

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.394-411

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63:536.4

## Численное моделирование формирования сферического слоя D-T смеси в микромишенях ЛТС

Е. Ю. Киреичева<sup>1</sup>, Е. А. Веселова<sup>1</sup>, Ю. Н. Дерюгин<sup>1</sup>, Т. Ф. Мамедова<sup>2</sup><sup>1</sup> ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ» (г. Саров, Россия),<sup>2</sup> ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)

**Аннотация.** В работе представлена двумерная экономичная расчетная модель процесса формирования криогенного слоя D-T смеси в сферической оболочке. Модель основана на описании движения газовой фазы в приближении Буссинеска. Тепловая задача представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ-твердое тело. Методика построена на основе метода конечного объема, использования структурированной подвижной сетки, движение которой связано с выделением фазового фронта, неявных аппроксимаций и метода расщепления двумерных уравнений по направлениям на одномерные уравнения. Численно показано, что вследствие естественной радиоактивности происходит симметризация мишени. Проведена расчетная оценка времени симметризации для одной геометрии мишени с различными коэффициентами заполнения.

**Ключевые слова:** криогенная мишень, уравнение Навье-Стокса в приближении Буссинеска, метод конечного объема, структурированная подвижная сетка

**Для цитирования:** Киреичева Е. Ю., Веселова Е. А., Дерюгин Ю. Н., Мамедова Т. Ф. Численное моделирование формирования сферического слоя D-T смеси в микромишенях ЛТС // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 394–411. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.394-411>

### 1. Введение

Управляемый термоядерный синтез является многообещающей технологией для производства энергии. В инерциально-термоядерном реакторе [1] для осуществления условий реакций синтеза сферическая микромишень, содержащая твердый слой изотопов водорода дейтерия (D2) и трития (T2), обжимается под воздействием лазерного излучения. Достижения необходимых параметров для зажигания мишени во многом определяется сферичностью твердого слоя D-T смеси. В процессе производства микромишеней при замораживании газонаполненной микросферы в результате влияния силы тяжести происходит несимметричное охлаждение мишени. В работах [2–3] отмечается, что в следствии энерговыделения при распаде трития в D-T смеси может происходить естественная симметризация твердого слоя.

Для оценки времени формирования твердого слоя в работе [4] была создана одномерная расчетная модель процесса замораживания газонаполненной микросферы. Данная модель представляет собой задачу Стефана с двумя фазовыми переходами с учетом потенциального движения замораживаемого газа. С использованием созданной методики были вычислены пространственно-временные распределения температуры внутри и



вне сферы, скорость движения газа внутри сферы и время замораживания в широких пределах размеров микросфер, количества содержащегося в них газа и скорости охлаждения. Описание процесса естественной симметризации за счет внутренних источников энергии потребовало создание многомерной расчетной модели [2–3]. Использование здесь разработанных многомерных коммерческих кодов [2; 3; 5], в силу разномасштабности газодинамических и тепловых процессов не позволило численно прогнозировать процесс симметризации, который может длиться несколько часов.

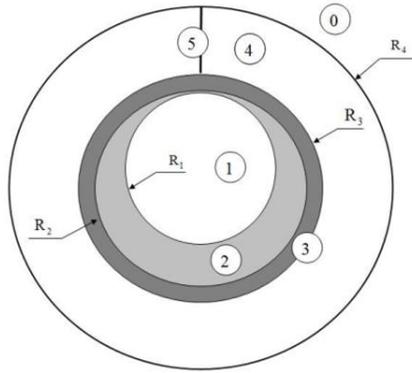
Целью данной работы является разработка экономичной методики расчета формирования криогенного слоя  $D-T$  смеси в микросфере на основе двумерного подхода и уравнений движения газовой фазы в приближении Буссинеска. Тепловая задача представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ-твердое тело с выделением фронта фазового перехода на подвижной эйлеровой сетке. Используемые термодинамические свойства веществ в рассматриваемом диапазоне температур заимствованы из [6]. Построенная методика основана на методе конечного объема и использовании структурированной подвижной сетки. Расчетный шаг расщепляется на три этапа. На первом этапе определяется скорость фазового фронта, и новое положение сетки. На втором этапе определяются компоненты вектора скорости в газовой фазе  $D-T$  смеси из решения уравнений Навье-Стокса методом типа SIMPLE [7]. В этом методе вначале определяются предварительные значения компонент вектора скорости без учета градиента давления. Затем определяются давление из условия выполнения уравнения неразрывности и новые значения компонент вектора скорости. Получающиеся системы разностных уравнений решаются методом расщепления по направлениям с использованием скалярных прогонок. На третьем этапе решается уравнение теплопереноса, которое аппроксимируется неявной разностной схемой относительно приращения температуры. Здесь система разностных уравнений также расщепляется по направлениям на одномерные уравнения, которые решаются методом прогонки.

## 2. Математическая модель

Расположение мишени в контейнере и типичное положение криогенного слоя внутри микросферы показаны на Рис. 2.1.

Внешней частью (0) является сферический контейнер, внутри которого располагается сферическая оболочка (3) из полистирола. Центры контейнера и оболочки совпадают. В области между ними (4) находится теплообменный газ (гелий). Внутри оболочки расположен неоднородный по толщине твердый слой (2) смеси дейтерий-тритий ( $D-T$ ), намороженный на внутреннюю поверхность оболочки. В центральной части находится насыщенный пар (1) изотопов водорода ( $D-T$  смеси). Микросфера подвешена на нити (5) к сферическому контейнеру-термостату. Диаметр контейнера составляет – 10–60 мм, внутренний диаметр оболочки – 1.5–3 мм, толщина оболочки – 0.1–0.3 мм.

При конденсации газообразного топлива газ движется к границе разделяющей твердую и газообразную фазы  $D-T$  смеси. Скорость этого движения практически во много раз меньше скорости звука. Поэтому давление внутри микросферы выравнивается очень быстро. Процесс конденсации происходит при давлении, равном давлению насыщенных паров при температуре, равной температуре внутренней стенки микросферы. Зависимости давления насыщения от температуры стенки аппроксимируются следующей формулой:



**Рис. 2.1.** Геометрия задачи: 0 – сферический контейнер; 1 – насыщенный пар; 2 – замороженный слой D-T смеси; 3 – сферическая оболочка; 4 – теплообменный газ гелий; 5 – нить подвески

**Fig 2.1.** Problem geometry: 0 – spherical container; 1 – saturated steam; 2 – frozen layer of D-T mixture; 3 – spherical shell; 4 – heat exchange gas helium; 5 – strand suspension

$$p = \exp\left(-\frac{138.3}{T_s} + 1.479 \cdot \ln T_s + 0.9255\right), \quad [\text{бар}] \tag{2.1}$$

где  $T_s$  – температура на границе газ-твёрдое тело.

