DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.295–307
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.162.2

О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора

С. В. Сидоров[1], Е. Е. Чилина[2]

[1] ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)
[2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Данная работа содержит полную классификацию алгебраических негиперболических автоморфизмов двумерного тора, анонсированную С. Баттерсоном в 1979 г. Такие автоморфизмы включают в себя все периодические автоморфизмы. Их классификация имеет непосредственное отношение к топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, т. к. согласно результатам В. З.Гринеса и А. Н. Безденежных, любой градиентно-подобный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм поверхности представляется как суперпозиция сдвига на единицу времени градиентно-подобного потока и некоторого периодического гомеоморфизма. Я. Нильсеном найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов ориентируемых поверхностей посредством сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Результаты настоящей работы позволяют в случае тора полностью решить задачу реализации всех классов топологической сопряженности не гомотопных тождественному периодических отображений. А именно, из настоящей работы следует, что если несущая поверхность периодических гомеоморфизмов является двумерным тором, то существует в точности семь таких классов, каждый из которых представляется алгебраическим автоморфизмом двумерного тора, индуцированным некоторой периодической матрицей.

Ключевые слова: периодические гомеоморфизмы, двумерный тор, алгебраический автоморфизм

Для цитирования: Сидоров С. В., Чилина Е. Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.295–307

1. Введение

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2,\mathbb{Z})$, то есть A — целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда она индуцирует отображение $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$f_A : \begin{cases} \overline{x} = ax + by \pmod 1 \\ \overline{y} = cx + dy \pmod 1, \end{cases}$$

которое является **алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**.

Если собственные значения матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей A, называется **гиперболическим** алгебраическим автоморфизмом двумерного тора. В противном случае автоморфизм f_A будем называть **негиперболическим** алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Два алгебраических автоморфизма тора f и g называются **сопряженными**, если существует такой автоморфизм h, что $g = hfh^{-1}$.

Пусть f — алгебраический автоморфизм тора. Множество $K_f = \{hfh^{-1} \mid h$ — алгебраический автоморфизм тора$\}$ называется **классом сопряженности автоморфизма** f.

Обозначим через $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ множество целочисленных матриц порядка 2. Матрица $B \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ называется **подобной** матрице $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ над $\mathbb{Z}$, если существует такая матрица $S \in Gl(2,\mathbb{Z})$, что $B = S^{-1}AS$. Если $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$, то множество $K_A = \{S^{-1}AS \mid S \in Gl(2,\mathbb{Z})\}$ называется **классом подобия матрицы** A.

Таким образом, задача о нахождении классов сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора сводится к задаче о нахождении классов подобия целочисленных унимодулярных матриц второго порядка, собственные значения которых равны по модулю единице. Решение задачи о нахождении классов подобия целочисленных унимодулярных матриц второго порядка, собственные значения которых являются корнями из единицы, было анонсировано в [1] в виде следующей леммы.

Лемма 1.1 (Лемма Баттерсона [1]**)** *Пусть $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ и оба ее собственных значения являются корнями из единицы. Тогда A подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной из следующих матриц:*

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

В разделе 2 установлено, что утверждение леммы 1.1 имеет место для более общей ситуации, когда собственные значения матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ равны по модулю единице, и приведено полное доказательство леммы 1.1, так как в работе [1] автор оставляет часть доказательства для читателя.

Два гомеоморфизма f и g называются **топологически сопряженными**, если существует такой гомеоморфизм h, что $g = hfh^{-1}$.

В предложении 3.2 раздела 3. приведена классификация периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора. Кроме того, в предложении 3.3 установлено, что каждый класс топологической сопряженности не гомотопных тождественному сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора содержит алгебраический автоморфизм.

