DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.273–284
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925.51

Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве

Ж. И. Буранов[1], Д. Х. Хусанов[2]

[1] *Академический лицей ТашГТУ им. Ислама Каримова (г. Ташкент, Узбекистан)*
[2] *Джизакский политехнический институт (г. Джизак, Узбекистан)*

Аннотация. Статья посвящена задаче об устойчивости системы дифференциальных уравнений с правой частью, периодической по части фазовых (угловых) координат. Такие системы удобно рассматривать в цилиндрическом фазовом пространстве, позволяющем проводить более полный и качественный анализ их решений. В работе предлагается исследовать динамические свойства решений неавтономной системы с угловыми координатами на основе построения ее топологической динамики в таком пространстве. Выводится соответствующее свойство квазиинвариантности положительного предельного множества ограниченного решения системы. Задача об устойчивости по части переменных исследуется на основе векторной функции Ляпунова с принципом сравнения и построенной топологической динамики. Доказана теорема типа принципа квазиинвариантности с векторной функцией Ляпунова для рассматриваемого класса систем. Доказаны две теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения по части переменных (неугловым координатам). Новизна данных теорем состоит в требовании лишь устойчивости системы сравнения, в отличие от классических результатов с условием соответствующей асимптотической устойчивости. Полученные в работе результаты позволят расширить применение прямого метода Ляпунова в решении ряда прикладных задач.

Ключевые слова: неавтономная система, цилиндрическое фазовое пространство, устойчивость по части переменных, функция Ляпунова

Для цитирования: Буранов Ж. И., Хусанов Д. Х. Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 273–284. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.273–284

1. Введение

Достаточно широкий класс дифференциальных уравнений, изучаемых при моделировании ряда задач механики, физических процессов, систем автоматического регулирования, составляют уравнения с угловыми координатами. Исследование таких уравнений удобно проводить на основе цилиндрического фазового пространства [1]. Это пространство позволяет в частности выявить важные особенности применения прямого метода Ляпунова в задачах об устойчивости [1–2]. Выделим некоторые результаты в этом направлении, относящиеся непосредственно к данной работе.

Развитие теоремы Барбашина-Красовского о полной асимптотической устойчивости [3] и принципа инвариантности Ла-Салля [4] на системы с угловыми координатами в автономном случае со скалярной функцией Ляпунова, имеющей знакопостоянную производную, приведено в работах [5–6], а в неавтономном случае с такой же функцией Ляпунова – в работе [7]. Оно позволило получить эффективные критерии глобальной управляемости механических систем [5], систем фазовой синхронизации [6], глобального отслеживания траектории многозвенного манипулятора с цилиндрическими шарнирами [7].

Большое место в теории устойчивости занимают метод векторных функций Ляпунова и проблема устойчивости по части переменных, основные положения которых представлены в трудах [8–11]. Широкое применение соответствующих результатов в решении прикладных задач продолжает стимулировать интенсивные исследования этих направлений теории устойчивости [12–16]. К числу перспективных направлений исследования частичной устойчивости нелинейных систем можно отнести подход, основанный на асимптотических методах [17].

Целью настоящей работы является изучение малоисследованной задачи о частичной устойчивости системы дифференциальных уравнений с угловыми координатами на основе векторной функции Ляпунова.

Во втором разделе работы рассматривается построение топологической динамики системы уравнений в цилиндрическом фазовом пространстве. В третьем разделе исследуется применение векторной функции Ляпунова с принципом сравнения для решения исследуемой задачи. Доказывается теорема о локализации положительного предельного множества ограниченного решения системы. Доказываются теоремы о глобальной асимптотической устойчивости по части переменных, о частичной асимптотической устойчивости с притяжением по неконтролируемым координатам. Новизна теорем состоит в предположении лишь свойства устойчивости системы сравнения. В заключении представлен краткий анализ полученных результатов.