Движения газовой фазы D–T смеси в области 1 описывается на основе уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска [8]. В этом приближении газ считается несжимаемым, а сила тяжести определяется перепадом температур. Исходные уравнения в цилиндрических координатах, в которых осевая координата  $x$  направлена вверх, имеют вид:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial y \rho v}{y \partial x} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial y \rho u v}{y \partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left( y \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g \beta (T - \bar{T}), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial y \rho v^2}{y \partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left( y \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right). \tag{2.4}$$

Здесь  $\rho$  – плотность;  $u, v$  – компоненты вектора скорости;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\beta$  – коэффициент теплового расширения;  $\bar{T}$  – среднее значение температуры в газовой области на текущий момент времени, определяемый по формуле:

$$\bar{T} = \frac{\int_0^{R_1} \rho C_P T dV}{\int_0^{R_1} \rho C_P dV}. \tag{2.5}$$

Изменение температуры в газовой фазе описывается уравнением сохранения энергии с учетом энерговыделения от поглощения нейтронов при распаде трития:

$$\rho C_{P1} \frac{\partial T}{\partial t} + u \rho C_{P1} \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \rho C_{P1} \frac{\partial y T}{y \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left( y \chi_1 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_1. \quad (2.6)$$

Удельная теплоемкость газообразной фазы  $D$ - $T$  смеси (область 1 на Рис. 2.1) в диапазоне характерного изменения температуры определяется как:

$$C_{P1}(T) = 3.96 \cdot (1 + 0.0114 \cdot T - 7.1 \cdot 10^{-5} T^2 + \rho \cdot \exp(1.091 - 0.166 \cdot T + 1.217 \cdot 10^{-3} T^2)), \quad \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}} \right]. \quad (2.7)$$

Зависимости от температуры коэффициента теплопроводности и динамической молекулярной вязкости для газообразной фазы  $D$ - $T$  смеси задаются выражениями:

$$\chi_1 = -2.485 \cdot 10^{-5} + 6.894 \cdot 10^{-6} T - 1.61 \cdot 10^{-8} T^2, \quad \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}} \right]; \quad (2.8)$$

$$\mu = \frac{8.1 \cdot 10^{-7} \sqrt{T}}{1 + \frac{27.89}{T}}, \quad \left[ \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}} \right]. \quad (2.9)$$

Объемное тепловыделение в газе определяется формулой:

$$q_1 = 1.216 \cdot 10^{-2} \frac{P}{T}, \quad \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3} \right]. \quad (2.10)$$

В области (2), отвечающей твердой фазе  $D$ - $T$  смеси, изменение температуры описывается уравнением теплопроводности с учетом тепловыделения от поглощения нейтронов при распаде трития:

$$\rho C_{P2} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left( y \chi_2 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_2. \quad (2.11)$$

Термодинамические свойства твердой фазы  $D$  -  $T$  смеси следующие:

$$C_{P2} = 6 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 - 1.44 \cdot 10^{-5} \cdot T^4, \quad (2.12)$$

$$\chi_2 = \frac{8342}{T^{4.49}} \cdot \exp \left\{ -\frac{33.13}{T} \right\}. \quad (2.13)$$

Энергия от поглощения нейтронов при распаде трития  $q = 0.049$ .

В сферической оболочке (область 3) изменение температуры описывается уравнением теплопроводности (2.11) с учетом возможного выделения энергии от поглощения нейтронов образующихся при распаде трития. Термодинамические свойства сферической оболочки из полистирола в диапазоне характерного изменения температуры описываются зависимостями:

$$C_{P3} = -0.040454 + 0.0063 \cdot T - 2.32 \cdot 10^{-5} \cdot T^2, \quad (2.14)$$

$$\chi_3 = 2.2 \cdot 10^{-4} + 9.79 \cdot 10^{-6} \cdot T - 4.51 \cdot 10^{-8} \cdot T^2. \quad (2.15)$$

Условие возникновения конвекции определяется величиной произведения чисел Прандтля ( $Pr = C_P \mu / \chi$ ) и Грасгофа ( $Gr = g \rho^2 l^3 \Delta T / \mu^2$ ) [8]. Практически единственным газом, который может быть применен в качестве теплообменного при криогенном замораживании  $D$ - $T$  смеси, является гелий при низком давлении ( $\rho < 1$  торр). Проведенная оценка чисел Прандтля и Грасгофа, для характерного размера полости  $l = 1$  см привела к следующему диапазону изменения произведения этих чисел:  $Pr \cdot Gr = 0.04 \div 4$ . Согласно [8] условием возникновения конвекции между двумя параллельными твердыми плоскостями является условие:  $Pr \cdot Gr > 1710$ . В этих предположениях газ гелий считается неподвижным, а изменение температуры в полости (1) описывается уравнением теплопроводности (2.11). Удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности  $\chi(T)$  следующие:

$$C_{P4} = 0.256154 \cdot \frac{p}{T}, \quad (2.16)$$

$$\chi_4 = \frac{7.17 \cdot 10^{-7} \sqrt{T}}{\left(1 + \frac{3.43}{T}\right) \left(1 + \left(\frac{1 - 0.0067 \cdot (T - 4)}{1 + 0.0067 \cdot (T + 4)}\right) \frac{1.31466 \cdot 10^{-6}}{\left(1 + \frac{3.43}{T}\right)} \cdot \frac{T}{p}\right)}. \quad (2.17)$$

В начальный момент времени во всех зонах задано распределение температуры, в частности, задана одинаковая температура.

В области (1)  $D$ - $T$  смесь имеет начальное давление  $p_1^0$ , которой определяется по формуле (2.1) при температуре конденсации  $T_s = T_1^0$ . Начальная плотность  $\rho_1$   $D$ - $T$  смеси определяется по уравнению состояния Ван-дер-Ваальса при начальных значениях температуры и давления.

На границе сферического контейнера  $R_4$  ставится граничное условие первого рода, когда задана температура, либо второго рода, когда задан тепловой поток. На границе зон твердой и газовой фаз  $D$ - $T$  смеси  $R_1$  выставляются условия описывающие поглощение или выделение количества тепла при фазовом переходе:

$$\rho_2 \Delta h \left( \frac{d\vec{R}_1}{dt} \cdot \vec{n} \right) = \left( \chi_2 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{R_1^+} - \left( \chi_1 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{R_1^-}, \quad (2.18)$$

где  $\Delta h$  – удельная энтальпия фазового перехода, определяемая по формуле:

$$\Delta h = 480 \left[ 1 + 7.96 \left( 1 - \frac{T_S}{39.4} \right)^{0.443} \right]. \quad (2.19)$$

Из законов сохранения массы газовой и твердой фаз  $D$ - $T$  смеси следует:

$$\int_{R_1(t)}^{R_2} \rho_2 dV + \int_0^{R_1(t)} \rho_1 dV = M_{TF} + M_{GF} = M^0, \quad (2.20)$$

где  $M^0$  – полная масса твердой ( $M_{TF}$ ) и газовой ( $M_{GF}$ ) фаз  $D$ - $T$  смеси.

