;  $\alpha_0 = \alpha \int_0^h g(y) dy + \beta \int_0^h g''''(y) dy$ ,

$$\gamma_0 = D \int_0^h g''''(y) dy + N \int_0^h g''(y) dy + \gamma \int_0^h g(y) dy.$$

В результате решение плоской двумерной задачи (2.1)–(2.5) сведено к изучению одномерной задачи (2.8)–(2.11) для функций  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $\xi(t) = w_0\dot{\theta}(t)$ , а  $Q(w)$  имеет вид (2.12).

### 3. Сведение решения задачи к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом

Общее решение волнового уравнения (2.8) записывается в виде

$$\Phi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right), \quad (3.1)$$

где  $A\left(t - \frac{x}{a_0}\right)$ ,  $B\left(t + \frac{x}{a_0}\right)$  – произвольные функции своих аргументов.

Удовлетворяя условиям (2.9) – (2.11), с учетом (3.1), получим

$$-\rho_0 [A'(t) + B'(t)] = G(t), \quad (3.2)$$

$$-A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = a_0 w_0 \dot{\theta}(t), \quad (3.3)$$

$$(P_0 - P_*)h - \rho_0 \left[ A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = Q(w). \quad (3.4)$$

Из (3.3)–(3.4) найдем

$$A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0} [(P_* - P_0)h + Q(w)] - \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}(t), \quad (3.5)$$

$$B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0} [(P_* - P_0)h + Q(w)] + \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}(t). \quad (3.6)$$

Согласно (3.5)–(3.6)

$$A'(t) = -\frac{1}{2\rho_0} \left[ (P_* - P_0)h + Q\left(\theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right) \right] - \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right), \quad (3.7)$$

$$B'(t) = -\frac{1}{2\rho_0} \left[ (P_* - P_0)h + Q\left(\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right) \right] + \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right). \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7)–(3.8) в (3.2), получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения  $\theta(t)$  чувствительного элемента датчика с законом изменения давления  $G(t)$  рабочей среды в двигателе:

$$Q\left(\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right) + Q\left(\theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right) - \rho_0 a_0 w_0 \left[ \dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2[G(t) + (P_0 - P_*)h]. \quad (3.9)$$

С учетом (2.12) уравнение (3.9) принимает вид

$$\begin{aligned} & m_0 \left[ \ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[ \dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \\ & + \gamma_0 \left[ \theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[ \dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = \\ & = 2[G(t) + (P_0 - P_*)h]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если  $l/a_0 = \varepsilon$  – малый параметр (например, для воздуха  $a_0 \approx 330$  м/с), то, проводя в (3.10) разложение по степеням  $\varepsilon$  и отбрасывая старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента  $t$ ), связывающее  $\theta(t)$  и  $G(t)$ :

$$(m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \left( m + \frac{\rho_0 w_0 l}{3} \right) \theta^{(4)}(t) + \alpha_0 \ddot{\theta}(t) + \gamma_0 \dot{\theta}(t) \right] + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*)h. \quad (3.11)$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно как искать классическими методами, так и исследовать численно.

#### 4. Математическая постановка и решение задачи для давления

Введем функцию  $z(x, t) = \Phi_t(x, t)$ , которая является представителем давления ( $P = P_0 - \rho_0 \Phi_t(x, t)$ ). Тогда система уравнений (2.8)–(2.12) примет вид

$$z_{tt} - a_0^2 z_{xx} = 0, \quad (4.1)$$

$$-\rho_0 z(0, t) = G(t), \quad (4.2)$$

$$z_x(l, t) = w_0 \ddot{\theta}(t), \quad (4.3)$$

$$Q(w) \equiv m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) = (P_0 - P_*)h - \rho_0 z(l, t). \quad (4.4)$$

Проведем численно-аналитическое исследование задачи (4.1)–(4.4) на основе метода Галеркина.

