

Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью

М. Е. Ладонкина^{1, 2}, Ю. А. Повещенко^{1, 2}, О. Р. Рагимли¹, Х. Чжан^{1, 2}

¹ *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)*

² *Московский физико-технический институт (г. Долгопрудный, Российская Федерация)*

Аннотация. Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных построено семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами. Значительное внимание в работе уделено способам конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности разностных схем данного класса, анализу их амплитуды и возможности их использования на неравномерных сетках. Эффективное сохранение баланса внутренней энергии в данном типе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих «вычислительную» энтропию (в т. ч. на сингулярных особенностях решения). Разработанные схемы несложно обобщить с целью расчета высокотемпературных течений в средах, неравновесных по температуре (например, в плазме при различии температур электронной и ионной компонент), когда при необходимом для описания течения наборе переменных недостаточно одного уравнения баланса полной энергии.

Ключевые слова: полностью консервативная разностная схема, метод опорных операторов, газовая динамика

Для цитирования: Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью // Журнал Средневожского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412–423>

1. Введение

Как показала практика, принцип полной консервативности [1] является одним из весьма эффективных критериев качества разностных схем, возникающих при численном моделировании движений сплошной среды. Проблема построения двухслойных по времени разностных схем, удовлетворяющих этому принципу, была решена в [2] для случая лагранжева описания движения среды. Определенные трудности возникли при попытке построить такие схемы для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных. В [3] было рассмотрено весьма широкое семейство двухслойных разностных схем и показано, что оно не содержит полностью консервативной. В работе [4] была построена трехслойная полностью консервативная схема. На случай пространственных течений она была обобщена в [5].

Настоящая работа является естественным продолжением [6–8] с использованием операторного подхода [9–11] и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности системы. В ней работа сил термодинамического сжатия связана с дивергентным сжатием



вещества, интерполяция по времени скоростей движения которого использует технику профилирования временных весов по пространству.

Сами же интерполяционные веса связаны с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Такая нелинейная аппроксимация скоростей частиц в узлах разностной сетки (зависящая от массы этих частиц) обеспечивает одновременно две вещи. Во-первых, она сохраняет внутреннюю энергию в данном типе дивергентных разностных схем, что обеспечивается отсутствием постоянно действующих аппроксимационных источников разностного происхождения в уравнении внутренней энергии, производящих «вычислительную» энтропию, в т. ч. на сингулярных особенностях решения (например, на расходящихся центрированных волнах разрежения). Во-вторых, эта аппроксимация для узловых частиц переменной массы обеспечивает одновременный согласованный баланс их импульса и кинетической энергии с учетом массоперетоков в движущейся среде. Наконец она является простой в реализации и имеет второй порядок аппроксимации.

Также в работе предложена естественная регуляризация потоков массы, импульса и внутренней энергии системы, не нарушающая свойств полной консервативности разностных схем данного класса. Исследована амплитуда этих потоков на явном и неявном слоях по времени, а также допустимость их адаптивного использования на сетках переменной структуры. Адаптивное включение искусственной вязкости могут производиться, следуя, например, [12], но не для схемы Лакса-Вендрофа, а для данного класса двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС).

2. Постановка задачи

Рассмотрим течение газа в системе координат Эйлера. Пусть $\vec{\mu}$ – скорость течения. Плотность потока массы обозначим $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$ (ρ – плотность среды). Тогда система уравнений Эйлера для течения среды имеет вид:

$$\frac{D}{Dt}(dM) = -dV \operatorname{div} \vec{\mu}, \quad (2.1)$$

$$\frac{D}{Dt}(\vec{u}dM) = -dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div}(\vec{\mu} \vec{u}) + d\vec{f} \quad (2.2)$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) = -PdV \operatorname{div} \vec{u} - dV \operatorname{div}(\vec{\mu} \varepsilon) + dQ, \quad (2.3)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}dM\right) = -\vec{u}dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div}\left(\vec{\mu} \frac{\vec{u}^2}{2}\right) + \vec{u}d\vec{f}, \quad (2.4)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2}\right)dM\right) = -dV \operatorname{div}(P\vec{u}) - dV \operatorname{div}\left(\vec{\mu}\left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2}\right)\right) + \vec{u}d\vec{f} + dQ, \quad (2.5)$$

где P – давление; ε – удельная внутренняя энергия.