2. Лемма Баттерсона

В работе [1] С. Баттерсон при доказательстве леммы 1.1 опускает нахождение всех возможных собственных значений, которые может иметь матрица $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$. Автор приводит рассуждения для случая, когда оба собственных значения матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ равны 1, основываясь на Теореме III.12 из книги [2]. Не приводя доказательство для случаев, когда оба собственных значения матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ равны -1 или одно равно 1, а другое -1. Автор утверждает, что они аналогичны случаю, когда оба собственных значения матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ равны 1. На самом деле в случае, когда одно собственное значение матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ равно 1, а другое -1, доказательство требует некоторых дополнительных рассуждений. В качестве доказательства для случая, когда собственные значения матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ являются комплексными числами, С. Баттерсон ссылается на теорему III.13 из книги [2] и результаты работы [6], которые напрямую не связаны с ходом рассуждения доказательства леммы. По этой причине доказательство этой части леммы остается не до конца ясным читателю.

В данном разделе предложение 2.1 устанавливает, что утверждение леммы 1.1 также имеет место для случая, когда собственные значения матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ равны по модулю 1. Кроме того, в ходе его доказательства найдены все возможные собственные значения, равные по модулю 1, которые могут соответствовать матрице $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$, и доказано, что других нет. В разделе представлено полное доказательство леммы Баттерсона, которое опирается на результаты работы [7].

Сначала приведем все необходимые для доказательства предложения.

Предложение 2.1 *Пусть собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $A \in Gl(2,\mathbb{Z})$ равны по модулю единице. Тогда они являются корнями из единицы и имеют вид, соответствующий одному из следующих:*

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
3. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$.
4. $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$.
5. $\lambda_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
6. $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Доказательство.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2,\mathbb{Z})$. Через Δ обозначим определитель матрицы A, а через $f(\lambda)$ – ее характеристический многочлен. Тогда $\Delta = ad - bc = \pm 1$, $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc$.

Найдем собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}).$$

По условию имеем $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Если $(a-d)^2 + 4bc \geq 0$, то $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Поскольку $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc = \Delta = \pm 1$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, то $\lambda_1, \lambda_2 \in \{1, -1\}$. При этом возможны три случая:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
3. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

Если $(a-d)^2+4bc<0$, то $\lambda_{1,2}=\dfrac{1}{2}(a+d\pm i\sqrt{|(a-d)^2+4bc|})\notin\mathbb{R}$. Представив комплексное число λ_j в тригонометрической форме записи $\lambda_j=|\lambda_j|(\cos\phi+i\sin\phi)$, получим $Re\lambda_j=|\lambda_j|\cos\phi=\cos\phi=\frac{a+d}{2}$. Имеем $|\cos\phi|=|Re\lambda_j|=|\dfrac{a+d}{2}|\leq 1$. При условии $a,d\in\mathbb{Z}$ получим, что $|Re\lambda_j|\in\{0,\frac{1}{2},1\}$

Если $|Re\lambda_j|=1$, то $|Im\lambda_i|=(a-d)^2+4bc=0$ — противоречие с условием $(a-$ $-d)^2+4bc<0$. Если $|Re\lambda_j|=0$, то $|Im\lambda_j|=1$. Если $|Re\lambda_i|=\dfrac{1}{2}$, то $|Im\lambda_i|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ – вещественные числа, то при условии, что $|Re\lambda_j|\in\{0,\frac{1}{2}\}$ и $|\lambda_j|=1$, возможны только три случая:

1. $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$
2. $\lambda_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $\lambda_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Каждое из найденных значений λ_j является корнем из единицы, следовательно, утверждение предложения верно. В общем случае утверждение о том, что если все корни целочисленного многочлена со старшим коэффициентом 1 равны по модулю единице, то они являются корнями из единицы, доказано в работе [8].

Напомним, что многочлен ненулевой степени $f\in\mathbb{Q}[\lambda]$ с рациональными коэффициентами называется **неприводимым над** $\mathbb{Q}$, если его нельзя представить в виде произведения многочленов из $\mathbb{Q}[\lambda]$, степень каждого из которых строго меньше степени многочлена f.

