DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.185–192
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.624

Метод упрощения для нелинейных уравнений монотонного типа в банаховом пространстве

И. П. Рязанцева

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В банаховом пространстве изучается операторное уравнение с монотонным оператором T, действующим из банахова пространства в его сопряжённое, причем $T = AC$, где A и C – операторы некоторых классов. Рассматриваемая задача относится к классу некорректных задач. По этой причине для её решения предлагается операторный метод регуляризации. Этот метод строим, используя не оператор T исходного уравнения, а более простой оператор A, который является B-монотонным, $B = C^{-1}$. Существование оператора B предполагается. Кроме того, при построении операторного метода регуляризации используем дуальное отображение с некоторой масштабной функцией. При этом операторы и правая часть заданного уравнения предполагаются возмущёнными. Установлены требования на геометрию банахова пространства и условия согласования уровней возмущений данных и параметра регуляризации, которые обеспечивают сильную сходимость построенных приближений к некоторому решению исходного уравнения. Приведен пример задачи в пространстве Лебега, для которой применим предложенный метод.

Ключевые слова: банахово пространство, сопряжённое пространство, строго выпуклое пространство, E-пространство, монотонный оператор, B-монотонный оператор, дуальное отображение с масштабной функцией, операторный метод регуляризации, возмущённые данные, сходимость.

Для цитирования: Рязанцева И. П. Метод упрощения для нелинейных уравнений монотонного типа в банаховом пространстве // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 185–192. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.185–192

1. Постановка задачи

Пусть X – вещественное рефлексивное равномерно гладкое банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряжённым X^*, $\langle u, v\rangle$ при $u \in X^*,\ v \in X$ есть отношение двойственности между пространствами X и X^*. Пусть X является E-пространством, т. е. из сходимостей $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n\| \to \|x\|$ следует, что $x_n \to x$, где $x_n \in X$ при всех $n \geq 1, x \in X$.

Рассмотрим в X уравнение

$$Tx = f, \tag{1.1}$$

где оператор $T : X \to X^*$; элемент $f \in X^*$, причём T – монотонное отображение на X.

Предположим, что $T = AC$, где $A : X \to X^*,\ C : X \to X,\ D(C) = X,\ R(C) \subseteq D(A)$, оператор A деминепрерывен, и существует непрерывный оператор $B = C^{-1} : X \to X$.

Запишем условие монотонности оператора T:

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X,$$

т. е. верно неравенство

$$\langle ACu - ACv, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \tag{1.2}$$

Пусть $Cu = x, Cv = y$, т.е. $u = C^{-1}x = Bx, v = C^{-1}y = By$, тогда неравенство (1.2) примет следующий вид:

$$\langle Ax - Ay, Bx - By\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in R(C), \tag{1.3}$$

т. е. оператор $A : X \to X^*$ является B-монотонным (см. [1]), где $B : X \to X$.

Если в (1.3) равенство возможно только при $x = y$, то оператор A называется строго B-монотонным.

Поскольку уравнение (1.1) можно переписать в виде $ACx = f$, то приняв обозначение $Cx = z$, от (1.1) придём к уравнению

$$Az = f, \tag{1.4}$$

с B-монотонным деминепрерывным оператором $A : X \to X^*$ и элементом $f \in X^*$.

Таким образом, от уравнения (1.1) с монотонным оператором $T : X \to X^*$ мы пришли к уравнению (1.4) с B-монотонным деминепрерывным оператором $A : X \to X^*$, где $B : X \to X$ – непрерывный оператор.

Далее считаем, что $B^{-1} : X \to X$ – непрерывное отображение.