2. Топологическая динамика системы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x), \quad X(t,0) \equiv 0, \tag{2.1}$$

где $x \in R^n$, $X(t,x) = (X_1(t,x), X_2(t,x), \ldots, X_n(t,x))^T$ (индекс T означает транспонирование), вещественные функции $X_i(t,x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определены в области $R \times R^n$ и таковы, что переменную x можно разделить $x^T = (y^T, z^T)$, $y \in R^m$, $z \in R^s$, $m + s = n$ таким образом, что функция $X(t,x)$ является 2π-периодической по переменной z, т. е. $X(t,y,z + 2\pi 1_j) = X(t,y,z)$, $(z + 2\pi 1_j) = (z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}, z_j + 2\pi, z_{j+1}, \ldots, z_s)^T$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Решения этой системы можно рассматривать в цилиндрическом фазовом пространстве $R \times R^m \times P^s$, $P^s = \{z \in R^s : \ -\pi \leq z_j \leq \pi, \ j = 1, 2, \ldots, s)$ [1].

Пусть $||y||$ есть некоторая норма вектора y в R^m; $||z||$ – норма вектора z в R^s; $||x|| = ||y|| + ||z||$; L^1 – класс функций $\lambda : R \to R$, интегрируемых локально.

Введем множество F функций $f : R \times R^n \to R^n$, периодических по z с периодом 2π аналогично функции X, непрерывных по $x \in R^n$ при фиксированном $t \in R$, измеримых по t при фиксированном $x \in R^n$ и удовлетворяющих следующим условиям: для каждого компактного множества $K \subset R^m$ существуют функции $\lambda = \lambda_1(t,f,K)$ и $\lambda = \lambda_2(t,f,K)$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in L^1$) такие, что для всех (t,x), $(t,x^{(1)})$, $(t,x^{(2)}) \in R \times K \times P^s$ выполнены неравенства [18]

$$\begin{aligned} &||f(t,x)|| \leq \lambda_1(t,f,K), \\ &||f(t,x^{(2)}) - f(t,x^{(1)})|| \leq \lambda_2(t,f,K)||x^{(2)} - x^{(1)}||, \end{aligned} \tag{2.2}$$

при этом функция $\lambda_1(t,f,K)$ равномерно непрерывна в среднем на R, а $\lambda_2(t,f,K)$ равностепенно ограничена на R, а именно:

1) для $\varepsilon > 0$ найдется зависимость $\nu = \nu(\varepsilon, K) > 0$, такая что для каждого множества $E \subset [t, t+1]$ ($t \in R$ – любое) с мерой $\mu(E) < \nu$ выполнено неравенство

$$\int\limits_E \lambda_1(\tau, f, K) d\tau < \varepsilon; \tag{2.3}$$

2) существует число $N = N(K) > 0$, такое что для каждого $t \in R$

$$\int\limits_t^{t+1} \lambda_2(\tau, f, K) d\tau \leq N(K). \tag{2.4}$$

Для каждой функции $f \in F$ можно определить систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.5}$$

решения которой можно рассматривать в пространстве $R \times R^m \times P^s$, при этом для каждой начальной точки $(t_0, y_0, z_0) \in R \times R^m \times P^s$ решение $x = x(t, t_0, x_0) = (y(t, t_0, y_0, z_0), z(t, t_0, y_0, z_0))^T$ будет существовать, являться единственным и продолжимым на некотором интервале $(\alpha(f, t_0, x_0), \beta(f, t_0, x_0))$, $\alpha < t_0 < \beta$, так, что если $\alpha > -\infty$ (или $\beta < \infty$), то $||y(t, t_0, x_0)|| \to \infty$ при $t \to \alpha$ (соответственно, $||y(t, t_0, x_0)|| \to \infty$ при $t \to \beta$).

Следуя работе [18], введем сходимость: последовательность $\{f_k \in F\}$ сходится к $f^* \in F$, если для каждого $t \in R$ и каждого $x = (y, z) \in R^m \times P^s$

$$\left\| \int\limits_0^t (f^{(k)}(\tau, x) - f^*(\tau, x)) d\tau \right\| \to 0$$

при $k \to \infty$.

На основании [18] можно утверждать, что пространство F с такой сходимостью метризуемо и компактно.

Предположим, что функция X исходной системы (2.1) принадлежит множеству F, $X \in F$. Значит, системе (2.1) можно сопоставить семейство предельных систем [18]

$$\dot{x} = X^*(t, x), \quad X^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \to \infty} \int\limits_0^t X(t_k + \tau, x) d\tau, \tag{2.6}$$

где функция $X^* \in F$ определяется в зависимости от последовательности $t_k \to \infty$.