Предложение 2.2 (*Теорема 3 из* [7]). *Пусть характеристический многочлен матрицы $A\in\mathbb{Z}^{2\times 2}$ имеет вид $f(\lambda)=(\lambda--\alpha)^2$, где $\alpha\in\mathbb{Z}$. Тогда матрица A подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной матрице вида:*

$$\begin{pmatrix}\alpha & m\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}, m\in\{0,1,2,\dots\}.$$

Предложение 2.3 (*Теорема 4 из* [7]). *Пусть характеристический многочлен матрицы $A\in\mathbb{Z}^{2\times 2}$ имеет вид $f(\lambda)=(\lambda--\alpha)(\lambda-\beta)$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, $\beta>\alpha$. Тогда матрица A подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной матрице вида:*

$$\begin{pmatrix}\alpha & m\\ 0 & \beta\end{pmatrix}, m\in\left\{0,\dots,\left[\frac{\beta-\alpha}{2}\right]\right\}.$$

Предложение 2.4 *Пусть целочисленная матрица A имеет неприводимый над $\mathbb{Q}$ характеристический многочлен $f(\lambda)=\lambda^2-t\lambda+1$, где $t\in\{-1,0,1\}$. Тогда A подобна над $\mathbb{Z}$ некоторой матрице $\begin{pmatrix}a & b\\ c & t-a\end{pmatrix}$, $a\geq 0$, $|b|\geq a+1$, $|c|\geq a+1$.*

Доказательство. Пусть A – целочисленная матрица и $f(\lambda)=\lambda^2-t\lambda+1$. Тогда след матрицы A (сумма ее диагональных элементов) равен t, а $\det(A)=1$, поэтому

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t-x \end{pmatrix}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x \geq 0$. Действительно, если $x < 0$, то взяв $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, получим $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} t-x & z \\ y & x \end{pmatrix}$, $t - x \geq t + 1 \geq 0$.

1. Если $|y| \geq x + 1$, $|z| \geq x + 1$, то A имеет искомый вид ($A = E^{-1}AE$).

2. Если $|y| \leq x$, то разделим x на y с остатком, получим $x = yq_1 + r_1$, где $0 \leq r_1 < |y|$. Тогда для $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_1 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $A_2 = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} r_1 & y \\ c_1 & t-r_1 \end{pmatrix}$.

3. Если $|z| \leq x$, то разделим x на z с остатком, получим $x = zq_2 + r_2$, где $0 \leq r_2 < |z|$. Тогда для $S = \begin{pmatrix} 1 & q_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $A_3 = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} r_2 & b_2 \\ z & t-r_2 \end{pmatrix}$.

После выполнения действий во втором или в третьем случаях для новой матрицы (A_2 или A_3) либо сразу будет справедлив случай 1, либо снова будет справедлив случай 2 или случай 3. Тогда с каждым шагом элемент x в левом верхнем углу матрицы будет уменьшаться. В силу его неотрицательности за конечное число шагов получим случай 1.

Предложение 2.5 *Пусть $f(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + 1$, где $t \in \{-1, 0, 1\}$ — характеристический многочлен матрицы A. Тогда*

1) если $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$, то A подобна над $\mathbb{Z}$ матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) если $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$, то A подобна над $\mathbb{Z}$ матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) если $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$, то A подобна над $\mathbb{Z}$ матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Из предложения 2.4 можно считать, что матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & t-a \end{pmatrix}$, где $t \in \{-1, 0, 1\}$, $-a^2 + at - bc = 1$, $a \geq 0$, $|b| \geq a + 1$, $|c| \geq a + 1$. Заметим, что $bc = -a^2 + at - 1 < 0$ при $t \in \{-1, 0, 1\}$.

Поскольку $bc < 0$ и $|b| \geq a + 1$, $|c| \geq a + 1$, то $-bc = |b| \cdot |c|$ и

$$a^2 - at + 1 = -bc = |b| \cdot |c| \geq (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

что равносильно неравенству $a(t+2) \leq 0$. Если $a > 0$, то имеем $t+2 \leq 0$ — противоречие с условием $t \in \{-1, 0, 1\}$. Следовательно,

$$a = 0,\ bc = -1,\ A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & t \end{pmatrix},$$

причем можно считать, что $b = 1, c = -1$, поскольку для $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & t \end{pmatrix}$.