Здесь формула (2.3) представляет собой закон сохранения внутренней энергии; (2.4) – закон сохранения кинетической энергии; (2.5) – закон сохранения полной энергии.

Мы воспользовались очевидным тождеством:

$$\vec{u} \frac{D}{Dt}(\vec{u}dM) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}dM\right) + \frac{\vec{u}^2}{2} \frac{D}{Dt}dM.$$

Здесь считается, что частица среды массой dM , заключена в объем dV , через границы которого протекает поток массой $\vec{m}\vec{u}$, несущий импульс $\vec{m}\vec{u} \cdot \vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{m}\vec{u}\vec{E}$.

3. Полностью консервативная дифференциально разностная схема (ПКРС)

Опуская исходную систему Эйлеровых уравнений для течения среды (см. [2; 13–14]), сразу запишем соответствующую двухслойную по времени ПКРС в переменных Эйлера. На Рис. 3.1 представлена разностная сетка, ω – узлы разностной сетки, Ω – её ячейки. Термодинамические величины ρ, ε, P будем относить к объёмам ячейки V и её массу $M = \rho v$ – к ячейкам Ω . Будем относить скорость \vec{u} , приузловые массу m и объём v к узлам ω .

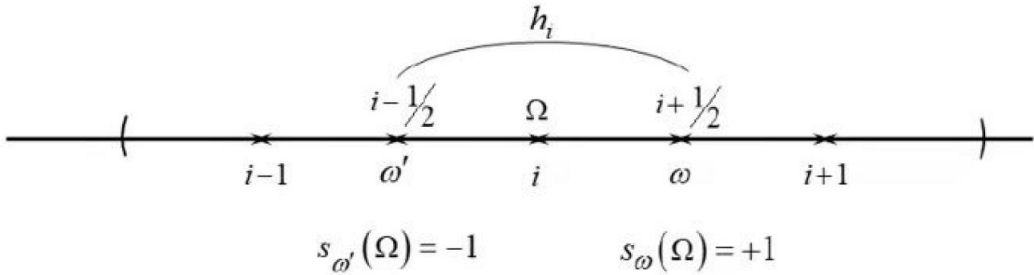


Рис. 3.1. Разностная сетка
Fig 3.1. Difference grid

Справедливы равенства:

$$m_\omega = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} M_\Omega, \quad V_\Omega = h_i, \quad \nu_\omega = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} V_\Omega = h_{i+0.5}, \quad \mu_D^\omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} \mu_\omega^\omega, \quad \rho_{\nu\omega} = \frac{m_\omega}{\nu_\omega} = \rho_{\nu i+\frac{1}{2}},$$

где μ_ω^ω – введенный узловый поток массы; μ_D^ω – введенный ячейечный поток массы. Под отнесенным к узлу импульсом будем понимать величину $I_\omega = \rho_{\nu\omega} u_\omega$.

Дальше для континуальных операций векторного анализа $div \vec{u}, grad P, div(\vec{\mu} \cdot \vec{u})$, введем их разностные аналоги $DIV : (\omega) \rightarrow (\Omega), GRAD : (\Omega) \rightarrow (\omega)$, и для аппроксимации процессов переноса $DIV_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), DIT_D : (\Omega) \rightarrow (\omega)$. Операция DIT_D используется для аппроксимации переноса импульса в уравнении (2.2) и является тензорной.

Соответственно найдём:

$$DIV \vec{u} = \frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} s_\omega(\Omega) \mu_D(\Omega), \quad GRAD P = \frac{\Delta P}{\nu}, \quad \text{где } \Delta P = - \sum_{\Omega(\omega)} s_\omega(\Omega) P_\Omega + S_{\partial\omega} P_{\partial\omega},$$

$$DIV_D \vec{\mu}_D = -\frac{1}{\nu} \sum_{\omega(\Omega)} s_\omega(\Omega) \mu_D(\Omega), \quad DIT_D(\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = -\frac{1}{\nu} \sum_{\omega(\Omega)} s_\omega(\Omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega).$$

В выражении для ΔP , если узел $\omega = \partial\omega$ – граничный, добавлено слагаемое с величиной $P_{\partial\omega}$ на границе и знаковой функцией $S_{\partial\omega} = \pm 1$, в зависимости от направления граничной нормали.