Кинематическое условие на границе фазового перехода соответствует условию прилипания. При этом нормальная компонента вектора скорости в  $D$ - $T$  газе определяется из условия

$$\rho_1(U_n - W_n) = -\rho_2 W_n = -\rho_2 \left( \frac{d\vec{R}_1}{dt} \cdot \vec{n} \right). \quad (2.21)$$

Из закона сохранения энергии следует энергетическое условие на границе фазового перехода:

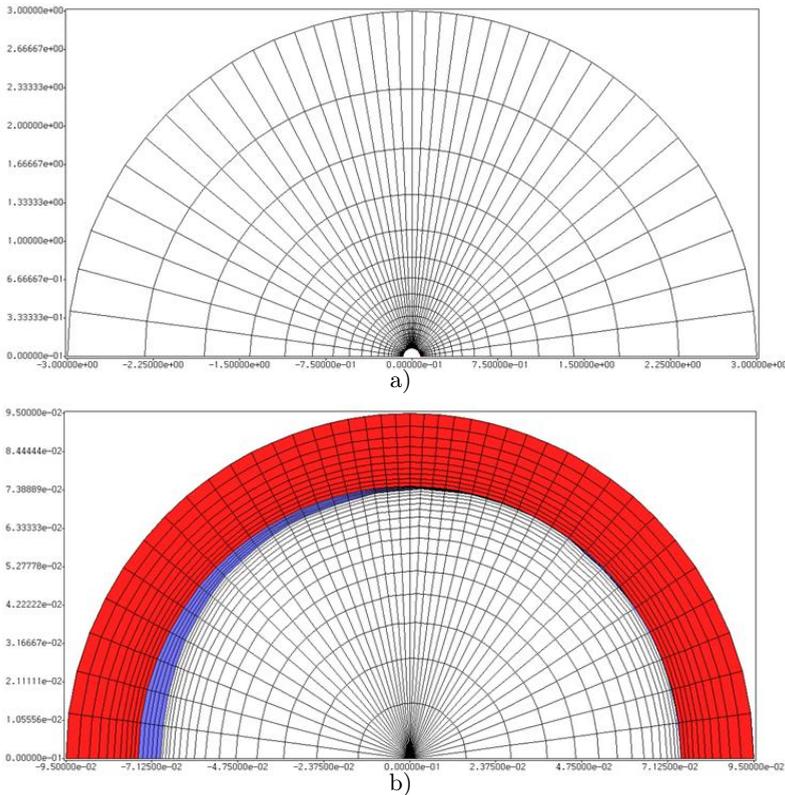
$$\rho_1 h_1(U_n - W_n) = -\rho_2(h_2 + \Delta h)W_n. \quad (2.22)$$

Соотношение (2.22) отвечает связи энтальпий газовой и твердой фаз и скрытой теплоты фазового перехода:

$$h_1(T) = h_2(T) + \Delta h(T). \quad (2.23)$$

### 3. Численный метод

Для построения численного метода в расчетной области вводится структурированная неравномерная сетка. При построении сетки применяется сгущение узлов сетки по геометрической прогрессии, как по углу, так и по радиусу. Фрагменты сетки показаны на Рис. 3.1.



**Рис. 3.1.** Фрагменты сетки: а) в теплообменном газе б) в микроишени  
**Fig 3.1.** Grid fragments: a) in heat-exchange gas b) in micro-target

Последовательность расчета на каждом временном шаге состоит из следующих вычислений. Вначале на гранях, разделяющих области твердой и газовой фаз, из уравнения (2.1) находится температура фазового перехода  $T_s$ . Затем с использованием явной аппроксимации уравнения (2.18) определяется скорость движения границы фазового перехода и ее новое положение. При этом если температура  $T_s$  фазового перехода не удовлетворяет принципу максимума  $(T_2 - T_s)(T_s - T_1) \geq 0$ , где  $T_2$  и  $T_1$  – температуры в твердой и газовой фазах в приграничных ячейках, то проводится корректировка температуры фазового перехода из условия отсутствия поверхностных источников энергии. После этого рассчитываются новые координаты узлов сетки в областях 1 и 2 и геометрические параметры ячеек и граней. Затем, из закона сохранения массы, определяется новое значение плотности в газовой фазе, отвечающее новому положению фазового фронта. В области газообразной фазы  $D-T$  смеси вычисляются компоненты вектора скорости и давление из решения уравнений Навье-Стокса. Решение уравнений (2.2)–(2.4) находится методом типа SIMPLE [7], в соответствии с которым вначале определяются предварительные значения  $(\bar{u}, \bar{v})$  компонент вектора скорости без учета градиента давления. Для их определения уравнения (2.2–2.3) аппроксимируются неявной разностной схемой, которая для ячейки  $P = (j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2})$  в полудискретной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \Delta V_P^{n+1}}{\tau} \bar{u}_P + \left\{ \left( m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_{j+1} - \left( m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} + \\ & + \left\{ \left( m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_{i+1} - \left( m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} = \\ & = \frac{(u\rho\Delta V)_P^n}{\tau} - \rho g \beta (T - T_0)_P^n \Delta V_P^{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.1) \\ & \frac{\rho \Delta V_P^{n+1}}{\tau} \bar{v}_P + \left\{ \left( m\bar{v} - \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \Delta S \right)_{j+1} - \left( m\bar{v} - \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} + \\ & + \left\{ \left( m\bar{v} - \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \Delta S \right)_{i+1} - \left( m\bar{v} - \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} = \frac{(\nu\rho\Delta V)_P^n}{\tau}. \end{aligned}$$

Здесь используются следующие обозначения:  $\Delta V$  – объем ячейки;  $m = \rho(U_n - W_n)\Delta S$  – поток массы;  $U_n = n_x + n_y\nu$  – нормальная компонента вектора скорости;  $W_n$  – нормальная скорость грани;  $\Delta S$  – площадь грани;  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  – производная по нормали. Конвективные потоки в (3.1) аппроксимируются противопоточной схемой [7], а диффузионные потоки – центральными разностями. Для решения разностных уравнений, следуя [9], проводится пространственная факторизация, позволяющая свести решения двумерных уравнений к решению одномерных задач по каждому из сеточных направлений методом скалярной прогонки.