Введем следующее определение положительного предельного множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (2.1), полагая, что Z есть множество целых чисел.

О п р е д е л е н и е 2.1 *Точка $p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in R^m \times P^s$ называется положительной предельной точкой решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (2.1), если существуют последовательности $t_k \to \infty$ и $L^{(k)} = (l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots, l_s^{(k)})$, $l_j^{(k)} \in Z^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, такие что*

$$y(t_k, t_0, x_0) \to p^{(1)}, \ z(t_k, t_0, x_0) - 2\pi L^{(k)} \to p^{(2)} \text{ при } k \to \infty. \tag{2.7}$$

Множество $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ всех таких точек есть положительное предельное множество.

О п р е д е л е н и е 2.2 *Множество $M \subset R^m \times P^s$ называется квазиинвариантным по отношению к системе (2.1), если $\forall p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in M$ найдется предельная система (2.6), такая что ее решение $x = x(t, 0, p)$ таково, что $x(t, 0, p) \in M$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$ $(\alpha < 0 < \beta)$, где (α, β) – интервал определения этого решения.*

Заметим, что $M \subset R^m \times P^s$ и свойство квазиинвариантности подразумевает, что существует последовательность $L^{(k)} \in Z^k$, такая что $(y(t, 0, p), z(t, 0, p) - 2\pi L^k) \in M$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$.

Справедливо следующее утверждение динамического типа.

Т е о р е м а 2.1 *Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ есть некоторое решение системы (2.1), ограниченное по y компактом $K \subset R^m$ при всех $t \geq t_0$. Тогда положительное предельное множество решения $x = x(t, t_0, x_0)$ связно, компактно и квазиинвариантно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Связность и компактность $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ доказывается аналогично работе [19] с учетом ограниченности по z в силу 2π – периодичности функции $X = X(t, x)$ по переменным z.

Докажем свойство квазиинвариантности множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$.

Пусть $p \in \omega^+(t_0, x_0)$, $p \in R^m \times P^s$ есть положительная предельная точка этого решения, так что существуют последовательности $\{t_k \in R^n,\ t_k \to \infty\}$ и $\{L^{(k)} \in Z^k\}$, такие что выполнены соотношения (2.7).

Из последовательности $\{t_k\}$ выберем подпоследовательность $\{t_{k_j}\} \subset \{t_k\}$ (для удобства изложения будем считать, что это та же самая последовательность $\{t_k\}$), для которой определяется предельная система (2.6). Будем также считать, что последовательность функций $(y^{(k)}(t), z^{(k)}(t))$, определяемая равенствами $y^{(k)}(t) = y(t_k + t, t_0, x_0)$, $z^{(k)}(t) = z(t_k + t, t_0, x_0) - 2\pi L^{(k)}$, сходится равномерно по $t \in [-T, T]$ для каждого $T > 0$ к $x^*(t) = (y^*(t), z^*(t))$. При этом имеем последовательно следующие соотношения:

$$x = x(t) = x(t, t_0, x_0) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau))d\tau,$$

$$x^{(k)}(t) = x(t_k + t) = x(t_k) + \int\limits_{0}^{t} X(t_k + \tau, x^{(k)}(\tau))d\tau.$$

Из этого следует, что

$$y^{(k)}(t) = y(t_k) + \int\limits_{0}^{t} X^{(k)}(\tau, y^{(k)}(\tau), z^{(k)} - 2\pi L^{(k)})d\tau,$$

$$z^{(k)}(t) = z(t_k) - 2\pi L^{(k)} + \int\limits_{0}^{t} X^{(k)}(\tau, y^{(k)}(\tau), z^{(k)} - 2\pi L^{(k)})d\tau.$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при $t_k \to \infty$, получим равенство

$$x^*(t) = p + \int\limits_{0}^{t} X^*(\tau, x^*(\tau))d\tau.$$

Таким образом, $x = x^*(t)$ является решением некоторой предельной системы (2.6), удовлетворяющим условию $x^*(0) = p$. При этом по построению $x^*(t)$ можно переопределить с учетом 2π-периодичности (2.6) так, что $\{x^*(t), t \in R\} \subset \omega^+(x(t, t_0, x_0))$. Теорема доказана.