Выпишем [2] в переменных Эйлера:

$$m_t = -\nu \text{DIV}_D \vec{\mu}_D^\sim, \tag{3.1}$$

$$(mu)_t = -\nu \text{GRAD } P^\sim - \nu \text{DIT}_D(\vec{\mu}_D^\sim \cdot \vec{u}_D^\sim), \tag{3.2}$$

$$(M\varepsilon)_t = -P^\sim V \text{DIV } \vec{u}^\sim - V \text{DIV}[(\rho\varepsilon \vec{u})^\sim], \tag{3.3}$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu(u^\sim, \text{GRAD } P^\sim - \nu \text{DIV}_D(\vec{\mu}_D^\sim \frac{\vec{u}_D^2}{2})). \tag{3.4}$$

Под $\vec{\mu}_{E\omega} = (\rho\varepsilon \vec{u})_\omega$ понимаем некоторую аппроксимацию потока внутренней энергии в узле ω . Также в ячейке, обозначенной узлами ω и ω' , введём величины:

$$\vec{u}_D^\sim = \frac{1}{2}(\vec{u}_\omega^{\delta\omega} + \vec{u}_{\omega'}^{\delta\omega'}), \quad \vec{u}_D^{2\sim} = \frac{1}{2}(\vec{u}_\omega^{\delta\omega}, \vec{u}_{\omega'}^{\delta\omega'}).$$

На временных слоях t и $\hat{t} = t + \tau$ введём разностные производные по времени и пространственно-точечные (т. е. в узлах сетки ω) временные интерполяции: $a_t = (\hat{a} - a)/\tau$, $a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1 - \delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может быть связан с узлом пространственной сетки ω , например, по закону $\delta = \sqrt{\hat{m}}/(\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$.

Также под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a, \hat{a} между слоями t и \hat{t} будем обозначать сеточную величину a^\sim .

4. Аппроксимация и введение искусственной вязкости

Введем одномерную неравномерную сетку по ячейкам $\Omega_i \cup \partial\Omega$ и узлам $\omega_{i+0.5} \cup \partial\omega$ вдоль пространственной переменной $x_{i+0.5}$.

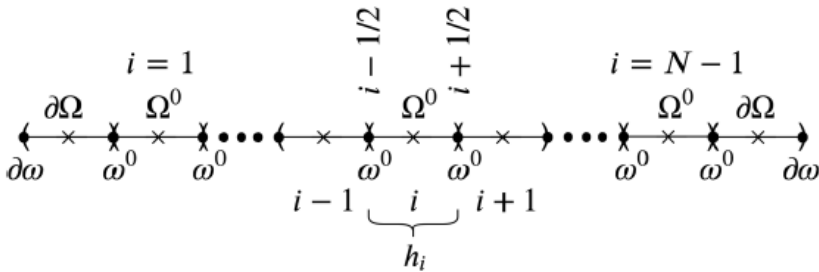


Рис. 4.1. Неравномерная сетка
Fig 4.1. Irregular mesh

Здесь символ ∂ идентифицирует граничные ячейки и узлы: $\omega^0 = \omega/\partial\omega$, $\Omega^0 = \Omega/\partial\Omega$. Уравнения для плотности ρ и внутренней энергии E можно привести к виду:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, i = \overline{1, N-1},$$

$$y_0 = a_1 y_1 + b_1; y_N = a_2 y_{N-1} + b_2$$

и далее решать модифицированным методом Ньютона в сочетании с алгоритмом прогонки. В уравнениях (2.1)–(2.4) в правой части неявность заложена в узловых и ячейочных массовых потоках. После применения метода Ньютона и вводя обозначения для приращений $\delta y_i = y_i^{s+1} - y_i^s$, опуская выкладки, сразу выпишем прогоночные коэффициенты (A, B, C, F) для ρ -, u - и E - интерационных групп. Верхним символом \approx

указываем, что зависимость величины на неявном слое по времени \hat{t} берётся на известной s -й итерации.

