DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.159–170
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925

О точных решениях уравнений вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил

А. А. Косов, Э. И. Семенов

Институт динамики систем и теории управления им В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН) (г. Иркутск, Российская Федерация)

Аннотация. Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая вращательное движение твердого тела под действием момента потенциальных и циркулярно-гироскопических сил. При таком моменте сил система дифференциальных уравнений имеет три классических первых интеграла: интеграл энергии, интеграл площадей и геометрический интеграл. Для аналога случая Лагранжа, при котором два момента инерции совпадают, а потенциал зависит от одного угла, найден дополнительный первый интеграл и выполнено интегрирование в квадратурах. Рассмотрен целый ряд примеров построения параметрических семейств точных решений. В этих примерах в качестве потенциала использовались полиномиальные или аналитические функции. В частности, построены семейства периодических и почти периодических движений, а также семейства асимптотически одноосных вращений. Кроме того, выявлены движения, имеющие предельные значения противоположных знаков при неограниченном возрастании и убывании времени.

Ключевые слова: твердое тело, уравнения движения, первые интегралы, точные решения

Для цитирования: Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях уравнений вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 159–170. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.159–170

1. Введение

Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая движение тяжелого твердого тела около неподвижной точки, была получена Л. Эйлером в середине XVIII в. и на протяжении длительного времени была вдохновляющим объектом для исследований выдающихся математиков и механиков. Были найдены классические случаи интегрируемости этой системы (случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), для которых существует дополнительный четвертый по счету алгебраический первый интеграл и доказано, что если условия этих классических случаев не выполняются, то дополнительного интеграла не существует даже в классе аналитических функций (подробную историю исследований и обзор результатов можно найти в монографиях [1–5]), а также в обзорной статье [6].

Классический случай Лагранжа для уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой выделяется условиями совпадения двух моментов инерции $B = A$ и линейной зависимостью потенциальной функции только от одного угла $U(\gamma) = k\gamma_3$ [1]. В этом случае, как известно, уравнения движения интегрируются и все решения выражаются через эллиптические функции времени. В данной статье мы рассматриваем аналог случая Лагранжа для более общей системы, когда моменты инерции совпадают $B = A$, потенциальная функция $U(\gamma) = U(\gamma_3)$ является произвольной непрерывно дифференцируемой функцией одного аргумента, и, кроме того, на тело действует момент циркулярно-гироскопических сил $M = L(\gamma_3)\omega \times \gamma$, $L(\gamma_3)$ — произвольная непрерывная функция, в частности, представляет интерес случай $L = \text{const}$.

Мотивация такого выбора объекта исследования включает как чисто математические, так и прикладные аспекты. Во-первых, присоединение указанного выше циркулярно-гироскопического момента сохраняет все три классических первых интеграла, поэтому логично выяснить аналоги классических случаев интегрируемости при действии такого дополнительного момента. Во-вторых, момент сил именно такого рода возникает при вращении ферромагнитного тела в магнитном поле [7], поэтому описание движений точными решениями может представлять в т.ч. прикладной интерес. Необходимо отметить, что вопрос о поиске аналогов классических случаев интегрируемости является нетривиальным. Например, аналога для случая Эйлера (ему соответствует потенциал $U(\gamma) = 0$) при действии момента $M = L(\gamma_3)\omega \times \gamma$ не существует. Вопросам поиска аналогов классических случаев полной или частичной интегрируемости, их развитию и обобщению уделяется внимание в современной литературе. Например, различные вопросы, касающиеся случая Гесса, его аналогов и обобщений, изучались в ряде недавних работ [8–11]. Основная цель данной статьи состоит в том, чтобы провести интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующей аналогу случая Лагранжа, и показать на примерах возможность получения точных решений, выражаемых элементарными функциями.