Построенная топологическая динамика является развитием результатов классического характера работ [18–19] для систем с цилиндрическим фазовым пространством.

3. Теоремы об устойчивости

Введем следующие классы функций.

1. Класс $\mathcal{K}_1$ векторных функций $V = (V^1, V^2, \ldots, V^r)^T$, $V : R \times R^n \to R^r$, являющихся ограниченными и равномерно непрерывными на каждом множестве $R^+ \times K_1$, где $K_1 = \{x \in R^n : \ ||x|| \leq H_1 = const > 0\}$.

2. Класс $\mathcal{K}_2$ векторных функций $U : R^+ \times R^r \to R^r$, ограниченных и равномерно непрерывных на каждом множестве $K_2 = \{u \in R^r : \ ||u|| \leq H_2 = const > 0\}$.

3. Класс $\mathcal{K}_3$ векторных функций $W : R^+ \times R^m \times P^s \times R^r \to R^r$, 2π – периодических по третьему аргументу, ограниченных и равномерно непрерывных на каждом множестве $R \times K_1 \times P^s \times K_2$.

Можно ввести соответствующие функциональные пространства непрерывных векторных функций $F_1 = \{V : R \times R^n \to R^n\}$, $F_2 = \{U : R \times R^r \to R^r\}$, $F_3 = \{W : R \times R^m \times P^s \times R^r \to R^r\}$ с открыто-компактной топологией [19].

Семейства сдвигов $\{V_\tau(t,x) = V(\tau + t, x),\ \tau \in R^+\}$, $\{U_\tau(t,u) = U(\tau + t, u),\ \tau \in \in R^+\}$, $\{W_\tau(t,x,u) = W(\tau + t, x, u),\ \tau \in R^+\}$ функций $V \in \mathcal{K}_1$, $U \in \mathcal{K}_2$, $W \in \mathcal{K}_3$ будут предкомпактны соответственно в F_1, F_2, F_3 [19].

Таким образом, можно определить семейства $\{V^*\}$, $\{U^*\}$, $\{W^*\}$ соответствующих предельных функций, а также предельные совокупности $\{X^*, V^*, U^*, W^*\}$ [19].

Пусть для системы (2.1) найдется непрерывно дифференцируемая функция $V \in \mathcal{K}_1$, производная которой в силу этой системы представима в виде [15; 20]

$$\begin{aligned} &\dot V(t,x) = U(t, V(t,x)) + W(t, x, V(t,x)), \\ &V(t,0) = 0,\ U(t,0) = 0,\ W(t,0,0) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где функция $U = U(t,u)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_2$, $U \in \mathcal{K}_2$, и является квазимонотонной и непрерывно дифференцируемой по $u \in R^r$, функция $W = W(t,x,u)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_3$, $W \in \mathcal{K}_3$, и удовлетворяет неравенствам $W_j(t,x,u) \leq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ для любых $(t,x,u) \in R^+ \times R^m \times P^s \times R^r$.

Из равенства (2.5) следует, что функция $V(t,x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot u = U(t,u) \tag{3.2}$$

является системой сравнения.

Если $V = V(t,x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению (3.1), при этом $V(t_0,x_0) = V_0$, а $u = u(t,t_0,V_0)$ есть решение (3.2), определенное на интервале $[t_0, t_0+\beta)$, $\beta > 0$, то для всех $t \in [t_0, t_0+\beta)$ на решении $x = x(t,t_0,x_0)$ системы (2.1) выполняется неравенство [12]

$$V(t, x(t,t_0,x_0)) \leq u(t,t_0,V_0). \tag{3.3}$$

Поскольку $U \in \mathcal{K}_2$, то система (3.2) является предкомпактной и для неё существует семейство предельных систем сравнения

$$\dot u = U^*(t,u), \quad U^* \in F_2. \tag{3.4}$$

Рассматривая условия относительно правой части $U = U(t, u)$ системы (3.2), получим, что каждое решение $u = u(t, t_0, u_0)$ этой системы непрерывно дифференцируемо по $(t_0, u_0) \in R^+ \times R^r$, при этом из свойства неубывания функции $u(t, t_0, u_0)$ по переменной u_0 следует, что матрица

$$\Phi(t, t_0, u_0) = \frac{\partial u(t, t_0, u_0)}{\partial u_0}$$

является неотрицательной и нормированной, т. е. $(\Phi(t, t_0, u_0))_{jl} \geq 0$ $(j, l = 1, 2, \ldots, r)$, $\Phi(t_0, t_0, u_0) = I$.