Найденные предварительные значения компоненты вектора скорости не удовлетворяют уравнению неразрывности. Поэтому на следующем шаге находятся поправки компонент вектора скорости

$$u^{n+1} = \bar{u} + u', \quad \nu^{n+1} = \bar{\nu} + \nu', \quad (3.2)$$

которые выражаются через давление следующим образом:

$$u' = -\frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \nu' = -\frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (3.3)$$

При подстановке в уравнение неразрывности выражений (3.2)– (3.3) и с помощью метода искусственной сжимаемости [10] получается уравнение относительно давления:

$$\left( \frac{p}{a^2 \tau} \Delta V^{n+1} \right)_P - \tau \Sigma_f \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = - \left\{ \frac{(\bar{p} \Delta V)_P^{n+1} - (\bar{p} \Delta V)_P^n}{\tau} + \sum_f \bar{m}_f \right\}, \quad (3.4)$$

где  $a$  – эмпирически подбираемый параметр, имеющий смысл скорости звука;  $f$  – индекс грани. Суммирование в (3.4) проводится по граням ячейки  $P$ .

Граничное условие для уравнения (3.4) выставляется на границе фазового перехода. Для постановки граничного условия, используется тот факт, что скорость движения фазовой границы ( $W_n$ ) и, соответственно, массовая скорость газовой фазы ( $U_n$ ) известны. Поэтому на фазовой границе ставится условие

$$(m')_f = (\rho U'_n \Delta S)_f = - \left( \tau \frac{\partial p}{\partial n} \Delta S \right)_f = 0.$$

Для численного решения проводится пространственная факторизация уравнения (3.4). Получающиеся в результате этого одномерные уравнения решаются скалярными прогонками.

Для определения поправок компонент вектора скорости в центрах ячеек по формулам (3.3) градиент давления определяется в центрах ячеек метод Гаусса-Грина:

$$(\text{grad } p)_P = \frac{\sum_f p_f \vec{n}_f \Delta l_f}{\Delta \sigma_P},$$

где  $\vec{n}_f$  – вектор внешней нормали относительно ячейки  $P$ ;  $\Delta l_f$  – длина грани;  $\Delta \sigma_P$  – площадь ячейки.

Заключительным моментом расчета шага является определение температуры. Для составления разностных аппроксимаций уравнение теплопереноса во всех областях приводится к общему виду:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho h v) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\chi \frac{\partial \theta}{\partial y}) + \Phi(\vec{R}, t) + q(\vec{R}, t), \quad (3.5)$$

где  $\theta = T - T^0$  – приращение температуры относительно начального состояния;  $h(T) = \int_0^{T-T^0} C_p(T) d\theta$  – энтальпия, а функция  $\Phi$  описывает диссипацию энергии за счет работы вязких сил. Уравнение теплопереноса (3.2) аппроксимируется неявной разностной схемой. Для решения нелинейных уравнений используется метод Ньютона, в соответствии с которым разностные уравнения составляются относительно приращений температуры. Для ячейки  $P = (j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2})$  полудискретная форма уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\rho C_P)_P \Delta V_P^{n+1} \Delta \theta_P}{\tau} + \left( m C_P \Delta \theta - \left( \chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{3}{2}} - \\
 & - \left( m C_P \Delta \theta - \left( \chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{1}{2}} + \left( m C_P \Delta \theta - \left( \chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{3}{2}} - \\
 & - \left( m C_P \Delta \theta - \left( \chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{1}{2}} = H_P^n.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Правые части уравнений (3.6) являются невязками, т. е. явной аппроксимацией уравнения баланса энергии:

$$\begin{aligned}
 H_P^n = & \frac{(\rho h)_P^n (\Delta V_P^{n+1} - \Delta V_P^n)}{\tau} - \left( m h - \left( \chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{3}{2}}^n + \\
 & + \left( m h - \left( \chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{1}{2}}^n - \left( m h - \left( \chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{3}{2}}^n + \\
 & + \left( m h - \left( \chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{1}{2}}^n + \Phi_P^n \Delta V_P + q_P \Delta V_P.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Конвективные потоки здесь также аппроксимируются противопоточной схемой, а диффузионные потоки центральными разностями. Для решения разностных уравнений проводится пространственная факторизация, сводящая решение двумерного уравнения к решению одномерных уравнений каждому из сеточных направлений методом скалярной прогонки.

Данная схема консервативна, т. к. конвективный и тепловой потоки через смежную грань двух ячеек определяются одинаковым образом (равны по модулю и имеют противоположные знаки). Отметим также, что при балансе полной энергии во всей расчетной области с учетом фазового превращения, сумма потоков конвективной и тепловой энергий через границу фазового перехода определяется как

$$\begin{aligned}
 & -(\rho_2(W_n)h_2\Delta S)_f + \left( \chi_2 \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_2 \Delta S \right)_f + (\rho_1(U_n - W_n)h_1\Delta S)_f - \\
 & - \left( \chi_1 \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 \Delta S \right)_1 = -\rho_2 \Delta h W_n + \left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{TF} - \left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{GF} = 0.
 \end{aligned}$$

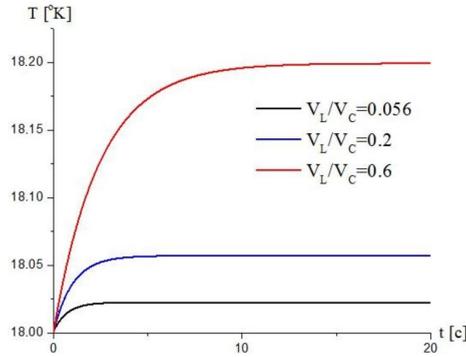
что обеспечивает консервативность разностной схемы с учетом фазового превращения.

#### 4. Результаты расчетов

С использованием созданной расчетной методики было проведено моделирование вымораживание микромишени, которая находится в сферическом контейнере, имеющем радиус  $R_4 = 3$  см (см. Рис. 2.1). Оболочка микромишени имеет толщину 0.02 см. Внутренний радиус оболочки  $R_2 = 0.075$  см. Рассматривались микромишени имеющие различную степень заполнения оболочки  $\frac{V_L}{V_C} = 0.056, 0.2$  и  $0.6$ . Результаты относятся к процессу охлаждения при температуре  $T = 18^0 K$ .