$$A_{\rho i} = \beta_{i-0.5} h_{i-0.5}, \quad B_{\rho i} = \beta_{i+0.5} h_{i+0.5}, \quad C_{\rho i} = h_i + A_{\rho i} + B_{\rho i}, \quad F_{\rho i} = -f_{\rho i}^{\approx}.$$

Аналогично для скорости u уравнения принимают вид:

$$A_{ui+0.5} \delta_{\Delta} u_{i-0.5} + B_{ui+0.5} \delta_{\Delta} u_{i+1.5} = -F_{ui+0.5},$$

где

$$\begin{aligned} A_{ui+0.5} &= \left\{ -\tau \left\{ - \left[-\beta_i \frac{h_i}{\tau} (-\rho_{\nu i-0.5}^{s+1}) \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. -\tau \left[-\frac{1}{2} \left\{ -[K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] + [-K_{i-0.5}(\rho_i^{s+1} - \rho_{i-1}^{s+1})] \right\} \frac{1}{2} \{ \delta_{i-0.5}^{s+1} \} \right] \right\} / \rho_{\nu i-0.5}^{s+1}, \\ C_{ui+0.5} &= \left\{ m_{i+0.5}^{s+1} + \tau \left\{ \left[-\beta_{i+1} \frac{h_{i+1}}{\tau} (-\rho_{\nu i+0.5}^{s+1}) \right] - \left[-\beta_i \frac{h_i}{\tau} (\rho_{\nu i+0.5}^{s+1}) \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. +\tau \left[\frac{1}{2} \left\{ [-K_{i+1.5}(\rho_{i+2}^{s+1} - \rho_{i+1}^{s+1})] + [-K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] \right\} \frac{1}{2} \{ \delta_{i+0.5}^{s+1} \} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2} \left\{ [-K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] + [-K_{i-0.5}(\rho_i^{s+1} - \rho_{i-1}^{s+1})] \right\} \frac{1}{2} \{ \delta_{i+0.5}^{s+1} \} \right\} \right\} / \rho_{\nu i+0.5}^{s+1}, \\ B_{ui+0.5} &= \left\{ -\tau \left\{ \left[-\beta_{i+1} \frac{h_{i+1}}{\tau} (-\rho_{\nu i+1.5}^{s+1}) \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. -\tau \left[\frac{1}{2} \left\{ -[K_{i+1.5}(\rho_{i+2}^{s+1} - \rho_{i+1}^{s+1})] + [-K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] \right\} \frac{1}{2} \{ \delta_{i+1.5}^{s+1} \} \right] \right\} / \rho_{\nu i+1.5}^{s+1}, \\ f_{ui+0.5} &= -f_{ui+0.5}^{\approx}, \quad K_{i+0.5} = \beta_{i+0.5} \frac{h_{i+0.5}}{\tau}. \end{aligned}$$

Для внутренней энергии E :

$$A_{Ei} = \beta_{Ei-0.5} h_{i-0.5}, \quad B_{Ei} = \beta_{Ei+0.5} h_{i+0.5}, \quad C_{Ei} = h_i + A_{Ei} + B_{Ei}, \quad F_{Ei} = -f_{Ei}^{\approx},$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} f_{\rho i} &= h_i(\hat{\rho}_i - \rho_i) + \tau(\mu_{i+0.5}^{\approx} - \mu_{i-0.5}^{\approx}), \\ f_{u_{i+0.5}} &= (I_{i+0.5} - I_{i+0.5}) + \tau \left\{ (P_{i+1}^{\approx} - P_i^{\approx}) + [\mu_{D_{i+1}}^{\approx} u_{D_{i+1}}^{\approx} - \mu_{D_i}^{\approx} u_{D_i}^{\approx}] \right\}, \\ f_{Ei} &= h_i(\hat{E}_i - E_i) + \tau \left\{ [P_i^{\approx}(u_{i+0.5}^{\approx} - u_{i-0.5}^{\approx})] + [\mu_{E_{i+0.5}}^{\approx} - \mu_{E_{i-0.5}}^{\approx}] \right\}, \\ \delta_{\Delta} u_{i+0.5} &= \rho_{\nu i+0.5}^{s+1} \delta u_{i+0.5}, \quad \delta_{i+0.5}^{s+1} = \sqrt{m_{i+0.5}^{s+1}} / (\sqrt{m_{i+0.5}^{s+1}} + \sqrt{m_{i+0.5}}). \end{aligned}$$