Предположим, что для любого компакта $K_2 = \{u \in R^r : \ ||u|| \leq H_2 > 0\}$ существуют числа $M(K_2)$ и $\alpha(K_2)$, такие что матрица Φ для любых $(t, t_0, u_0) \in R^+ \times R^+ \times K_2$ удовлетворяет условиям

$$||\Phi(t, t_0, u_0)|| \leq M(K_2), \quad \det \Phi(t, t_0, u_0) \geq \alpha(K_2) > 0. \tag{3.5}$$

Имеет место следующая теорема о локализации положительного предельного множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ решения системы (2.1).

Теорема 3.1 *Допустим, что $x = x(t, t_0, x_0)$ есть некоторое решение системы (2.1) и найдется векторная функция Ляпунова $V \in K_1$, такая что*

1) $||V(t, y, z)|| \to \infty$ равномерно по $(t, z) \in R^+ \times P^s$ при $||y|| \to \infty$;

2) $V(t, y, z)$ ограничена при $||y|| \leq H = const > 0$, $||V(t, y, z)|| \leq m(H)$ $\forall (t, y, z) \in \in R^+ \times \{y : \ ||y|| \leq H\} \times P^s$;

3) производная $\dot{V}$ удовлетворяет равенству (3.1);

4) решения системы сравнения (3.2) удовлетворяют условию (3.5);

5) решение $u(t, t_0, V_0)$ системы сравнения (3.2), где $V_0 = V(t_0, x_0)$ ограничено при всех $t \geq t_0$.

Тогда выполняется соотношение $\omega^+(x(t, t_0, x_0)) \subset M$, где M – максимальное инвариантное подмножество множества $\{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\}$, $u^*(t)$ есть решение соответствующей предельной системы сравнения (3.4) с начальным условием $u^*(0) = = V^*(0, p)$ для выбранной точки $p \in \omega^+(x(t, t_0, x_0))$.

Доказательство. Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ есть какое-либо решение уравнения (2.1). Оно определено по крайней мере при некоторых $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$, $\alpha, \beta > 0$. При этом $x(t, t_0, x_0)$ удовлетворяет неравенству (3.3). Однако тогда из условий 1, 2 и 5 теоремы следует, что это решение является ограниченным по y и определено при всех $t \geq t_0$, так что существует такое $H > 0$, что выполнено соотношение

$$x(t, t_0, x_0) \in \{y \in R^m : \ ||y|| \leq H\} \cap P^s \quad \forall t \geq t_0.$$

Из равенства (3.1) имеем при всех $t \geq t_0$ следующее соотношение между зависимостью $V(t, x[t]) = V(t, x(t, t_0, x_0))$ и решением $u = u[t] = u(t, t_0, V_0)$, $V_0 = V(t_0, x_0)$ системы сравнения (3.2) [15; 20]

$$V(t, x[t]) = u[t] + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau, V(\tau, x[\tau]))W(\tau, x[\tau], V(\tau, x[\tau]))d\tau. \tag{3.6}$$

Следуя [15; 20], можно показать, что из этого равенства следует

$$\lim_{t \to \infty} W(t, x[t], V(t, x[t])) = 0. \tag{3.7}$$

По теореме 2.1 положительное предельное множество $\omega^+(x(t,t_0,x_0))$ будет связным, компактным и квазиинвариантным.

Для предельной точки $p \in \omega^+(x(t,t_0,x_0))$ определим предельную систему (2.6) и ее решение $x = x^*(t)$, $x^*(0) = p$, предельную систему сравнения (3.4) и ее решение $u = u^*(t) = u^*(t,0,u_0^*)$, $u_0^* = V^*(0,p)$, а также предельную функция $W^*(t,x,u)$. Из равенств (3.6) и (3.7) выведем

$$V^*(t,x^*(t)) = u^*(t), \quad W^*(t,x^*(t),u^*(t)) = 0.$$

что и доказывает теорему.