Таким образом,

1) если $t = 0$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

2) если $t = 1$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

3) если $t = -1$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Перейдем к доказательству леммы Баттерсона.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $M \in Gl(2, \mathbb{Z})$. Согласно предложению 2.1 рассмотрим все возможные случаи собственных значений λ_1, λ_2 матрицы M.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M имеет вид $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Из предложения 2.2 матрица M подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной матрице вида:
$$M_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M имеет вид $f(\lambda) = (\lambda + 1)^2$. Из предложения 2.2 матрица M подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной матрице вида:
$$M_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

3. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M имеет вид $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = \lambda^2 - 1$. Из предложения 2.3 матрица M подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной матрице вида:
$$M_3'(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1\}.$$

   Рассмотрим две матрицы $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   При $m = 0$ имеем $M_3 = S^{-1} M_3'(0) S$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица M_3 подобна над $\mathbb{Z}$ матрице $M_3'(0)$.

   При $m = 1$ имеем $M_4 = S^{-1} M_3'(1) S$, где $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица M_4 подобна над $\mathbb{Z}$ матрице $M_3'(1)$.

   Таким образом, когда одно собственное значение матрицы M равно 1, а другое -1, M подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной из матриц:
$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M равен $f(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i) = \lambda^2 + 1$. Следовательно, из предложения 2.5 матрица M подобна над $\mathbb{Z}$ матрице
$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M равен $f(\lambda) = \left(\lambda - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\right)\left(\lambda - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\right) = \lambda^2 - \lambda + 1$. Следовательно, из предложения 2.5 матрица M подобна над $\mathbb{Z}$ матрице $M_6' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Рассмотрим матрицу $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $M_6 = S^{-1} M_6' S$, где $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица M_6 подобна над $\mathbb{Z}$ матрице M_6'.

   Таким образом, в случае $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ получаем, что M подобна над $\mathbb{Z}$ матрице
$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M равен $f(\lambda) = \left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = \lambda^2 + \lambda + 1$. Следовательно, из предложения 2.5 матрица M подобна над $\mathbb{Z}$ матрице
$$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма Баттерсона доказана.

3. Классы негиперболических автоморфизмов двумерного тора

Из леммы Баттерсона 1.1 и предложения 2.1 следует.

П р е д л о ж е н и е 3.1 *Каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора задается в точности одной из следующих матриц:*

$$M_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Отличный от тождественного, алгебраический автоморфизм двумерного тора f назовем **периодическим**, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f. Верно следующее следствие из предложения 3.1.

С л е д с т в и е 3.1 *Существует 6 классов периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задан в точности одной из следующих матриц:*

$$M_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $M_2(0), M_5, M_6, M_7$ индуцируют сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2, 4, 3 и 6, соответственно. Матрицы M_3, M_4 индуцируют не сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2.

В работе [4] Я. Нильсеном были изучены сохраняющие ориентацию периодические гомеоморфизмы ориентируемых поверхностей. Установлено, что каждому сохраняющему ориентацию гомеоморфизму f периода n ориентируемой поверхности рода p сопоставляется множество точек гомеоморфизма f, период которых строго меньше n. Это множество либо пусто, либо состоит из конечного числа орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k$, $k \geq 1$, периода n_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$. В окрестности любой точки орбиты $\mathcal{O}_i$ существует простая замкнутая инвариантная относительно гомеоморфизма f^{n_i} кривая l_i. Более того, для любого n_i существует число d_i, такое что дуга, принадлежащая кривой l_i, рассматриваемая в направлении против часовой стрелки и заключенная между точками $x \in l_i$ и $f^{n_i d_i}(x) \in l_i$, не содержит других точек орбиты точки x. В силу результатов Я. Нильсена [4] два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма топологически сопряжены посредством сохраняющего ориентацию гомеоморфизма тогда и только тогда, когда им соответствует один и тот же набор данных $(n, p, n_1, ..., n_k, d_1, ..., d_k)$.