а) Функцию  $z(x, t)$  представим в виде ряда по полной на отрезке  $[0, l]$  системе функций  $s_n(x) = \sin \lambda_n x$ ,  $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям  $s_n(0) = 0$ ,  $s_n(l) = 0$ :

$$z(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{n=1}^{n_0} z_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (4.5)$$

Удовлетворяя условиям (4.2), (4.4), найдем:

$$a(t) = -\frac{1}{\rho_0} G(t), \quad b(t) = -\frac{1}{\rho_0 l} [Q(w) - (P_0 + P_*)h - G(t)]. \quad (4.6)$$

После подстановки (4.5)–(4.6) в (4.3) получим

$$Q(w) + \rho_0 l w_0 \ddot{\theta}(t) - \rho_0 l \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n z_n(t) \cos \lambda_n l = (P_0 - P_*)h + G(t). \quad (4.7)$$

Подставив (4.5)–(4.6) в уравнение (4.1) запишем:

$$(\ddot{Q}(w) - \ddot{G}(t))x + l\ddot{G}(t) - \rho_0 l \sum_{n=1}^{n_0} (\ddot{z}_n(t) + a_0^2 \lambda_n^2 z_n(t)) \sin \lambda_n x = 0. \quad (4.8)$$

Согласно методу Галеркина, проецируя уравнения (4.8) на систему базисных функций  $\{\sin \lambda_n x\}_{n=1}^{n_0}$ , получим:

$$\ddot{z}_n(t) + a_0^2 \lambda_n^2 z_n(t) = \frac{2}{\rho_0 l} \ddot{G}(t) \int_0^l \sin \lambda_n x dx + \frac{2}{\rho_0 l^2} [\ddot{Q}(w) - \ddot{P}(t)] \int_0^l x \sin \lambda_n x dx, \quad (4.9)$$

$$n = 1 \div n_0.$$

Таким образом, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7), (4.9) для неизвестных функций  $\theta(t)$  и  $z_n(t)$ , дополняя которую начальными условиями, имеем задачу Коши.

б) Функцию  $z(x, t)$  представим в виде ряда по полной на отрезке  $[0, l]$  системе функций  $s_n(x) = \sin \lambda_n x$ ,  $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям  $s_n(0) = 0$ ,  $s_n'(l) = 0$ :

$$z(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{n=1}^{n_0} z_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}. \quad (4.10)$$

Удовлетворяя условиям (4.2)–(4.3), найдем:

$$a(t) = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad b(t) = \ddot{w}(t). \quad (4.11)$$

Тогда, подставив (4.10)–(4.11) в уравнение (4.4), получим

$$\rho_0 w_0 l \ddot{\theta}(t) + \rho_0 \sum_{n=1}^{n_0} z_n(t) \sin \lambda_n l - (P_0 - P_*) h + Q(w) - G(t) = 0. \quad (4.12)$$

Подставив (4.10)–(4.11) в уравнение (4.1) и спроецировав невязку полученного уравнения на систему базисных функций  $\{\sin \lambda_n x\}_{n=1}^{n_0}$ , запишем:

$$\ddot{z}_n(t) + a_0^2 \lambda_n^2 z_n(t) + \frac{2w_0 \dots}{l} \ddot{\theta}(t) \int_0^l x \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\rho_0 l} \ddot{G}(t) \int_0^l \sin \lambda_n x dx, \quad n = 1 \div n_0. \quad (4.13)$$

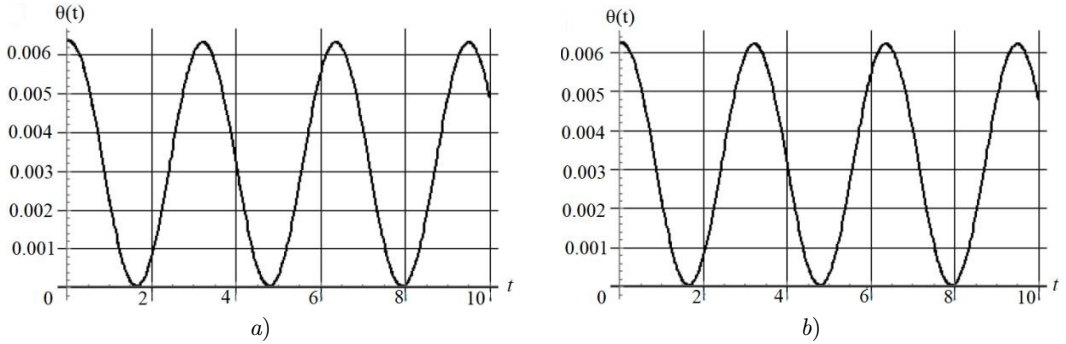
В результате имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.12)–(4.13) для неизвестных функций  $\theta(t)$  и  $z_n(t)$ , дополнив которую начальными условиями, получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 5. Численный эксперимент