В соответствие векторной функции $V = (V^1, V^2, \ldots, V^r)^T$ введем скалярную функцию

$$\bar{V}(t,x) = \sum_{j=1}^{r} V^j(t,x).$$

Введем класс $\mathcal{K}_4$ непрерывных функций типа Хана $a_i : R^+ \to R^+$, $a_i(0) = 0$, a_i строго монотонно возрастает, $i = 1,2$ [21].

Т е о р е м а 3.2 *Предположим, что для системы (2.1) можно найти векторную функцию $V = V(t,x)$, такую что:*

1) $a_1(||y||) \le \bar{V}(t,x) \le a_2(||x||)$ $\forall (t,y,z) \in R^+ \times R^m \times P^s$, $a_1, a_2 \in \mathcal{K}_4$, $a_1(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$;

2) выполнены условия 3 и 4 теоремы 3.1;

3) решение $u = 0$ системы сравнения (3.2) равномерно устойчиво;

4) для каждой предельной совокупности $\{X^*, V^*, W^*, U^*\}$ множество $\{W^*(t,x,u^*(t)) = 0\} \cap \{\bar{V}^*(t,x) > 0\}$ не содержит целых решений системы (2.6), где $u^*(t) \ne 0$ есть любое ненулевое решение системы (3.4).

Тогда решение $x = 0$ системы (2.1) глобально равномерно асимптотически устойчиво по y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий 1–3 теоремы следует, что решение $x = 0$ системы (2.1) равномерно устойчиво по y [11; 13]. Из условия $\bar{V}(t,x) \ge a_1(||y||)$ и 2π – периодичности системы (2.1) по z находим, что решения этой системы равномерно ограничены. Из условия 4 теоремы найдем, что для любого решения $x = x(t,t_0,x_0)$ системы (2.1) функция V такова, что

$$\bar{V}(t, x(t,t_0,x_0)) \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

равномерно по $(t_0, x_0) \in R^+ \times \{y \in R^m : \ ||y|| \le H\} \times P^s$.

Однако тогда из условия $\bar{V}(t,x(t,t_0,x_0)) \ge a_1(||y(t,t_0,x_0)||)$ следует, что $||y(t,t_0,x_0)|| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $(t_0,x_0) \in R^+ \times \{y \in R^m : \ ||y|| \le H\} \cap P^s$. Теорема доказана.

В ряде прикладных задач система типа (2.1) может иметь на множестве $\{x \in R^n : y = 0, \ z \in P^s\}$ иные положения равновесия, кроме $x = 0$. Для таких систем эффективна следующая теорема.

Т е о р е м а 3.3 *Предположим, что для системы (2.1) можно найти векторную функцию $V = V(t,x)$, такую что выполнены условия 1–3 Теоремы 3.2, а также:*

4) $V(t,0,z+2\pi 1_j) = 0$, $j = 1,2,\ldots,s$;

5) для каждой предельной совокупности $\{X^*, V^*, W^*, U^*\}$ множество $\{W^*(t,x,u^*(t)) = 0\} \setminus \{x \in R^n : \ y = 0, \ z = \pi L^{(k)}\}$ не содержит решений системы (2.6), где $u^*(t) \neq 0$ есть любое ненулевое решение системы (3.4).

Тогда:

1) решение $x = 0$ и соответственно множество положений равновесия $\{x \in R^n : y = 0, \ z = 2\pi L^{(k)}\}$ системы (2.1) равномерно асимптотически устойчивы по y;

2) множество положений равновесия $\{x \in R^n : \ y = 0, \ z = \pi L^{(k)}\}$ системы (2.1) является глобально притягивающим по y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в случае теоремы 3.2, из условий 1–3 теоремы определяем свойство равномерной устойчивости по y решения $x = 0$ системы (2.1), а с ним всего множества $\{x \in R^n : \ y = 0, \ z = 2\pi L^{(k)}\}$ в силу условия 4. Из этих же условий 1–3 имеем свойство равномерной ограниченности решений системы (2.1). Отсюда и из условия 5 на основании теоремы 2.1 получаем второй вывод теоремы.