2. Основной результат

Пусть уравнение (1.1) имеет непустое множество решений N. Значит, и множество

$$N_B = \{Bx | x \in N\}$$

также непусто. Поскольку T – максимальный монотонный оператор, то используя линейность (1.3) относительно Bx и By, подобно [1–3] доказывается выпуклость и замкнутость множества N_B. Следовательно, найдётся единственный элемент $v^* \in N_B$ такой, что

$$\|v^*\| = \|Bz^*\| = \min\{\|v\| \mid v \in N_B\}. \tag{2.1}$$

В наших предположениях задача нахождения решения уравнения (1.4) некорректна. Построим для (1.4) регуляризованное операторное уравнение следующего вида:

$$Ax_\alpha + \alpha J^\mu Bx_\alpha = f, \quad \alpha > 0, \tag{2.2}$$

где $J^\mu : X \to X^*$ – дуальное отображение в X с некоторой масштабной функцией $\mu(t)$, т. е. (см. [2, с. 315; 4, с. 65])

$$\|J^\mu x\| = \mu(\|x\|), \langle J^\mu x, x\rangle = \mu(\|x\|)\|x\| \quad \forall x \in X,$$

$$\langle J^\mu u - J^\mu v, u - v\rangle \geq [\mu(\|u\|) - \mu(\|v\|)]\,(\|u\| - \|v\|) \quad \forall u, v \in X. \tag{2.3}$$

Здесь $\mu(t)$ – вещественная непрерывная и возрастающая функция, определённая при $t \geq 0$, причем $\mu(0) = 0, \mu(t) \to +\infty$ при $t \to \infty$. В силу строгой монотонности оператора J^μ (см. [3, лемма 1.5.5]) элемент Bx_α из (2.2) определяется однозначно.

Пусть $Bx_\alpha = u_\alpha \in X$, перепишем равенство (2.2) в следующем виде:

$$Tu_\alpha + \alpha J^\mu u_\alpha = f, \tag{2.4}$$

где $T : X \to X^*$ – монотонный деминепрерывный оператор с $D(T) = X$. Согласно работе [3, с. 126] имеет место сходимость $u_\alpha \to x^*$ при $\alpha \to 0$, где $\|x^*\| = \min\{\|x\| | x \in$

$N\}$, т. е. x^* – единственное нормальное решение уравнения (1.1). Поскольку $x_\alpha = B^{-1}u_\alpha$ и оператор B^{-1} в наших предположениях непрерывен, то $x_\alpha \to \bar{x}^* = B^{-1}x^*$, причём $\bar{x}^*$ – решение уравнения (1.4).

Рассмотрим случай возмущённых данных. Пусть вместо операторов $A : X \to X^*, B : X \to X$ и элемента $f \in X^*$ известны их приближения $A^h : X \to X^*, B^h : X \to X$, $f^\delta \in X^*$ такие (сравни с [3, с. 124]), что

$$\|Au - A^h u\| \le g(\|u\|)h, \quad \|Bu - B^h u\| \le qh \ \ \forall u \in X, \ \ q > 0 \ \ \|f - f^\delta\| \le \delta, \tag{2.5}$$

причём A^h является B^h-монотонным оператором при $h > 0$, $D(A) = D(A^h)$, $D(B) = D(B^h)$, A^h и B^h сохраняют свойства операторов A и B соответственно. Функция $g(t)$ из (2.5) определена при $t \ge t_0$ и переводит ограниченное множество в ограниченное.

Записать условие близости типа (2.5) для оператора $T = AB^{-1} : X \to X^*$ и возмущённого оператора $T^h = A^h(B^h)^{-1} : X \to X^*$ не всегда удаётся, поскольку нелинейные операторы B^{-1} и $(B^h)^{-1}$ не всегда можно представить в явном виде. Кроме того, условия (2.5) соответствуют задаче упрощения нелинейного уравнения (1.1).

Следовательно, уравнение (2.2) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$A^h x_\alpha^\Delta + \alpha J^\mu u_\alpha^\Delta = f^\delta, \tag{2.6}$$

здесь $\alpha > 0; \Delta = \{\delta, h\}; x_\alpha^\Delta \in X; u_\alpha^\Delta = B^h x_\alpha^\Delta \in X$.