Расчеты были проведены в четырех постановках. В первой постановке определялось установившееся поле температуры в контейнере без учета движения газовой фазы

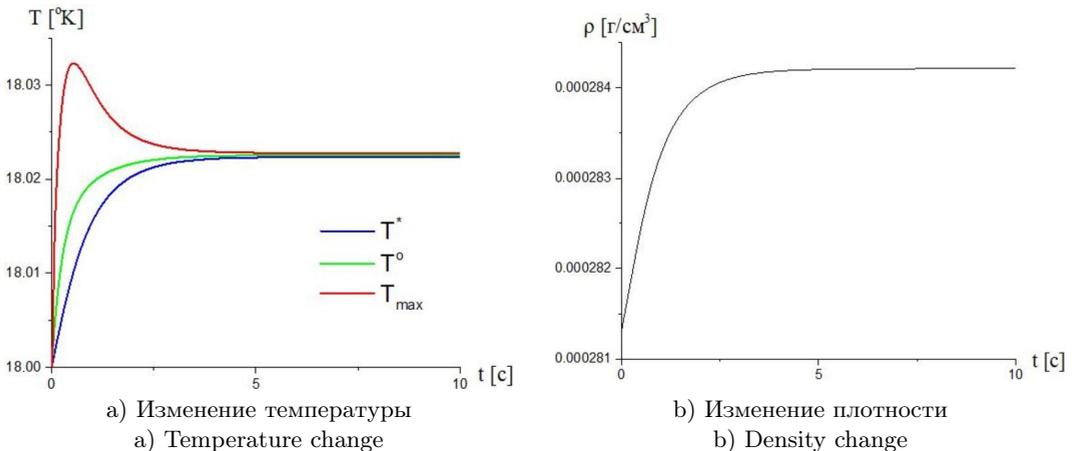
D-T смеси только за счет энергосвободения и внешнего охлаждения для сферически слоя твердой фазы. На Рис. 4.1 показаны графики изменения максимальной температуры. В этой постановке, в зависимости от степени заполнения, решение выходит на стационарное распределение температуры за время 5 – 15 с.



**Рис. 4.1.** Сферическая мишень, изменение максимального значения температуры в газовой фазе

**Fig 4.1.** Spherical target, change in the maximum temperature value in the gas phase

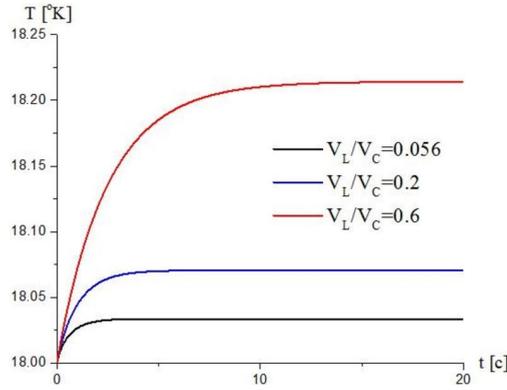
Во второй задаче моделировалось охлаждения со сферическим слоем твердой фазы с учетом фазового перехода. В этом случае происходит незначительная сублимация твердой фазы D-T смеси, которая приводит к повышению плотности и давления в газовой фазе. На рисунке 4.2 показаны типичные графики изменения максимальной температуры ( $T_{max}$ ), средней температуры ( $T^0$ ), температуры сублимации ( $T^*$ ) и изменение плотности в газовой фазе D-T смеси. Стационарное состояние в этих расчетах достигается также за время от 5 до 15 с.



**Рис. 4.2.** Расчет вымораживание сферической мишени с заполнением оболочки  $\frac{V_L}{V_C} = 0.056$

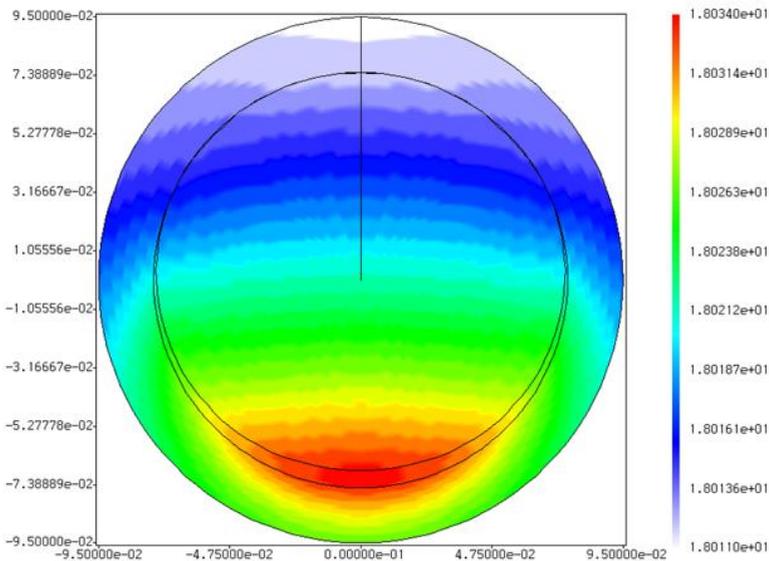
**Fig 4.2.** Calculation of freezing out a spherical target with shell filling  $\frac{V_L}{V_C} = 0.056$

В третьей постановке определялось установившееся поле температуры в мишени с несферическим слоем твердой фазы. В этих расчетах учитывалось только энерговыделение и внешнее охлаждение. На Рис. 4.3 показаны графики изменения максимальной температуры в мишенях с различной степенью заполнения.

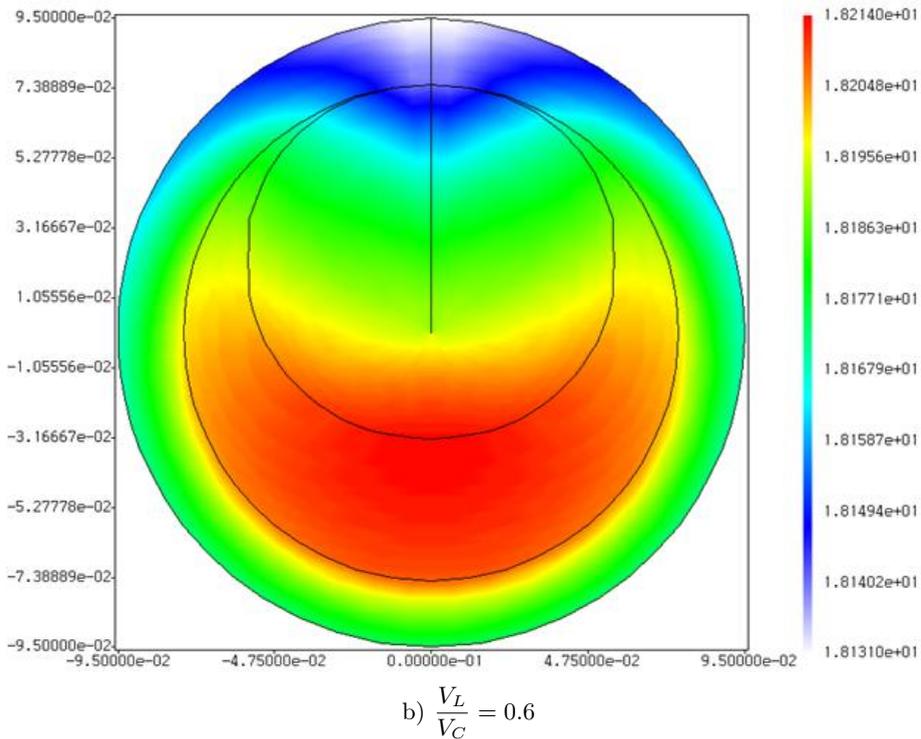


**Рис. 4.3.** Изменение максимального значения температуры в газовой фазе в задачах с несферическим слоем твердой фазы  
**Fig 4.3.** Change in the maximum temperature value in the gas phase in problems with a non-spherical layer of a solid phase