Здесь β – коэффициент адаптивного вязкого накопления. В выражении $f_{ui+0.5}^{\approx}$ и для членов $p(\rho^{s+1}, E)$ и $\delta(\rho^{s+1})$ в скоростной группе на неявном слое по времени ρ берётся на $(s+1)$ -й итерации, а u и E – на s -й итерации. Также в блоке вычисления энергии для f_{Ei}^{\approx} , $p(\rho^{s+1}, E)$ и $\delta(\rho^{s+1})$ на неявном слое по времени, ρ берётся на $s+1$ итерации.

Адаптивная вязкость с коэффициентами $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$ представлена в уравнениях (2.1)–(2.4) в узловых массовых потоках $\mu_{\omega} = u_{\omega} \rho_{\omega} - (\nu \cdot \text{GRAD} \rho)_{\omega}$, где ρ_{ω} – узловая аппроксимация плотности, как добавка к переносимой внутренней энергии в узлах $\mu_{E\omega} = (\rho \varepsilon \vec{u})_{\omega} - (\nu_E \cdot \text{GRAD} E)_{\omega}$ и как добавка к давлению $P_{\Omega} - (\nu_I \text{DIV}(\rho_{\nu}^{s+1} \vec{u}))$. Эти вязкости пропорциональны $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$, берутся на неявном слое по времени \hat{t} , в то время, как другие слагаемые берутся с симметричной по времени аппроксимацией с весом 0.5.

Коэффициенты вязкой диффузии выбираются следующим образом:

$$\left(\frac{\nu}{h}\right)_\omega = \beta_\omega \frac{h_\omega}{\tau}, \quad \left(\frac{\nu_E}{h}\right)_\omega = \beta_{E\omega} \frac{h_\omega}{\tau}, \quad \left(\frac{\nu_I}{h}\right)_\Omega = \beta_\Omega \frac{h_\Omega}{\tau},$$

где $\beta_\omega = I_{\nu\omega}^\approx q^{n\nu\omega} kr_\omega$, $\beta_\Omega = I_{u\Omega}^\approx q^{n\nu\Omega} kr_\Omega$.

Здесь числа Куранта в узлах и ячейках введены как $kr_\omega = \frac{|u_\omega| + \varepsilon}{2} \frac{\tau}{h_\omega}$, $kr_\Omega = \frac{\|u_\Omega^\approx\| + \varepsilon}{2} \frac{\tau}{h_\Omega}$; ε – малая добавка к числу Куранта, существенная на близком к нулю скоростном на фоне; u_Ω^\approx – ячеечная интерполяция скорости на известной s -й итерации. Понимая под вязким накоплением β в схеме величину $\{\beta_\omega, \beta_{E\omega}, \beta_\Omega\}$, а под коэффициентом вязкости ν – одну из величин $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$ и $I^\approx = \{I_\omega^\approx, I_{E\omega}^\approx, I_\Omega^\approx\}$, кратко можно записать так:

$$\frac{\nu}{h} = \beta \frac{h}{\tau}, \quad \beta = l^\approx q^n kr, \quad kr = \frac{|u| + \varepsilon}{2} \frac{\tau}{h}, \quad q > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В коэффициенты адаптивного вязкого накопления β входит шаблонный сеточный функционал I^\approx , равный 1 при наличии искусственной вязкости или 0 при отсутствии её, в зависимости от критерия монотонизации плотности ρ , внутренней энергии E и импульса $I = \rho_\nu u$ в соответствующих узлах ω и ячейках Ω .

При начальном локальном включении искусственной вязкости (из-за возникающей немонотонности) полагается $I^\approx = 1$, $n = 1$, что соответствует «вязкой» аппроксимации соответствующего процесса переноса. Далее, локально, вязкое накопление β может увеличиваться с возрастанием ν . Заметим, что величины h , β , I^\approx , n , kr имеют пространственно-локальный смысл, в то время как величины q и значения лимитеров $\beta_0 = \{\beta_{\omega 0}, \beta_{E\omega 0}, \beta_{\Omega 0}\} (\beta < \beta_0)$ для плотности, внутренней энергии и импульса являются глобальными по всей сетке атрибутами задачи.