4. Заключение

Теорема 3.1 представляет собой принцип квазиинвариантности для неавтономной системы с цилиндрическим фазовым пространством на основе применения векторной функции Ляпунова с принципом сравнения. Указанные во введении результаты работ [5–7] для таких систем являются ее частным случаем. Теоремы 3.2–3.3 представляют собой достаточные условия асимптотической устойчивости исследуемой системы по неугловым координатам, глобальной по теореме 3.2, нелокальной с притяжением по угловым координатам согласно теореме 3.3. Они развивают и обобщают соответствующие результаты работ [10; 16; 20; 22] и представляют собой достаточный интерес применительно к задачам механики и автоматического регулирования.

Список литературы

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Физматгиз, 1969. 302 с.

2. Леонов Г. А. Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 1. С. 91–112.

3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

4. La Salle J. P. Stability theory for ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1968. Vol. 4, issue 1. pp. 57–65.

5. Каюмов О. Р. Асимптотическая устойчивость в большом в системах с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. вузов. Матем. 1987. № 10. С. 61–63.

6. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. СПб.: Невский диалект, 2002. 112 с.

7. Andreev A. S., Peregudova O. A. On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space // International Journal of Control. 2020. Vol. 93, No. 2. pp. 3003–3015.

8. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М: Физматлит, 2001. 380 с.

9. Румянцев В. В. Об устойчивости по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика, физика, астрономия, химия. 1957. № 4. С. 9–16.

10. Corduneanu C. Some problems, concerning partial stability // Sympos. Math. 1971. Vol. 6. pp. 141–154.

11. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

12. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука., 1987. 312 с.

13. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.

14. Воротников В. И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автомат. и телемех. 2005. Вып. 4. С. 3–59.

15. Перегудова О. А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск: УлГУ, 2009. 253 с.

16. Хусанов Дж. Х., Бердиеров А. Ш., Буранов Ж. И. Метод сравнения в задачах устойчивости по части переменных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюллетень Института Математики. 2020. № 4. С. 147–163.

17. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: Теория и приложения. Саранск: СВМО, 2001. 300 с.

18. Artstein Z. Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. pp. 216–223.

19. Sell G. R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 127, No. 2. pp. 241–283.

20. Андреев А. С., Перегудова О. А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // ПММ. 2006. Т. 70, вып. 6. С. 965–976.

21. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 304 с.

22. Хатвани Л. О применении дифференциальных неравенств к теории устойчивости // Вестник Московского университета. Сер. Математика и механика. 1975. № 3. С. 83–89.

Поступила 16.07.2021; доработана после рецензирования 20.08.2021; принята к публикации 30.08.2021

Информация об авторах:

Буранов Жамшид Имамкулович, аспирант Академического лицея Ташкентского государственного технического университета имени Ислама Каримова (100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 2), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4366-4021, juventus88.60.94@mail.ru

Хусанов Джуманазар Хусанович, профессор Джизакского политехнического института (130100, Узбекистан, Джизак, ул. И. Каримова, 4), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9444-9324, d.khusanov1952@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 34D20

On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space

J. I. Buranov[1], D. Kh. Khusanov[2]

[1] *Academic Lyceum of Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)*

[2] *Jizzakh Polytechnic Institute (Jizakh, Uzbekistan)*

Abstract. The stability problem of a system of differential equations with a right-hand side periodic with respect to the phase (angular) coordinates is considered. It is convenient to consider such systems in a cylindrical phase space which allows a more complete qualitative analysis of their solutions. The authors propose to investigate the dynamic properties of solutions of a non-autonomous system with angular coordinates by constructing its topological dynamics in such a space. The corresponding quasi-invariance property of the positive limit set of the system's bounded solution is derived. The stability problem with respect to part of the variables is investigated basing of the vector Lyapunov function with the comparison principle and also basing on the constructed topological dynamics. Theorem like a quasi-invariance principle is proved on the basis of a vector Lyapunov function for the class of systems under consideration. Two theorems on the asymptotic stability of the zero solution with respect to part of the variables (to be more precise, non-angular coordinates) are proved. The novelty of these theorems lies in the requirement only for the stability of the comparison system, in contrast to the classical results with the condition of the corresponding asymptotic stability property. The results obtained in this paper make it possible to expand the usage of the direct Lyapunov method in solving a number of applied problems.