На рисунке 4.4 для двух значений степени заполнения приведены поля температуры. Как видно из рисунков, в установившемся поле температуры максимальные значения достигаются в области наибольшей толщины твердого слоя  $D$ - $T$ -смеси. Установившееся решение здесь также достигалось за время 5–15 с. Максимальное изменение температуры в зависимости от степени заполнения изменяется от  $0.034^0 K$  до  $0.214^0 K$ .



a)  $\frac{V_L}{V_C} = 0.056$



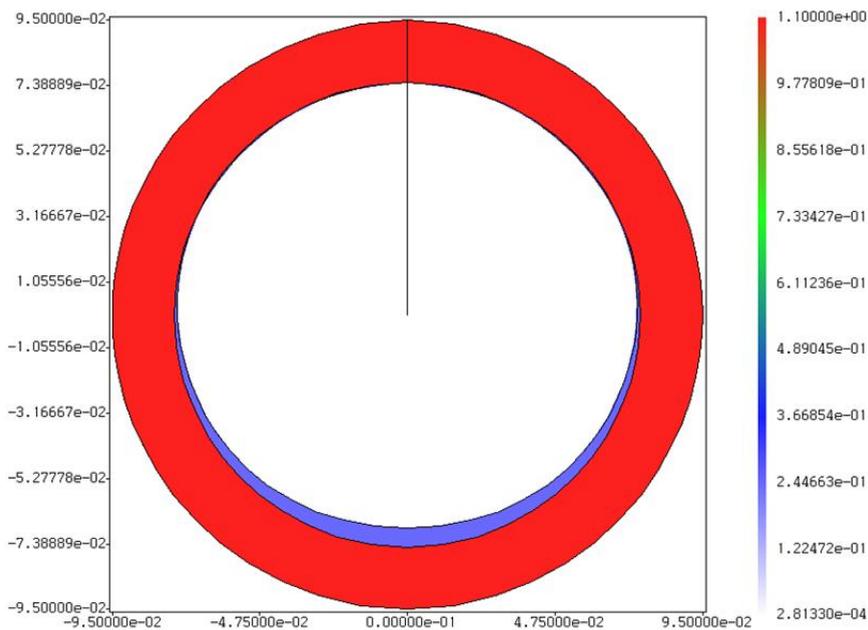
**Рис. 4.4.** Установившееся распределение температуры в задачах с несферическим слоем твердой фазы

**Fig 4.4.** Steady-state temperature distribution in problems with a non-spherical solid phase layer

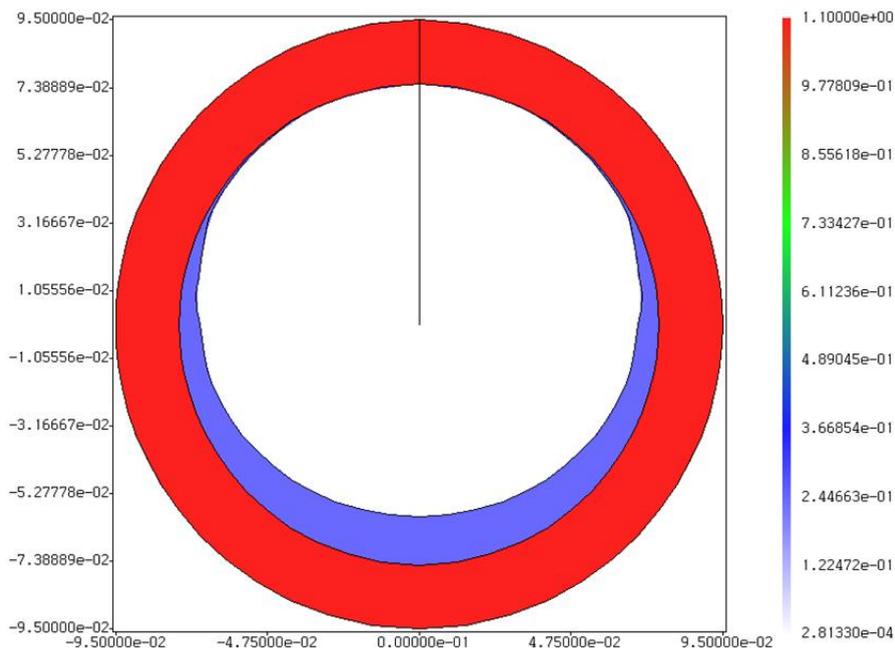
В четвертой постановке моделировался процесс самосимметризации твердого слоя D-T смеси за счет естественной радиоактивности. В расчетах оценивалась изменение степени сферичности мишени, которая определялась по формуле:

$$\partial R = 100 \cdot \frac{\max_j \{|R_j - R_{C\Phi}|\}}{R_{C\Phi}},$$

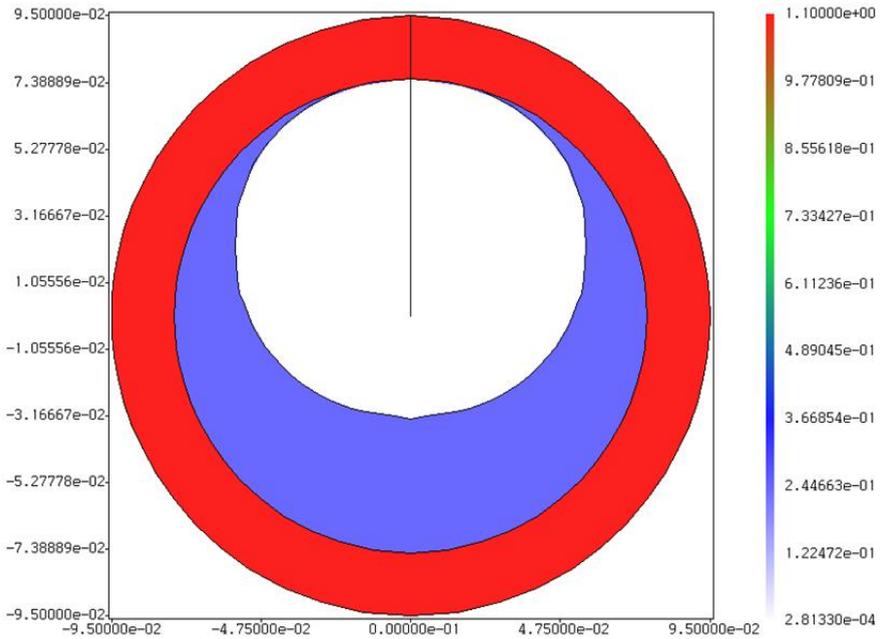
где  $R_j$  – радиус твердой фазы в  $j$ -той точке;  $R_{C\Phi}$  – радиус сферического объема массы газовой фазы на текущий момент времени. На Рис. 4.5 для трех вариантов степени заполнения показаны начальная геометрия твердого слоя и распределение температуры, вектора скорости и конфигурация твердой фазы после 1 часа вымораживания. Степень несферичности менее 1 % в зависимости от степени заполнения достигалась соответственно за 50 м, 45 м и 33 м. Более быстрая симметризация с большей степенью заполнения определяется большими градиентами температуры на границе фазового перехода и, соответственно, большими скоростями конденсации и сублимации.



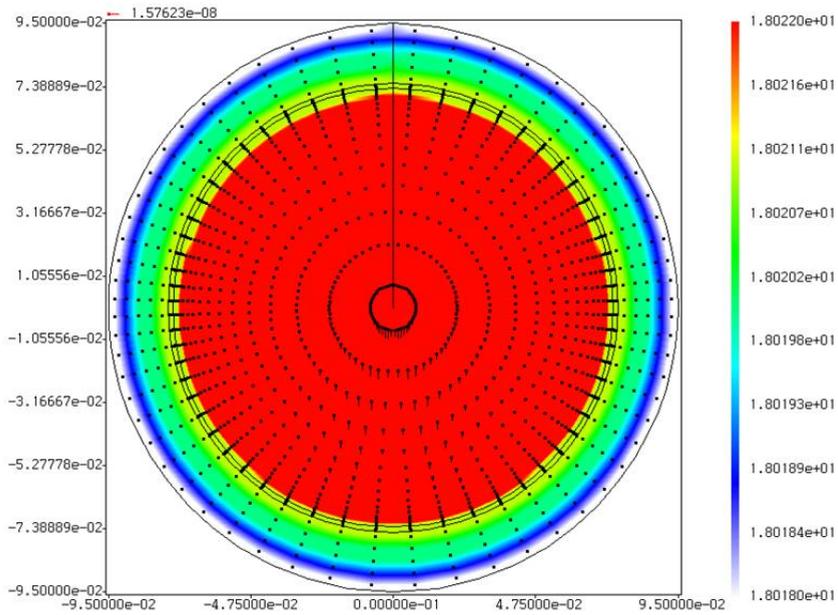
a)



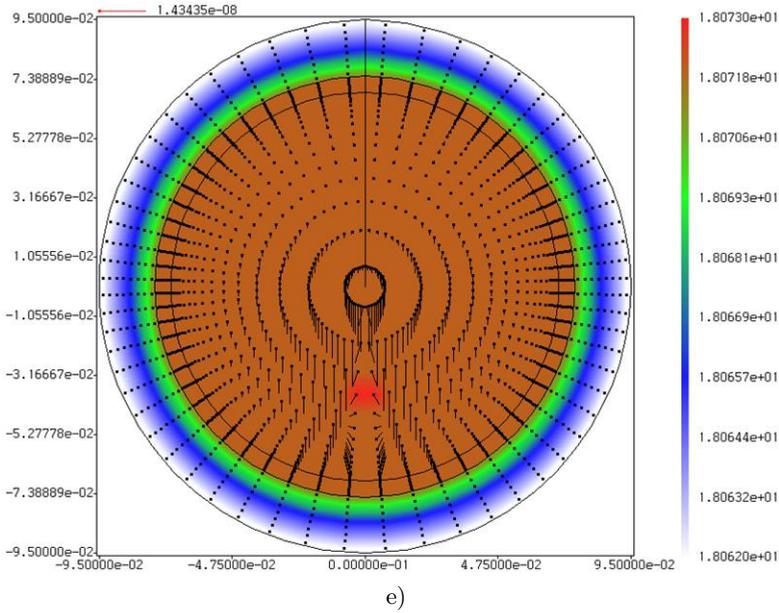
b)



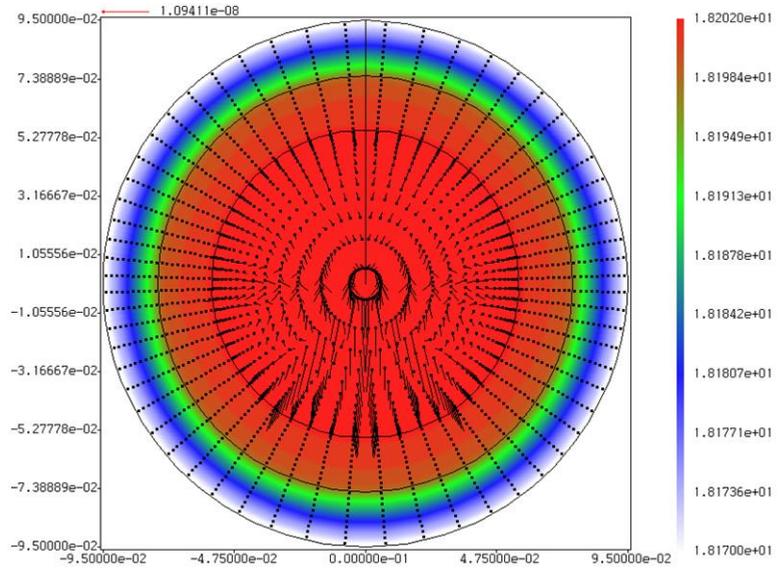
c)



d)



e)



f)

**Рис. 4.5.** а) Начальная форма твердой фазы слева, граница раздела газ – твердая фаза D-T смеси, поле температуры и вектор скорости справа после 1 ч вымораживания для микромишеней со следующими коэффициентами заполнения: а-б) 0.056; с-д) 0.2; е-ф) 0.6

**Fig 4.5.** The initial form of the solid phase on the left, the gas interface - the solid phase of the D-T mixture, the temperature field and the velocity vector on the right after 1 hour of freezing for micro-targets with their filling generators: а) 0.056; с-д) 0.2; д-ф) 0.6