5. Об устройстве итерационного ПКРС алгоритма

В используемом итерационном алгоритме для вычисления приращений физических величин на неявном слое по времени, помимо нестационарных членов, в уравнениях (2.1) – (2.3) на неявной $(s + 1)$ -й итерации берутся только члены, пропорциональные вязкостям $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$. Поэтому сходимость итерационного алгоритма определяется числами Куранта kr , связанными с его явной итерационной частью. Корректность коэффициентов A , B , C в отдельных прогонках для приращений $\delta\rho$, $\delta_\Delta u$, δE определяется вязкими накоплениями $\{\beta_\omega, \beta_{E\omega}, \beta_\Omega\}$. Таким образом, на каждой s -й итерации алгоритм состоит из трех зависимых друг от друга групп. Дополнительно для каждой группы работают специальные блоки для монотонизации (сглаживания) решения. В каждой из групп должны выполняться необходимые условия неотрицательности ($A \geq 0$, $B \geq 0$, $C > 0$) и диагонального преобладания ($C - A - B > 0$) коэффициентов прогонки.

Перед начальной итерацией ($s = 0$) локально по сетке устанавливаются $l^\approx \equiv 0$, $k \equiv 1$. Здесь управляющий параметр $k = \{k_{\nu\omega}, k_{\nu E\omega}, k_{\nu\Omega}\}$ локально в соответствующем узле или ячейке может принимать три значения:

- 1) $k = 1$ – изменение соответствующего β разрешено;
- 2) $k = 0$ – возможно только уменьшать β ;
- 3) $k = -1$ – доступно только для чтения.

Перед последующими итерациями ($s > 0$), если локально $k \geq 0$, то устанавливается соответствующие $l^\approx \equiv 0$, $k \equiv 1$. Иначе (при $k = -1$) соответствующие величины l^\approx и β не изменяются.

Блок-схема s -й итерации состоит из групп:

$(\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_\rho - \text{накопитель} \rangle), \langle \beta_{\rho u} - \text{корректор} \rangle,$
 $((\langle u^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_{\rho u} - \text{накопитель} \rangle), (E^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_E - \text{накопитель} \rangle).$
 $\{ \langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle: \langle \text{вычисление плотности } \rho \text{ на } (s+1)\text{-м слое} \rangle \}.$

$\{ \langle \beta_\rho - \text{накопитель} \rangle: \langle \text{формируется адаптивное вязкое накопление } \beta_\omega, \text{ не превышающее лимитера } \beta_{\rho 0}, \text{ и управляющим параметром } k_{\nu\omega} \text{ при } \beta_\omega = \beta_{\rho 0} \text{ (с повторяющимися } \langle \rho^{s+1} - \text{расчетами} \rangle), \text{ так что в результате отсутствует немонотонность в профиле } \rho^{s+1} \rangle \}.$

$\{ \langle \beta_{\rho u} - \text{корректор} \rangle:$

$\langle 1. \text{ Обеспечивает выполнение диагонального преобладания } D_{ui+0.5} = C_{ui+0.5} - A_{ui+0.5} - B_{ui+0.5} > 0 \text{ в узлах } \omega \text{ с возможным пропорциональным уменьшением шага по времени } \tau \text{ и всех вязких накоплений } \beta. \text{ При уменьшении шага по времени в узлах } \omega, \text{ где было нарушено условие } D_{ui+0.5} > 0 \text{ устанавливается } k_{\nu\omega} = -1, \text{ величинам } \rho, u \text{ и } E \text{ на } s\text{-й итерации присваиваются значения с явного } t \text{ слоя и выполняется возврат на } \langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle;$

$\langle 2. \text{ Если в ячейках } (\Omega(\omega^0)) \text{ вокруг узлов } \omega^0 \text{ было } l^{\approx} = 0, \text{ то в них выполняется } l^{\approx} \equiv 1, n_{\nu\Omega} = 0 \rangle;$