Key Words: non-autonomous system, cylindrical phase space, stability with respect to the part of variables, Lyapunov function

For citation: *J. I. Buranov, D. Kh. Khusanov.* On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:3(2021), 273–284. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.273–284

References

1. Barbashin E. A., Tabueva V. A., *[Dynamical systems with a cylindrical phase space]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 302 p.

2. Leonov G. A., “A Class of Dynamical Systems with Cylindrical Phase Spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **17** (1976), 72–90.

3. Krasovskii N. N., *Stability of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1963, 194 p.

4. La Salle J. P., “Stability Theory for Ordinary Differential Equations”, *J. Differ. Equat.*, **4**:1 (1968), 57–65.

5. Kayumov O. R., “Asymptotic Stability in the Large in Systems with a Cylindrical Phase Space”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **31**:10 (1987), 79–82.

6. Leonov G. A., Seledzhi S. M., *[Systems of Phase Synchronization in Analog and Digital Circuit Technology]*, Nevskii Dialekt, St. Petersburg, 2002 (In Russ.), 112 p.

7. Andreev A. S., Peregudova O. A., “On Global Trajectory Tracking Control of Robot Manipulators in Cylindrical Phase Space”, *International Journal of Control*, **93**:2 (2020), 3003–3015.

8. Matrosov V. M., *Method of Lyapunov Vector Functions: Analysis of Dynamical Properties of Nonlinear Systems*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 380 p.

9. Rumyantsev V. V., “[On Stability with Respect to Some of the Variables]”, *Vestnik MGU. Ser. Mat., Mechanics, Phys., Astron., Chem.*, 1957, no. 4, 9–16 (In Russ.).

10. Corduneanu C., “Some Problems, Concerning Partial Stability”, *Sympos Math.*, **. 6** (1971), 141–154.

11. Rumyantsev V. V., Oziraner A. S., *Stability and Stabilization of Motion in Relation to Some of the Variables*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 p.

12. *The Vector Lyapunov Functions in Stability Theory*, eds. R. Z. Abdullin, R. Z. Kozlov, V. M. Matrosov, others, World Federation Publishers Inc., 1996, 394 p.

13. Vorotnikov V. I., Rumyantsev V. V., *Stability and Control in a Part of Coordinate of the Phase Vector of Dynamic Systems: Theory, Methods, and Applications*, Nauchnyy Mir Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.

14. Vorotnikov V. I., “Partial Stability and Control: The State-of-the-Art and Development Prospects”, *Automation and Remote Control*, 2005, no. 66, 511–561.

15. Peregudova O. A., *Comparison Method in Problems of Stability and Motion Control of Mechanical Systems*, UlGU Publ., Ulyanovsk, 2009 (In Russ.), 253 p.

16. Khusanov J. Kh., Berdierov A. Sh., Buranov Zh. I., “[Comparison Method in Problems of Stability in Terms of Variables for Solutions of Ordinary Differential Equations]”, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2020, no. 4, 147–163 (In Russ.).

17. Voskresenskiy E. V., *[Asymptotic Methods: Theory and Applications]*, SVMO Publ., Saransk, 2001 (In Russ.), 300 c.

18. Artstein Z., “Topological Dynamics of Ordinary Differential Equations”, *J. Differ. Equat.*, **23** (1977), 216–223.

19. Sell G. R., “Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics. I, II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127**:2 (1967), 241–283.

20. Andreyev A. S., Peregudova O. A., “The Comparison Method in Asymptotic Stability Problems”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **70**:6 (2006), 865–875.

21. Rouche N., Habets P., Laloy M., *Stability Theory by Lyapunov’s Direct Method*, Springer-Verlag, New York, 1977, 396 p.

22. Hatvani L., “On the Application of Differential Inequalities to Stability Theory”, *Moscow University Bulletin. Ser. Mathematics and Mechanics*, 1975, no. 3, 83–89.

Submitted 16.07.2021; Revised 20.08.2021; Accepted 30.08.2021

Information about the authors:

Jamshid I. Buranov, Graduate Student, Academic Lyceum of Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (2 University St., Tashkent 100095, Uzbekistan), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4366-4021, juventus88.60.94@mail.ru

Jumanazar Kh. Khusanov, Professor, Jizzakh Polytechnic Institute (4 I. Karimov St., Jizakh 130100, Uzbekistan), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9444-9324, d.khusanov1952@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.