Покажем однозначную разрешимость уравнения (2.6). Оператор $F_\alpha^\Delta : X \to X^*$, $F_\alpha^\Delta u = A^h u + \alpha J^\mu B^h u$ в силу B^h-монотонности отображения A^h и строгой монотонности J^μ обладает свойством строгой B^h-монотонности.

Сделаем дополнительные предположения. Пусть

$$\|A^h y\| \le P(\|B^h y\|) \ \ \forall y \in X, \ \ B^h y \in X, \tag{2.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\mu(t)}{P(t)} = +\infty, \tag{2.8}$$

где $P(s)$ – неотрицательная непрерывная функция при $s \ge 0$. Тогда (сравни с [1]) с учётом (2.7), B^h-монотонности операторов A^h и определения оператора J^μ для произвольной точки x_0 из X запишем следующие соотношения

$$\langle A^h y + \alpha J^\mu B^h y, B^h y\rangle = \alpha\mu(\|B^h y\|)\|B^h y\| + \langle A^h y - A^h x_0, B^h y - B^h x_0\rangle +$$
$$+\langle A^h x_0, B^h y - B^h x_0\rangle + \langle A^h y, B^h x_0\rangle \ge \alpha\mu(\|B^h y\|)\|B^h y\| - \|A^h x_0\|(\|B^h y\| + \|B^h x_0\|) -$$
$$-P(\|B^h y\|)\|B^h x_0\|.$$

Следовательно, предположение (2.8) обеспечивает B^h-коэрцитивность оператора F_α^Δ. Кроме того, оператор $F_\alpha^\Delta : X \to X^*$ является строго B^h-монотонным. Значит, согласно теореме 1 из [1], применённой при $\Omega = X$, уравнение (2.6) в наших предположениях однозначно разрешимо при любом положительном α и неотрицательных δ и h.

Далее из (1.4) и (2.6) при $u^h = B^h z$ получим:

$$\langle A^h x_\alpha^\Delta - Az, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle + \alpha\langle J^\mu u_\alpha^\Delta, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle = \langle f^\delta - f, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle. \tag{2.9}$$

Оценим слагаемые, входящие в (2.9). Приняв во внимание B^h-монотонность оператора A^h и первое неравенство из (2.5), запишем:

$$\langle A^h x_\alpha^\Delta - Az, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle = \langle A^h x_\alpha^\Delta - A^h z, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle + \langle A^h z - Az, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle \ge -hg(\|z\|)\|u_\alpha^\Delta - u^h\|.$$

Используя свойство (2.3) оператора J^μ, запишем неравенство

$$\langle J^\mu u_\alpha^\Delta, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle = \langle J^\mu u_\alpha^\Delta - J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle + \langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle \geq$$

$$\geq \left[\mu(\|u_\alpha^\Delta\|) - \mu(\|u^h\|)\right](\|u_\alpha^\Delta\| - \|u^h\|) + \langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle, \ \ u_\alpha^\Delta = B^h x_\alpha^\Delta.$$

Правая часть (2.9) с учётом последнего неравенства из (2.5) имеет следующую оценку сверху:

$$\langle f^\delta - f, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle \leq \delta\|u_\alpha^\Delta - u^h\|. \tag{2.10}$$

Таким образом, от (2.9) приходим к неравенству вида

$$\left[\mu(\|u_\alpha^\Delta\|) - \mu(\|u^h\|)\right](\|u_\alpha^\Delta\| - \|u^h\|) \leq \frac{h}{\alpha} g(\|z\|)\left(\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|\right) +$$

$$+ \quad \frac{\delta}{\alpha}\left(\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|\right) - \langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle. \tag{2.11}$$

Пусть

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\delta + h}{\alpha} = 0. \tag{2.12}$$