$\langle 3. \text{ За счет выбора вязких накоплений } \beta_\omega \text{ и } \beta_\Omega \text{ обеспечивается неотрицательность прогоночных коэффициентов } A_{ui+0.5} \geq 0, B_{ui+0.5} \geq 0 \text{ с возможным локальным достижением лимитеров } (\beta_\Omega = \beta_{\rho 0}, k_{\nu u\Omega} = 0) \text{ и пропорциональным уменьшением шага по времени } \tau \text{ с вязкими накоплениями } \{ \beta_\omega, \beta_{E\omega} \}. \text{ В узлах } \omega, \text{ значения } \beta_\omega \text{ в которых приводили к отрицательным, } A_u < 0, B_u < 0 \text{ и устанавливается } k_{\nu\omega} = -1. \text{ При уменьшении шага по времени } \tau \text{ величины } \rho, u, E \text{ на } s\text{-й итерации присваивают значения с явного } t \text{ - слоя и выполняется возврат } \langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle \}.$

Итерационные блоки $(\langle u^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_u - \text{накопитель} \rangle)$ и $(\langle E^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_E - \text{накопитель} \rangle)$ с монотонизацией по импульсу $I = \rho_\nu u$ и по внутренней энергии E с формированием вязких накоплений β_Ω и $\beta_{E\Omega}$ аналогичны описанному выше блоку для плотности $(\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_\rho - \text{накопитель} \rangle)$. Если по достижению максимально возможного числа итераций n_{max} наблюдается итерационная расходимость, то происходит пропорциональное уменьшение шага по времени τ и соответственно, всех вязких накоплений β . Полагается $k = -1$, величинам ρ, u, E на известной s -й итерации присваиваются значения с явного t -слоя и выполняется возврат на $\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle$. Если критерий сходимости $\{ |\delta\rho| < \varepsilon_1 |\rho^s| + \varepsilon_2, |\delta I| < \varepsilon_1 |\rho^s| + \varepsilon_2, |\delta E| < \varepsilon_1 |\rho^s| + \varepsilon_2 \}$ выполняется, то итерации прекращаются и полагается $\{ \hat{\rho} = \rho^{s+1}, \hat{I} = I^{s+1}, \hat{E} = E^{s+1} \}$.

6. Заключение

Проведен теоретический анализ с разработанным применительно к ПКРС с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды классом дивергентных адаптивных вязкостей. Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с использованием операторного подхода и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности, построено семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Предложенный алгоритм показал существенное улучшение качества численного решения задачи Эйнфельда. Эффективное сохранение

баланса внутренней энергии в данном типе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих «вычислительную» энтропию (в т. ч. на сингулярных особенностях решения).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00578).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., Наука, 1980.
2. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9, № 4, С. 953-958.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123-132.
4. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1980. Т. 20, № 1, С. 171-181.
5. Головизнин В. М., Краюшкин И. Е., Рязанов М. А., Самарский А. А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша АН СССР. 1983. № 105. С. 1-32.
6. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ, 1987. Т. 27. № 5. С. 779-784.
7. Колдоба А. В., Кузнецова О. А., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша АН СССР. 1985. № 57.
8. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша, АН СССР. 1982. № 160.
9. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996. 275 с.
10. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Гасилова И. В., Дорофеева Е. Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теорий упругости // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86-96.
11. Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Шарова Ю. С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша РАН. 2018. № 160. 21 с. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-160>

12. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М., Крансанд, 2014. 288 с.
13. Повещенко Ю. А., Ладонкина М. Е, Подрыга В. О., Рагимли О. Р., Шарова Ю. С Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша РАН. 2019. № 14. 23 с. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>
14. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution // Large-scale scientific computing. / ed. by I. Lirkov, S. Margenov. Springer, 2020. pp. 618–625. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2>

*Поступила 14.09.2021; доработана после рецензирования 12.11.2021;
принята к публикации 16.11.2021*

Информация об авторах:

Ладонкина Марина Евгеньевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Повещенко Юрий Андреевич, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Рагимли Орхан Рагимович, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7257-1660>, orhan@reximli.info

Чжан Хаочэнь, студент, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 65M22

Theoretical Analysis of Fully Conservative Difference Schemes with Adaptive Viscosity