2. Случай Лагранжа с потенциальной функцией

Уравнения вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил:

$$A\dot{p} + (C - A)rq = \frac{\gamma_2}{2}\frac{dU}{d\gamma_3} + L(\gamma_3)(q\gamma_3 - r\gamma_2), \tag{2.1}$$

$$A\dot{q} + (A - C)rp = -\frac{\gamma_1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3} + L(\gamma_3)(r\gamma_1 - p\gamma_3), \tag{2.2}$$

$$C\dot{r} = L(\gamma_3)(p\gamma_2 - q\gamma_1), \tag{2.3}$$

$$\dot{\gamma_1} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \tag{2.4}$$

$$\dot{\gamma_2} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \tag{2.5}$$

$$\dot{\gamma_3} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \tag{2.6}$$

Здесь $A > 0$, $C > 0$ — главные центральные моменты инерции; (p, q, r) — проекции вектора угловой скорости на оси эллипсоида инерции; $\mathrm{col}(\gamma_1,\, \gamma_2, \gamma_3)$ — вектор положения тела, задаваемый проекциями единичного вектора местной вертикали на главные центральные оси эллипсоида инерции; $U = U(\gamma_3)$ — потенциальная непрерывно дифференцируемая функция; $L(\gamma_3)$ — произвольная непрерывная функция.

Система уравнений движения (2.1)–(2.6) имеет [1] следующие первые интегралы.

Первые интегралы:

$$\mathbf{J}_1 = A\left(p^2 + q^2\right) + Cr^2 + U(\gamma_3) = D_1 \equiv \text{const}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{J}_2 = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = D_2 \equiv \text{const}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{J}_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{J}_1$ — интеграл энергии; $\mathbf{J}_2$ — квадратичный интеграл площадей; $\mathbf{J}_1$ — квадратичный геометрический интеграл. Аналогично классическому случаю Лагранжа, система уравнений движения (2.1)–(2.6) обладает дополнительным четвертым интегралом.

Дополнительный первый интеграл:

$$\mathbf{J}_4 = Cr + \int\limits_0^{\gamma_3} L(s)\,ds = D_4 \equiv \text{const}. \tag{2.10}$$

Отметим, что при $U(\gamma_3) = k\gamma_3$, $k = \text{const}$ и $L \equiv 0$ получим классический интегрируемый в эллиптических функциях случай Лагранжа [1]. Поскольку система (2.1)–(2.6) имеет четыре независимых первых интеграла, то в соответствии с теорией последнего множителя Якоби [1] она интегрируема в квадратурах. Выполним интегрирование, считая всюду далее $L = \text{const}$.

Интегрирование системы (2.1)–(2.6). Введем полярные координаты (Ω, φ): $p = \Omega\cos\varphi$, $q = \Omega\sin\varphi$, где $\Omega = \Omega(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ — новые искомые дифференцируемые функции времени. С учетом введенных формул уравнения движения (2.1)-(2.2) перепишем как

$$A\dot{\Omega}\cos\varphi - A\Omega\dot{\varphi}\sin\varphi + (C - A)r\Omega\sin\varphi = \frac{\gamma_2}{2}\frac{dU}{d\gamma_3} + L(\Omega\sin\varphi\gamma_3 - r\gamma_2), \tag{2.11}$$

$$A\dot{\Omega}\sin\varphi + A\Omega\dot{\varphi}\cos\varphi + (A - C)r\Omega\cos\varphi = -\frac{\gamma_1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3} + L(r\gamma_1 - \Omega\cos\varphi\gamma_3), \tag{2.12}$$

Сложим эти два уравнения, предварительно умножив (2.11) на $\cos\varphi$, а (2.12) – на $\sin\varphi$, в итоге получим

$$A\dot{\Omega} = \left(Lr - \frac{1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3}\right)(\gamma_1\sin\varphi - \gamma_2\cos\varphi). \tag{2.13}$$

Из ОДУ (2.6) имеем $\dot{\gamma_3} = \Omega(\gamma_1\sin\varphi - \gamma_2\cos\varphi)$. С учетом этого соотношения ОДУ (2.13) примет вид

$$A\Omega\dot{\Omega} = \left(Lr - \frac{1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3}\right)\dot{\gamma_3}. \tag{2.14}$$