Перепишем (2.9) в следующем виде:

$$\langle A^h x_\alpha^\Delta - A^h z, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle + \langle A^h z - Az, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle + \alpha\langle J^\mu u_\alpha^\Delta, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle = \langle f^\delta - f, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle. \tag{2.13}$$

В силу B^h-монотонности оператора A^h первое слагаемое в (2.13) неотрицательно. Следовательно, из (2.13) вытекает неравенство

$$\mu(\|u_\alpha^\Delta\|)\|u_\alpha^\Delta\| \leq \mu(\|u_\alpha^\Delta\|)\|u^h\| + \frac{h}{\alpha} g(\|z\|)(\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|) + \frac{\delta}{\alpha}(\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|). \tag{2.14}$$

Поскольку

$$\|u^h\| \leq \|B^h z - Bz\| + \|Bz\| \leq qh + \|Bz\|,$$

где z – решение (1.4) и $h \to 0$, то семейство $\{u^h\}$ ограничено при $h \to 0$.

Условие (2.12) и свойства функции $\mu(t)$ позволяют из неравенства (2.14) сделать вывод об ограниченности семейства $\{u_\alpha^\Delta\} = \{B^h x_\alpha^\Delta\}$ при $\alpha \to 0$. Не меняя обозначений для подпоследовательности, считаем, что $u_\alpha^\Delta \rightharpoonup \bar{u} \in X$ при $\alpha \to 0$. Теперь из (2.6) имеем сходимость семейства $\{A^h x_\alpha^\Delta - f^\delta\}$ к нулю при $\alpha \to 0$, поскольку оператор $J^\mu : X \to X^*$ – ограниченный. Запишем условие B^h-монотонности оператора A^h:

$$\langle A^h v - A^h x_\alpha^\Delta, B^h v - B^h x_\alpha^\Delta\rangle \geq 0 \quad \forall v \in R(C^h).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to 0$, получим:

$$\langle Av - f, Bv - \bar{u}\rangle \geq 0 \quad \forall v \in R(C). \tag{2.15}$$

Поскольку $D(B^{-1}) = D(C) = X$ и $\bar{u} \in X$, то найдётся элемент $\bar{z} = B^{-1}\bar{u}$, т. е. $\bar{u} = B\bar{z}$. Значит, (2.15) можно записать в следующем виде:

$$\langle Av - f, Bv - B\bar{z}\rangle \geq 0, \quad \forall v \in R(C). \tag{2.16}$$

Поскольку существует оператор B^{-1}, то для всякого $v \in D(B)$ найдётся элемент $u \in X$ такой, что $v = B^{-1}u$. Таким образом, из (2.16) имеем

$$\langle AB^{-1}u - f, u - \bar{u}\rangle \geq 0 \quad \forall u \in X.$$

Оператор $T = AB^{-1}$ является деминепрерывным монотонным с $D(T) = X$, поэтому из последнего неравенства заключаем, что $AB^{-1}\bar{u} = f,\ \bar{z} = B^{-1}\bar{u}$ (см. [2, с. 257]).
Таким образом, доказано, что $\bar{u} \in N$. Значит, $B\bar{u} \in N_B$. Далее из (2.11), учитывая неотрицательность левой части и ограниченность семейств $\{u_\alpha^\Delta\}$ и $\{u^h\}$, имеем неравенство

$$\langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h\rangle \le c_1 \frac{\delta + h}{\alpha}, \quad c_1 > 0. \tag{2.17}$$

Поскольку $u_\alpha^\Delta \rightharpoonup \bar{u} = B\bar{z},\ u^h = B^h z \to Bz,\ J^\mu B^h z \to J^\mu Bz$ при $\alpha \to 0$ (см. [4, замечание 3.1.2 и лемму 3.2.1]), то из последнего неравенства с учётом предположения (2.12) получаем

$$\langle J^\mu Bz, B\bar{z} - Bz\rangle \le 0 \quad B\bar{z} \in N_B, \quad \forall Bz \in N_B.$$