M. E. Ladonkina^{1, 2}, Y. A. Poveshenko^{1, 2}, O. R. Ragimli¹, H. Zhang^{1, 2}¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics (Moscow, Russian Federation)*² *Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny, Russian Federation)*

Abstract. For the equations of gas dynamics in Eulerian variables, a family of two-layer in time completely conservative difference schemes with space-profiled time weights is constructed. Considerable attention is paid to the methods of constructing regularized flows of mass, momentum, and internal energy that do not violate the properties of complete conservatism of difference schemes of this class, to the analysis of their amplitudes and the possibility of their use on non-uniform grids. Effective preservation of the balance of internal energy in this type of divergent difference schemes is ensured by the absence of constantly operating sources of difference origin that produce "computational" entropy (including those based on singular features of the solution). The developed schemes can be easily generalized in order to calculate high-temperature flows in media that are nonequilibrium in temperature (for example, in a plasma with a difference in the temperatures of the electronic and ionic components), when, with the set of variables necessary for describing the flow, it is not enough to equalize the total energy balance.

Key Words: completely conservative difference schemes, support operator method, gas dynamics

For citation: M. E. Ladonkina, Y. A. Poveshenko, O. R. Ragimli, H. Zhang. Theoretical Analysis of Fully Conservative Difference Schemes with Adaptive Viscosity. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423>

REFERENCES

1. A. A. Samarskii, Y. P. Popov, *Difference methods for solving problems of gas dynamics.*, Nauka Publ., Moscow, 2016 (In Russ.), 424 p.
2. Y. P. Popov, A. A. Samarskii, "Completely Conservative Difference Schemes", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **9**:4 (1969), 953–958 (In Russ.)
3. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, "On one construction algorithm completely conservative difference schemes", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **22**:4 (1982), 123–132 (In Russ.)
4. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, G. V. Meladze, "On a completely conservative difference scheme for the equation of gas dynamics in Euler variables", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:1 (1980), 171–181 (In Russ.)
5. V. M. Goloviznin, I. V. Krayushkin, M. A. Ryazanov, A. A. Samarskii, "Two-dimensional completely conservative difference schemes of gas dynamics with separated velocities", *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, **105** (1983), 1–32 (In Russ.)

6. A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, Y. P. Popov, “Two-layer completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **27**:5 (1987), 779–784 (In Russ.)
7. A. V. Koldoba, O. A. Kuznetsov, Y. A. Poveschenko, “On one approach to the calculation of gas dynamics problems with a variable quasiparticle mass”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, 1985, № 57 (In Russ.)
8. A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, “Completely conservative difference schemes for equations of gas dynamics in the presence of mass sources”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, 1982, № 160 (In Russ.)
9. A. A. Samarskiy, A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, V. F. Tishkin, A. P. Favorskiy, *Difference schemes on irregular grids*, Kriteriy Publ., Minsk, 1996 (In Russ.), 275 p.
10. A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, I. V. Gasilova, E. Y. Dorofeeva, “Difference schemes of the support operator method for equations of elasticity theories”, *Math. Modeling*, **24**:12 (2012), 86–96 (In Russ.)
11. Y. A. Poveschenko, V. O. Podryga, Y. S. Sharova, “Integrally-consistent methods for calculating self-gravitating and magnetohydrodynamic phenomena”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*, 2018, № 160 (In Russ.)
12. Y. V. Popov, I. V. Fryazinov, *Method of adaptive artificial viscosity numerical solution of equations of gas dynamics*, Krasand Publ., Moscow, 2014 (In Russ.), 275 p.
13. Y. A. Poveschenko, M. E. Ladonkin, V. O. Podryga, O. R. Rahimli, Y. S. Sharova, “On one two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Euler variables with adaptive regularization”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*, 2019, № 14, 23 (In Russ.) DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>
14. O. Rahimli, V. Podryga, Y. Poveschenko, P. Rahimli, Y. Sharova, *Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in eulerian variables with adaptive regularization of solution*, Springer, 2020

Submitted 14.09.2021; Revised 12.11.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Marina E. Ladonkina, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Yuri A. Poveshenko, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Orkhan R. Ragimli, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy per., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7257-1660>, orkhan@reximli.info

Haochen Zhang, Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy per., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.