## 5. Заключение

В результате выполненной работы разработана экономичная двумерная расчетная модель процесса формирования криогенного слоя D-T смеси в микросферте. Математическая модель представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ-твердое тело с учетом движения замораживаемого газа в приближении решения уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. С помощью расчётов показано, что вследствие естественной радиоактивности происходит симметризация мишени. Численно определено время самосимметризации в зависимости от степени заполнения микромишеней.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Накколс Дж. Г. Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза // УФН. 1984. Т. 143, № 7. С. 467–482. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0143.198407d.0467>
2. Hoffer J. K., Foreman L. R. Radioactively induced sublimation in solid tritium // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60, No. 13. pp. 1310–1313. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.1310>
3. Modeling the temperature and ice-thickness profiles within OMEGA cryogenic targets // LLE Review. 1999. Vol. 81. pp. 12–20.
4. Deryugin Yu. N., Izgorodin V. M., Solomatina E. Yu. Numerical simulation of the freezing process of hydrogen isotopes in a spherical container // J. Moscow Phys. Soc. 1999. Vol. 9. pp. 165–172.
5. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К., Глазунов В. А., Голубев А. А., Денисова О. В., Лашкин С. В., Жучков Р. Н., Тарасова Н. В., Сизова М. А. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС для расчета задач гидродинамики и теплопереноса на многопроцессорных ЭВМ: базовые технологии и алгоритмы // Супервычисления и математическое моделирование : тр. XII междунар. семинара. Саров, 2010. С. 215–230.
6. Справочник по физико-техническим основам криогеники / под ред. М. П. Малкова. М.: Энергоатомиздат, 1985. 432 с.
7. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. – 3rd ed. Berlin; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. 431 p.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
10. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. J. of Comput. Phys. Vol. 2. pp. 12–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90037-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90037-X)

*Поступила 17.06.2021; доработана после рецензирования 10.08.2021;  
принята к публикации 25.08.2021*

*Информация об авторах:*

**Кирейчева Екатерина Юрьевна**, ведущий экономист ФОТ, РФЯЦ ВНИИЭФ (607181 Россия, г. Саров, пр. Дружбы, д. 24), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1614-3420>, [kireycheva@gmail.com](mailto:kireycheva@gmail.com)

**Веселова Елена Александровна**, старший научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607182, Россия, г. Саров, ул. Чкалова д. 46б), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, [sarov333@gmail.com](mailto:sarov333@gmail.com)

**Дерюгин Юрий Николаевич**, главный научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Мамедова Татьяна Фанадовна**, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430019, Россия, г. Саранск, пр. 50 лет Октября, д. 30), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7582-216X>, [mamedovاتف@yandex.ru](mailto:mamedovاتف@yandex.ru)

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Original article*

MSC2020 76D05, 76M12

## Numerical modeling of the formation of D-T mixture spherical layer in micro-targets of LTS

E. Yu. Kireicheva<sup>1</sup>, E. A. Veselova<sup>1</sup>, Yu. N. Deryugin<sup>1</sup>, T. F. Mamedova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *FSUE RFNC - VNIIEF (Sarov, Russia),*

<sup>2</sup> *National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)*

**Abstract.** The article presents a two-dimensional economical computational model of the formation of D-T mixture cryogenic layer in a spherical shell. The model is based on the description of the motion of the gas phase in the Boussinesq approximation. The thermal problem is a Stefan problem with a gas-solid phase transition. The technique is based on the finite volume method, the use of a structured mobile grid, whose movement is associated with the separation of the phase front, implicit approximations and the method of splitting two-dimensional equations in directions into one-dimensional equations. It is numerically shown that, due to natural radioactivity, the target is symmetrized. A calculated estimation of the symmetrization time for one geometry of the target with different filling coefficients is carried out.

**Key Words:** cryogenic target, Navier-Stokes equation in the Boussinesq approximation, finite volume method, structured mobile grid

**For citation:** E. Yu. Kireicheva, E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, T. F. Mamedova. Numerical modeling of the formation of D-T mixture spherical layer in micro-targets of LTS. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:4(2021), 394–411. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.394-411>

## REFERENCES

1. J. H. Nuckolls, “The feasibility of inertial-confinement fusion”, *Phys. Today*, **35**:9 (1982), 24–31. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2915258>
2. “Radioactively Induced Sublimation in Solid Tritium”, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:13 (1988), 1310–1313. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.1310>
3. “Modeling the temperature and ice-thickness profiles within OMEGA cryogenic targets”, *LLE Review*, **81** (1999), 12–20.
4. Yu. N. Deryugin, V. M. Izgorodin, E. Yu. Solomatina, “Numerical simulation of the freezing process of hydrogen isotopes in a spherical container”, *J. Moscow Phys. Soc.*, **9** (1999), 165–172.
5. A. S. Kozelkov, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelenskiy, V. A. Glazunov, A. A. Golubev, O. V. Denisova, S. V. Lashkin, R. N. Zhuchkov, N. V. Tarasova, M. A. Sizova, “[Multi-functional software package LOGOS for calculating problems of hydrodynamics and heat and mass transfer on multiprocessor computers: basic technologies and algorithms]”, [*Supercomputing and Mathematical Modeling: Proceedings of the XII International Seminar*] (Sarov, 11-15 October), 2010, 215–230 (In Russ.).
6. M. P. Malkova, [*Handbook of the physical and technical foundations of cryogenics*], Energoatomizdat Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 432 p.
7. J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*, Springer, Berlin; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo, 2002, 431 p.
8. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1986, 551 p.
9. N. N. Yanenko, [*Fractional steps method for solving multidimensional problems of mathematical physics*], Nauka Publ., Novosibirsk, 1967 (In Russ.), 197 p.
10. A. J. Chorin, “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”, *J. of Comput. Phys.*, **2**, 12–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90037-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90037-X)

*Submitted 17.06.2021; Revised 10.08.2021; Accepted 25.08.2021*

*Information about the authors:*

**Ekaterina Yu. Kireicheva**, Leading Economist, Russian Federal Nuclear Center (24 Druzhby St., Sarov 607181, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1614-3420>, [kireycheva@gmail.com](mailto:kireycheva@gmail.com)

**Elena A. Veselova**, Senior Researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center (46b Chkalova St., Sarov 607182, Russia), ORCID:<https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, [sarov333@gmail.com](mailto:sarov333@gmail.com)

**Yuriy N. Deryugin**, Chief Researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Tatyana F. Mamedova**, Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (50 years of October st., Saransk 430019, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7582-216X>, [mamedovaf@yandex.ru](mailto:mamedovaf@yandex.ru)

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* the authors declare no conflict of interest.