В качестве примера рассмотрим механическую систему. Рабочая среда – воздух ( $\rho_0 = 1$ ). Пластина (упругий элемент) изготовлена из алюминия. Параметры системы:  $P_0 = P_* = 10^5$ ,  $a_0 = 331$ ,  $l = 5$ ,  $h = 0,05$ , толщина пластины  $h_{pl} = 0,001$ ,  $m = 2,7$ ,  $D = 6,596$ ,  $N = 1000$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,3$ ,  $\gamma = 0,2$  (все значения приведены в системе СИ);  $G(t) = 10^4(1 + \cos(2t))$ .

С помощью системы Mathematica численно получены решение уравнения (3.11), решение системы (4.7)–(4.9) и решение системы (4.12)–(4.13). При решении уравнения (3.11) начальные условия заданы в виде:  $\theta(0) = \frac{G(0)}{\gamma_0}$ ,  $\dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$ . Пример

расчета представлен на рисунке 5.1 а). Для расчета систем (4.7), (4.9) и (4.12), (4.13) начальные условия заданы в следующем виде:  $z_n(0) = \dot{z}_n(0) = 0, k = 1, 2, \dots, n_0, \theta(0) = \frac{G(0)}{\gamma_0}, \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$ . На рисунке 5.1,б) представлены примеры расчетов только для системы (4.7), (4.9) при  $n_0 = 10$ , т. к. численные расчеты для системы (4.12)–(4.13) полностью идентичны.



**Рис. 5.1.** График деформации подвижного элемента датчика: а) решение уравнения (3.11); б) решение методом Галеркина

**Fig 5.1.** The graph of the deflection of the moving element of the sensor: a) the solution of equation (3.11); b) the solution by the Galerkin method.

Из Рис. 5.1 а)-б) видно, что решение задачи для давления (4.1)–(4.4), построенное с помощью метода Галеркина (Рис. 5.1 б), достаточно точно согласуется с численным решением уравнения (3.11) (Рис. 5.1 а).

**Благодарности.** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проект № 18-41-730015).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.
2. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления // Измерительная техника. 2008. №3. С. 26–30.
3. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. / Ж. Аш [и др.] ; пер. с фр. М.: Мир, 1992.
4. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Н. Машиностроение, 1965. 928 с.
5. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. 264 с.
6. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.

7. Белозубов Е. М., Мокров Е. А., Тихомиров Д. В. Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // Датчики и системы. 2004. №1. С.26–29.
8. О конструктивно-технологическом совершенствовании тензорезисторных тонкопленочных датчиков давлений / Е. А. Мокров [и др.] // Датчики и системы. 2008. № 6. С.2–7.
9. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» / А. В. Анкилов [и др.]. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
10. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ. 2018. 152 с.
11. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическая модель системы «трубопровод – датчик давления» // Механика и процессы управления: сб. науч. тр. Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 9–15.
12. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» // Датчики и системы. 2003. № 6(49). С. 12–15.
13. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод - датчик давления» // Журнал Средневожского математического общества. 2010. Т. 12, №4. С.85–93.
14. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353, 012085, pp.1–6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.
15. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings 2172, 030006 (2019). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>.
16. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневожского математического общества. 2020. Т. 22, №3. С.352–367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>

*Поступила 9.09.2021; доработана после рецензирования 25.11.2021  
принята к публикации 16.11.2021*

*Информация об авторах:*

**Тамарова Юлия Александровна**, соискатель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, [kazakovau@mail.ru](mailto:kazakovau@mail.ru)

**Вельмисов Петр Александрович**, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)



**Алексанин Николай Дмитриевич**, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9586-6506>, [nickx73@yandex.ru](mailto:nickx73@yandex.ru)

**Нуруллин Наиль Ильдарович**, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7095-426X>, [yehekkbyu@mail.ru](mailto:yehekkbyu@mail.ru)