Из формулы (2.10) для первого интеграла $\mathbf{J}_4$ легко выразить r через γ_3:

$$r = \frac{1}{C}\left(D_4 - L\gamma_3\right). \tag{2.15}$$

С учетом формулы (2.15) уравнение (2.14) запишем как

$$A\Omega\dot{\Omega} = \left(\frac{L}{C}\left(D_4 - L\,\gamma_3\right) - \frac{1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3}\right)\dot{\gamma_3}. \tag{2.16}$$

Интегрируя это выражение, окончательно получим формулу, выражающую функцию $\Omega(t)$ через $\gamma_3(t)$:

$$A\Omega^2 = -\frac{L^2}{C}\gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C}\gamma_3 - U(\gamma_3) + K_1, \tag{2.17}$$

где K_1 — константа интегрирования. Заметим, что соотношение (2.17) можно получить другим способом. Действительно, из формулы (2.7) для первого интеграла $\mathbf{J}_1$ имеем

$$A\Omega^2 = -Cr^2 - U(\gamma_3) + D_1$$

или, с учетом формулы (2.15),

$$A\Omega^2 = -\frac{L^2}{C}\,\gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C}\,\gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \frac{D_4^2}{C}. \tag{2.18}$$

Сравнив соотношения (2.17) и (2.18), получим формулу для постоянной интегрирования K_1:

$$K_1 = D_1 - \frac{D_4^2}{C}. \tag{2.19}$$

Теперь вычтем из (2.12) уравнение (2.11), предварительно умножив (2.11) на $\sin\varphi$, а (2.12) на $\cos\varphi$, в итоге запишем:

$$A\Omega\dot{\varphi} + (A-C)r\Omega = \left(Lr - \frac{1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3}\right)(\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi) - L\Omega\gamma_3$$

или, с учетом формулы (2.15),

$$A\dot{\varphi} = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{L}{C}\,(D_4 - L\gamma_3) - \frac{1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3}\right)(\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi) -$$

$$-\frac{A-C}{C}\,(D_4 - L\gamma_3) - L\gamma_3. \tag{2.20}$$

Из формулы (2.8) для первого интеграла $\mathbf{J}_2$ найдем

$$\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi = \frac{1}{A\Omega}(D_2 - Cr\gamma_3)$$

или, с учетом формулы (2.15),

$$\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi = \frac{1}{A\Omega}\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big). \tag{2.21}$$

С учетом формулы (2.21) ОДУ (2.20) запишем как

$$A\dot{\varphi} = \frac{1}{A\Omega^2}\left(\frac{L}{C}\,(D_4 - L\gamma_3) - \frac{1}{2}\frac{dU}{d\gamma_3}\right)\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big) -$$

$$-\frac{A-C}{C}\,(D_4 - L\gamma_3) - L\gamma_3.$$

В этом соотношении выражение $A\Omega^2$ заменим равенством (2.18) и тогда окончательно получим соотношение для определения функции $\varphi(t)$:

$$A\dot{\varphi} = \frac{\left(\dfrac{L}{C}\,(D_4 - L\gamma_3) - \dfrac{1}{2}\dfrac{dU}{d\gamma_3}\right)\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big)}{-\dfrac{L^2}{C}\,\gamma_3^2 + \dfrac{2LD_4}{C}\,\gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \dfrac{D_4^2}{C}} - \tag{2.22}$$

$$-\frac{A-C}{C}\,(D_4 - L\gamma_3) - L\gamma_3.$$

Здесь функция $U(\gamma_3)$ считается заданной, при этом будем предполагать, что

$$U(\gamma_3) \neq -\frac{L^2}{C}\,\gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C}\,\gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \frac{D_4^2}{C}, \tag{2.23}$$

чтобы избежать деления на ноль в первом слагаемом правой части ОДУ (2.22). Для заданного потенциала $U(\gamma_3)$ и известной $\gamma_3(t)$ функция $\varphi(t)$ находится из соотношения (2.22) однократным интегрированием.