Теперь на основании леммы 6.1.2 из [4], применённой к последнему неравенству, заключим, что верно неравенство

$$\langle J^\mu B\bar{z}, B\bar{z} - Bz\rangle \le 0 \quad \forall Bz \in N_B,$$

т. е. $\|B\bar{z}\| \le \|Bz\|$ при всех $Bz \in N_B$. Значит, $B\bar{z} = v^* = Bz^*$, где Bz^* – элемент с минимальной нормой в N_B (см. (2.1)), т. е. установлена сходимость $u_\alpha^\Delta \rightharpoonup v^*$ при $\alpha \to 0$. Положив в (2.11) $u^h = B^h z^*$ и затем перейдя к пределу при $\alpha \to 0$, получим, что $\|u_\alpha^\Delta\| \to \|v^*\|$. Таким образом, $u_\alpha^\Delta \rightharpoonup v^*,\ \ \|u_\alpha^\Delta\| \to \|v^*\|$ при $\alpha \to 0$. В E-пространстве X полученные предельные соотношения дают сильную сходимость, т. е. $u_\alpha^\Delta \to v^*$ при $\alpha \to 0$.

Теперь из неравенства

$$\|Bx_\alpha^\Delta - Bz^*\| \le \|Bx_\alpha^\Delta - B^h x_\alpha^\Delta\| + \|B^h x_\alpha^\Delta - Bz^*\|$$

в силу второго неравенства из (2.5) и доказанной сильной сходимости семейства $\{u_\alpha^\Delta\}$ к v^* заключим, что $Bx_\alpha^\Delta \to Bz^*$ при $\alpha \to 0$. Непрерывность оператора B^{-1} приводит в этом случае к сходимости $x_\alpha^\Delta \to z^* \in N$ при $\alpha \to 0$.

Сформулируем доказанный результат.

Теорема 2.1 *Пусть X – вещественное рефлексивное равномерно гладкое банахово E-пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряжённым X^*. Предположим, что оператор $T : X \to X^*$ является монотонным, $T = AC$ при $A : X \to X^*,\ C : X \to X,\ R(C) \subseteq D(A), D(C) = X$, причём A – деминепрерывный оператор, и существует непрерывное отображение $B = C^{-1} : X \to X$ с непрерывным обратным. Пусть уравнение (1.1) имеет непустое множество решений N; построим множество $N_B = \{Bx | x \in N\}$. Пусть данные уравнения (1.1) – операторы A, B и элемент f – возмущены, а их возмущения A^h, B^h и f^δ удовлетворяют неравенствам (2.5), причём A^h и B^h сохраняют свойства операторов A и B соответственно, и выполнены условия (2.7)–(2.8), (2.12). Тогда элементы семейства $\{x_\alpha^\Delta\}$ однозначно определяются из уравнения (2.6) и при $\alpha \to 0$ сходятся по норме пространства X к элементу $z^* \in N$, удовлетворяющему (2.1).*

Приведём пример уравнения вида (1.1), для которого переход к (1.4) приводит к решению более простой задачи.

Пусть оператор $A : L^p[a,b] \to L^q[a,b]$ при $p > 1, 1/p + 1/q = 1$ определяется равенством

$$Av(s) = \varphi(s, |v(s)|^{p-1})|v(s)|^{p-2}v(s), \tag{2.18}$$

где

$$\varphi(s,|v(s)|^{p-1}) = \begin{cases} 0, & v(s)<0,\\ 1/\left(a_1(s)+a_2(s)|v(s)|^{p-1}\right), & v(s)\ge 0,\end{cases}$$