В работе [5] такой набор данных назван полной характеристикой и обозначен через κ. Более того, в данной работе были найдены все допустимые полные характеристики сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора. Периодические алгебраические автоморфизмы двумерного тора индуцируют периодические гомеоморфизмы. Таким образом, интерес представляет нахождение классов сопряженности периодических сохраняющих ориентацию автоморфизмов двумерного тора посредством сохраняющего ориентацию автоморфизма. Для этого разобьем классы подобия матриц, индуцирующие классы сохраняющих ориентацию периодических автоморфизмов двумерного тора, на классы подобия с помощью матрицы, определитель которой равен единице.

Введем на множестве $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ **отношение эквивалентности** $\sim$, заданное следующим образом: матрицы $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ и $B \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ находятся в отношении $\sim$ $(A \sim B)$ тогда и только тогда, когда существует такая матрица $T \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$, что $\det T = 1$ и $A = T^{-1}BT$.

Докажем, что каждый класс подобия матриц K_A распадается не более чем на два класса эквивалентности по отношению $\sim$.

Предположим противное. Пусть существует более двух классов эквивалентности по отношению $\sim$ на множестве K_A. Рассмотрим три различных класса эквивалентности по отношению $\sim$ на множестве K_A, которые обозначим через N_1, N_2, N_3. Рассмотрим матрицы $A_1 \in N_1$, $A_2 \in N_2$, $A_3 \in N_3$. Поскольку $A_1, A_2, A_3 \in K_A$, то существуют такие матрицы $D \in Gl(2, \mathbb{Z})$ и $H \in Gl(2, \mathbb{Z})$, что $A_1 = D^{-1}A_2D$ и $A_2 = H^{-1}A_3H$. Однако т. к. матрицы A_1 и A_2, A_2 и A_3 принадлежат различным классам эквивалентности по отношению $\sim$, то $\det D = -1$ и $\det H = -1$. При этом $A_1 = D^{-1}H^{-1}A_3HD = (HD)^{-1}A_3HD$ и $\det HD = \det H \cdot \det D = (-1) \cdot (-1) = 1$, т. е. $A_1 \sim A_3$ и матрицы A_1 и A_3 принадлежат одному классу эквивалентности. Получили противоречие.

Перейдем к разбиению каждого из классов подобных матриц, индуцирующих сохраняющие ориентацию периодические автоморфизмы двумерного тора, на классы эквивалентности по отношению $\sim$.

Рассмотрим класс подобия $K_{M_2(0)}$ матрицы $M_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Если $X \in K_{M_2(0)}$, то существует такая унимодулярная матрица $T \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$, что $X = T^{-1}M_2(0)T$. Поскольку $M_2(0) = -E$, то $X = -T^{-1}ET = -E$.

Следовательно, **класс подобия $K_{M_2(0)}$ состоит из единственной матрицы** $M_2(0)$.

Рассмотрим класс подобия K_{M_5} матрицы $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Каждая из матриц M_5 и $M_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ содержится в классе K_{M_5}, т. к. обе они имеют характеристический многочлен $\lambda^2 + 1$. Докажем, что **матрицы M_5 и M_5^{-1} принадлежат различным классам эквивалентности** по введенному отношению $\sim$. Предположим противное. Пусть существует такая целочисленная матрица второго порядка $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, что $M_5 = T^{-1}M_5^{-1}T$. Перемножив матрицы и приравняв соответствующие элементы, получим:

$$\begin{cases} 0 = -ab - cd \\ 1 = -b^2 - d^2 \\ -1 = a^2 + c^2 \\ 0 = ab + cd \end{cases}.$$

Поскольку данная система равенств не обращается в верные тождества ни при каких целочисленных значениях a, b, c, d, то предположение о том, что $M_5 \sim M_5^{-1}$, неверно.