Для выражения функций $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ через функцию $\gamma_3(t)$, из соотношений (2.6), (2.21), получим следующую невырожденную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\gamma_1 \sin\varphi - \gamma_2 \cos\varphi = \frac{1}{\Omega}\,\dot\gamma_3,$$

$$\gamma_1 \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi = \frac{1}{A\Omega}\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big).$$

Из этой линейной системы найдем:

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{\Omega}\,\dot\gamma_3 \sin\varphi + \frac{1}{A\Omega}\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big)\cos\varphi, \tag{2.24}$$

$$\gamma_2(t) = -\frac{1}{\Omega}\,\dot\gamma_3 \cos\varphi + \frac{1}{A\Omega}\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big)\sin\varphi. \tag{2.25}$$

Осталось получить искомое ОДУ для функции $\gamma_3(t)$. Для этого возведем в квадрат уравнение (2.6):

$$\dot\gamma_3^2 = \Omega^2\left(\gamma_1^2 \sin^2\varphi + \gamma_2^2 \cos^2\varphi - 2\gamma_1\gamma_2 \sin\varphi\cos\varphi\right). \tag{2.26}$$

Также возведем в квадрат выражение (2.21) и с учетом формулы (2.15) получим

$$\gamma_1^2 \cos^2\varphi + \gamma_2^2 \sin^2\varphi + 2\gamma_1\gamma_2 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big)^2}{A^2\Omega^2}.$$

Выразим из этого соотношения слагаемое, содержащее смешанное произведение $\gamma_1\gamma_2$, и подставим его в формулу (2.26), которая примет вид

$$\dot\gamma_3^2 = \Omega^2\left[\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \frac{1}{A^2\Omega^2}\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big)^2\right].$$

В свою очередь из формулы (2.9) для первого интеграла $\mathbf{J}_3$ имеем $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2$. Тогда последнее равенство запишем как

$$\dot\gamma_3^2 = \Omega^2(1-\gamma_3^2) - \frac{1}{A^2}\Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big)^2. \tag{2.27}$$

Наконец, с учетом формулы (2.18) для Ω^2 получим окончательный вид искомого ОДУ для определения функции $\gamma_3(t)$:

$$A^2\dot\gamma_3^2 = A\left[-\frac{L^2}{C}\,\gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C}\,\gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \frac{D_4^2}{C}\right](1-\gamma_3^2) - \Big(D_2 - (D_4 - L\gamma_3)\,\gamma_3\Big)^2. \tag{2.28}$$

Таким образом, задача интегрирования системы ОДУ (2.1)–(2.6) с использованием первых интегралов (2.7)–(2.10) свелась следующей квадратуре:

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{R(\gamma_3)}} = \frac{t}{A} - t_0, \tag{2.29}$$

где t_0 — постоянная интегрирования, а функция $R(\gamma_3)$ имеет вид

$$R(\gamma_3) = P(\gamma_3) - AU(\gamma_3)(1-\gamma_3^2). \tag{2.30}$$

здесь $P(\gamma_3)$ — полином четвертой степени следующего вида:

$$P(\gamma_3) = \left(\frac{A}{C} - 1\right) L^2\gamma_3^4 + 2\frac{(C-A)LD_4}{C}\gamma_3^3 - \tag{2.31}$$

$$-\left(\frac{A}{C}(L^2 - D_4^2) + AD_1 + D_4^2 + 2D_2L\right)\gamma_3^2 +$$

$$\frac{2D_4}{C}(CD_2 + AL)\gamma_3 + AD_1 - D_2^2 - \frac{AD_4^2}{C}.$$

Заметим, что если функция $U(\gamma_3)$ представима в виде

$$U(\gamma_3) = a_2\gamma_3^2 + a_1\gamma_3 + a_0 + \frac{b_4\gamma_3^4 + b_3\gamma_3^3 + b_2\gamma_3^2 + b_1\gamma_3 + b_0}{1-\gamma_3^2},$$

где a_i, b_j — произвольные постоянные ($i = \overline{0,2}$, $j = \overline{0,4}$), то $R(\gamma_3)$ будет многочленом не выше четвертой степени от γ_3. Тогда интеграл в правой части равенства (2.29), в общем случае вычисляется в эллиптических функциях.