функции $a_k(s)$ для $k=1,2$ положительны и непрерывны при $s\in[a,b]$.
Построим оператор $C: L^p[a,b]\to L^p[a,b]$ следующего вида:

$$Cx(s)=\psi(x(s)), \quad s\in[a,b],$$

где неотрицательная непрерывная функция $\psi(u)$ возрастает при $u\ge 0$. Значит, оператор $T=AC$ действует из пространства $L^p[a,b]$ в пространство $L^q[a,b]$, причём C и C^{-1} – непрерывные отображения. Монотонность оператора T устанавливается на основании равенства

$$\langle Tx-Ty, x-y\rangle = \int_a^b \left[\varphi(s,u(s))u(s)-\varphi(s,v(s))v(s)\right](x(s)-y(s))ds,$$

где $u(s)=[\psi(x(s))]^{p-1}$, $v(s)=[\psi(y(s))]^{p-1}$, $x(s)$ и $y(s)$ – произвольные функции из $L^p[a,b],\ p>1$.

Предложенный метод решения уравнения (1.1) можно исследовать, если $T=AC, T: X\to X,\ C:X\to X,\ A:X\to X$, причём будем считать, что оператор T является d-аккретивным (см. [3, с. 108]) относительно дуального отображения $J^\mu: X\to X^*$ с некоторой масштабной функцией $\mu(t)$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\langle J^\mu u - J^\mu v, Tu-Tv\rangle \ge 0 \quad \forall u,v\in X.$$

Отсюда при $u=Bx, v=By$ имеем

$$\langle J^\mu Bx - J^\mu By, Ax-Ay\rangle \ge 0.$$

Полученное свойство оператора A можно назвать B-d-аккретивностью относительно дуального отображения J^μ.

Список литературы

1. Рязанцева И. П. Непрерывные методы регуляризации первого порядка для обобщённых вариационных неравенств // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50. № 4. С. 636–650.

2. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.

3. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer. 2006. 410 p. DOI: https://doi.org/10.1007/1-4020-4396-1

4. Рязанцева И. П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева. 2008. 272 с.

Поступила 13.03.2021; доработана после рецензирования 24.04.2021; принята к публикации 4.05.2021

Информация об авторе:

Рязанцева Ирина Прокофьевна, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 65J15

Simplification method for nonlinear equations of monotone type in Banach space

I. P. Ryazantseva

Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In a Banach space, we study an operator equation with a monotone operator T. The operator is an operator from a Banach space to its conjugate, and $T = AC$, where A and C are operators of some classes. The considered problem belongs to the class of ill-posed problems. For this reason, an operator regularization method is proposed to solve it. This method is constructed using not the operator T of the original equation, but a more simple operator A, which is B-monotone, $B = C^{-1}$. The existence of the operator B is assumed. In addition, when constructing the operator regularization method, we use a dual mapping with some gauge function. In this case, the operators of the equation and the right-hand side of the given equation are assumed to be perturbed. The requirements on the geometry of the Banach space and on the agreement conditions for the perturbation levels of the data and of the regularization parameter are established, which provide a strong convergence of the constructed approximations to some solution of the original equation. An example of a problem in Lebesgue space is given for which the proposed method is applicable.

Key Words: Banach space, conjugate space, strictly convex space, E-space, monotone operator, B-monotone operator, dual map with gauge function, operator regularization method, perturbed data, convergence

For citation: *I. P. Ryazantseva.* Simplification method for nonlinear equations of monotone type in Banach space. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:2(2021), 185–192. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.185–192

References

1. I. P. Ryazantseva, "First-order continuous regularization methods for generalized variational inequalities", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:4 (2010), 606–619.

2. M. M. Vainberg, *[Variational methods and method of monotone operators in theory of nonlinear equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 416 p.

3. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006 DOI: https://doi.org/10.1007/1-4020-4396-1, 410 p.

4. I. P. Ryazantseva, *[Selected topics of the theory of operators of monotone type]*, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R. E. Alekseev Publ., Nizhny Novgorod, 2008 (In Russ.), 272 p.

Submitted 13.03.2021; Revised 24.04.2021; Accepted 4.05.2021

Information about the author:

Irina P. Ryazantseva, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R. E. Alekseev (24 Minina St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http:/orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.