Рассмотрим класс подобия K_{M_6} матрицы $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Каждая из матриц M_6 и $M_6^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ содержится в классе K_{M_6}, т. к. обе они имеют характеристический многочлен $\lambda^2 + \lambda + 1$. Докажем, что **матрицы M_6 и M_6^{-1} принадлежат различным классам эквивалентности** по введенному отношению $\sim$. Предположим противное. Пусть существует такая целочисленная матрица второго порядка $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, что $M_6 = T^{-1}M_6^{-1}T$. Перемножив матрицы и приравняв соответствующие элементы, получим:

$$\begin{cases} 0 = -ad - ab - cd \\ 1 = -db - b^2 - d^2 \\ -1 = ac + a^2 + c^2 \\ -1 = bc + ab + cd \end{cases}.$$

Рассмотрим равенство $-1 = ac + a^2 + c^2$. С одной стороны, $a^2 + c^2 = -1 - ac \geq 0$, поэтому $ac < 0$. С другой, $(a + c)^2 = ac - 1 \geq 0$, следовательно, $ac > 0$. Таким образом, получили противоречие. Значит, предположение о том, что $M_6 \sim M_6^{-1}$, неверно.

Рассмотрим класс подобия K_{M_7} матрицы $M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Каждая из матриц M_7 и $M_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ содержится в классе K_{M_7}, т. к. обе они имеют характеристический многочлен $\lambda^2 - \lambda + 1$. Докажем, что **матрицы M_7 и M_7^{-1} принадлежат различным классам эквивалентности** по введенному отношению $\sim$. Предположим противное. Пусть существует такая целочисленная матрица второго порядка $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, что $M_7 = T^{-1} M_7^{-1} T$. Перемножив матрицы и приравняв соответствующие элементы, получим:

$$\begin{cases} 0 = ad + ba + dc \\ -1 = db + b^2 + d^2 \\ 1 = -ac - a^2 - c^2 \\ 1 = -bc - ab - cd \end{cases}.$$

Аналогично, рассмотрев равенство $1 = -ac - a^2 - c^2$, получим, что оно не выполняется ни при каких целочисленных значениях a, c. Значит, предположение о том, что $M_7 \sim M_7^{-1}$, неверно.

Переобозначим матрицы следующим образом: $A_1 = M_2(0)$, $A_2 = M_6^{-1}$, $A_3 = M_6$, $A_4 = M_7$, $A_5 = M_7^{-1}$, $A_6 = M_5^{-1}$, $A_7 = M_5$. Тогда в силу вышесказанного верно следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 3.2 *Каждый периодический сохраняющий ориентацию автоморфизм двумерного тора сопряжен с помощью сохраняющего ориентацию алгебраического автоморфизма двумерного тора в точности с одним автоморфизмом f_{A_j}, индуцированным матрицей A_j $(j = \overline{1,7})$:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В работе [5] доказано, что множество всех не гомотопных тождественному сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов тора разбивается в точности на семь классов топологической сопряженности H_j таким образом, что любые два гомеоморфизма, принадлежащих одному классу топологически сопряженных сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов и обладают в точности одной полной характеристикой из множества κ_j $(j = \overline{1,7})$:

1. κ_1: $n = 2$, $p = 1$, $k = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$;
2. κ_2: $n = 3$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
3. κ_3: $n = 3$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 2$;
4. κ_4: $n = 6$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
5. κ_5: $n = 6$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 5$;
6. κ_6: $n = 4$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
7. κ_7: $n = 4$, $p = 1$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = 3$.

Кроме того, в работе [5] также показано, что полная характеристика автоморфизма f_{A_j}, индуцированного матрицей A_j $(j = \overline{1,7})$ равна κ_j.

Обозначим через C_j множество алгебраических автоморфизмов двумерного тора, сопряженных с помощью сохраняющего ориентацию автоморфизма двумерного тора, с автоморфизмом f_{A_j} $(j = \overline{1,7})$.

П р е д л о ж е н и е 3.3 *Справедливо следующее включение* $C_j \subset H_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [4] полная характеристика является полным топологическим инвариантом в классе сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей посредством сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Следовательно, любой автоморфизм множества C_j $(j = \overline{1,7})$ имеет полную характеристику, равную κ_j. Таким образом, автоморфизмы множества C_j являются представителями класса гомеоморфизмов H_j.