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Original article*

MSC2020 35Q35, 35Q74, 65M06

## Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media

Yu. A. Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin

*Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

**Abstract.** Initial-boundary value problems for systems of differential equations are considered, which are mathematical models of the mechanical system "pipeline - pressure sensor". In such a system, to mitigate the effects of vibration accelerations and high temperatures, the sensor is located at a certain distance from the engine and is connected to it via a pipeline. The "pipeline - pressure sensor" system is designed to measure pressure in gas-liquid media, for example, to control the pressure of the working medium in the combustion chambers of engines. On the basis of the proposed models, the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline is studied. To describe the motion of the working medium, linear models of fluid and gas mechanics are used, to describe the dynamics of a sensitive element, linear models of the mechanics of a deformable solid are applied. Analytical and numerical methods for solving initial-boundary value problems under study are presented. The numerical study of the initial-boundary value problem was carried out on the basis of the Galerkin method. In analytical study using the introduction of averaged characteristics, the solution of the original two-dimensional problem is reduced to the study of a one-dimensional model, whose further study made it possible to reduce the solution of the problem to the study of a differential equation with a deviating argument. Also, a numerical experiment is carried out and an example of calculating the deflection of the sensor's moving element is presented.

**Key Words:** differential equations, aeroelasticity, elastic element, pressure sensor, dynamics, pipeline

**For citation:** Yu. A. Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin. Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 461–471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461-471>

## REFERENCES

1. L. G. Etkin, [*Vibration sensors. Theory and practice*], Publishing House of Moscow State Technical University. N.E. Bauman, Moscow, 2004 (In Russ.), 408 p.
2. A. A. Kazaryan, G. P. Groshev, "[Universal pressure sensor]", *Measuring Equipment*, **3** (2008), 26–30 (In Russ.).

3. J. Ash et al, [*Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 2.*], Mir Publ., Moscow, 1992 (In Russ.).
4. D. I. Agejkin, E. N. Kostina, N. N. Kuznecova, [*Sensors of control and regulation*], Mashinostroyeniye Publ., M., 1965 (In Russ.), 928 p.
5. V. P. Korsunov, [*Elastic sensitive elements*], Publishing House of the Saratov University, Saratov, 1980 (In Russ.), 264 p.
6. L. E. Andreeva, [*Elastic elements of devices. 2nd ed.* ], Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1981 (In Russ.), 392 p.
7. E. M. Belozubov, E. A. Mokrov, D. V. Tihomirov, “[Minimizing the error of thin-film strain gauge pressure sensors when exposed to non-stationary temperature]”, *Sensors and systems*, **1** (2004), 26–29 (In Russ.).
8. E. A. Mokrov, D. V. Lebedev, V. P. Bazaev, E. V. Efremov, I. A. Semina, P. A. Kolchin, “[On the design and technological improvement of strain gauge thin-film pressure sensors]”, *Sensors and Systems*, **6** (2008), 2–7 (In Russ.).
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokononko, Yu. V. Pokladova, [*Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”*], UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2008 (In Russ.), 188 p.
10. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, [*Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems*], UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2018 (In Russ.), 152 p.
11. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokononko, Yu. A. Reshetnikov, “[Mathematical model of the "pipeline - pressure sensor" system]”, *Mechanics and control processes: collection of scientific papers*, 2002, 9–15.
12. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokononko, Yu. A. Reshetnikov, “[Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”]”, *Sensors and Systems*, **6**:49 (2003), 12–15 (In Russ.).
13. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, E. S. Serebryannikova, “[Mathematical modeling of the system “pipeline - pressure sensor”]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **12**:4 (2010), 85–93 (In Russ.).
14. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353** (2019), 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
15. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, U. J. Mizher, “Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor””, *AIP Conference Proceedings*, **2172** (2019). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>
16. P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, “[Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **22**:3 (2020), 352–367 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>

*Submitted 9.09.2021; Revised 25.11.2021; Accepted 16.11.2021*

*Information about the authors:*

**Yuliya A. Tamarova**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, [kazakovau@mail.ru](mailto:kazakovau@mail.ru)

**Petr A. Velmisov**, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

**Nikolai D. Aleksanin**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9586-6506>, [nickx73@yandex.ru](mailto:nickx73@yandex.ru)

**Nail I. Nurullin**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7095-426X>, [yehekkby@mail.ru](mailto:yehekkby@mail.ru)

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* the author declare no conflict of interest.