Благодарности. Публикация подготовлена по результатам исследования (№ 21-04-004) в рамках программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг. Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

1. Batterson, S. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus // Transactions of the American Mathematical Society. 1979. Vol. 256. pp. 395–403. DOI: https://doi.org/10.2307/1998118

2. Newman M. Integral matrices. New York: Academic Press, 1972. 223 p.

3. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения : сб. науч. тр. / под ред. Н. Ф. Отрокова. Горький: ГГУ, 1985. С. 33–37.

4. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. Kobenhavn: Levin & Munksgaard, 1937. 77 p.

5. Баранов Д. А., Гринес В. З., Починка О. В., Чилина Е. Е. О классификации периодических преобразований двумерного тора // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. (В печати).

6. Montgomery H., Masley J. Cyclotomic fields with unique factorization // J. Reine Angew. Math. 1976. Vol. 286-287. pp. 248–256. DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1976.286-287.248

7. Шевченко В. Н., Сидоров С. В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия ВУЗ. Математика. 2006. № 4. С. 57–64.

8. Kronecker L. Zwei Satze uber Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1857. No. 53. pp. 173–175. DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1857.53.173

Поступила 10.07.2021; доработана после рецензирования 08.08.2021; принята к публикации 25.08.2021

Информация об авторах:

Сидоров Сергей Владимирович, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

Чилина Екатерина Евгеньевна, студентка факультета информатики, математики и компьютерных наук, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). (603150, Россия, г. Нижний Новгород, Б. Печерская, д. 25/12), k.chilina@yandex.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 37E30

On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus

S. V. Sidorov[1], E. E. Chilina[2]

[1] *National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation),*

[2] *National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. This paper contains a complete classification of algebraic non-hyperbolic automorphisms of a two-dimensional torus, announced by S. Batterson in 1979. Such automorphisms include all periodic automorphisms. Their classification is directly related to the topological classification of gradient-like diffeomorphisms of surfaces, since according to the results of V. Z. Grines and A.N. Bezdenezhykh, any gradient like orientation -preserving diffeomorphism of an orientable surface is represented as a superposition of the time-1 map of a gradient-like flow and some periodic homeomorphism. J. Nielsen found necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of orientation-preserving periodic homeomorphisms of orientable surfaces by means of orientation-preserving homeomorphisms. The results of this work allow us to completely solve the problem of realization all classes of topological conjugacy of periodic maps that are not homotopic to the identity in the case of a torus. Particularly, it follows from the present paper and the work of that if the surface is a two-dimensional torus, then there are exactly seven such classes, each of which is represented by algebraic automorphism of a two-dimensional torus induced by some periodic matrix.

Key Words: periodic homeomorphisms, two-dimensional torus, algebraic automorphism

For citation: *S. V. Sidorov, E. E. Chilina.* On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:3(2021), 295–307. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.295–307

References

1. S. Batterson, "The Dynamics of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Torus", *Transactions of the American Mathematical Society*, **256** (1979), 395—403. DOI: https://doi.org/10.2307/1998118

2. N. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, 223 p.

3. A. N. Bezdenezhykh, V. Z. Grines, "Realization of Gradient-Like Diffeomorphisms of Two-Dimensional Manifolds", *Sel. Math. Sov.*, **11**:1 (1992), 19-23.

4. J. Nielsen, *Die Struktur Periodischer Transformationen von Flachen*, Levin & Munksgaard, Kobenhavn, 1937, 77 p.

5. D. A. Baranov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina, "[On Classification of Periodic Maps of 2-torus]", *Russian Math. (Iz. VUZ). Applied Nonlinear Dynamics* (In print.) (In Russ.).

6. H. Montgomery, J. Masley, "Cyclotomic Fields with Unique Factorization", *J. Reine Angew. Math.*, **286-287** (1976), 248–256.

7. V. N. Shevchenko, S. V. Sidorov, "On the similarity of second-order matrices over the ring of integers", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **50**:4 (2006), 56–63.

8. L. Kronecker, "Zwei Satze uber Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten", *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, **53** (1857), 173–175. DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1857.53.173

Submitted 10.07.2021; Revised 08.08.2021; Accepted 25.08.2021

Information about the authors:

Sergey V. Sidorov, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

Ekaterina E. Chilina, student of National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), k.chilina@yandex.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.