Если все постоянные, кроме D_4, отличны от нуля и удовлетворяют соотношениям

$$A = C, \quad D_2 = -L, \quad D_1 = \frac{L^2}{C}, \quad D_4 = 0,$$

то многочлен $P(\gamma_3)$ тождественно обращается в ноль. В этом случае квадратура (2.29) заменой $\gamma_3 = \operatorname{ch}\theta$ приводится к виду

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{U(\operatorname{ch}\theta)}} = \pm(t - t_0).$$

3. Примеры

Пример 3.1 *Случай семейства асимптотически одноосных вращений*

Пусть в системе (2.1)–(2.6) параметры $A = B = C = 1$, $L = 2$, а константы первых интегралов (2.7)–(2.10) имеют значения $D_1 = 5$, $D_2 = -2$, $D_4 = 0$. Тогда система уравнений (2.1)–(2.6) с потенциальной функцией $U(\gamma_3) = \gamma_3^2$ имеет следующее параметрическое семейство решений:

$$p(t) = \frac{\sqrt{5}\cos(c_2)}{\operatorname{ch}(t+c_1)}, \quad q(t) = \frac{\sqrt{5}\sin(c_2)}{\operatorname{ch}(t+c_1)}, \quad r(t) = 2\operatorname{th}(t+c_1),$$

$$\gamma_1(t) = -\frac{\sqrt{5}\,(2\cos(c_2)+\sin(c_2))}{5\operatorname{ch}(t+c_1)}, \quad \gamma_2(t) = -\frac{\sqrt{5}\,(2\sin(c_2)-\cos(c_2))}{5\operatorname{ch}(t+c_1)},$$

$$\gamma_3(t) = -\operatorname{th}(t + c_1),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Вычисляя для построенного параметрического семейства решений пределы при $t \to \pm\infty$, получим равенства

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = p(+\infty) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} p(t) = p(-\infty) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = q(+\infty) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} q(t) = q(-\infty) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = r(+\infty) = 2, \quad \lim_{t\to-\infty} r(t) = r(-\infty) = -2,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(+\infty) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(-\infty) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(+\infty) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(-\infty) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(+\infty) = -1, \quad \lim_{t\to-\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(-\infty) = 1.$$

Таким образом, любое движение построенного параметрического семейства асимптотически стремится к вращению вокруг одной одной из главных осей инерции с постоянной угловой скоростью как в далеком прошлом (при $t \approx -\infty$), так и в далеком будущем (при $t \approx +\infty$).

Пример 3.2 *Случай аналитической потенциальной функции*

Рассмотрим теперь случай, когда потенциальная функция является не полиномом, а аналитической функцией вида

$$U(\gamma_3) = -\frac{4\gamma_3^3}{1+\gamma_3} = -4\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^{k+1}\gamma_3^k,$$

Пусть параметры системы (2.1)–(2.6) и значения констант первых интегралов имеют вид $A = B = C = 1$, $L = 2$, $D_1 = 4$, $D_2 = -2$, $D_4 = 0$. Тогда получим следующее параметрическое семейство решений системы уравнений (2.1)–(2.6):

$$p(t) = \frac{2\sqrt{\tau^4+3\tau^2+1}\cos\varphi(\tau)}{\sqrt{\tau^4+3\tau^2+2}}, \quad q(t) = \frac{2\sqrt{\tau^4+3\tau^2+1}\sin\varphi(\tau)}{\sqrt{\tau^4+3\tau^2+2}},$$

$$r(t) = -\frac{2}{1+\tau^2}, \quad \gamma_1(t) = -\frac{\tau\sqrt{2+\tau^2}\Big[\sin\varphi(\tau) + \tau(2+\tau^2)\cos\varphi(\tau)\Big]}{(1+\tau^2)^{3/2}\sqrt{\tau^4+3\tau^2+1}},$$

$$\gamma_2(t) = \frac{\tau\sqrt{2+\tau^2}\Big[\cos\varphi(\tau) - \tau(2+\tau^2)\sin\varphi(\tau)\Big]}{(1+\tau^2)^{3/2}\sqrt{\tau^4+3\tau^2+1}}, \quad \gamma_3(t) = \frac{1}{1+\tau^2},$$

$$\varphi(\tau) = c_2 - \operatorname{arctg}(\tau) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau}{\sqrt{5}+1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau}{\sqrt{5}-1}\right),$$

где $\tau = t + c_1$, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Вычисляя для построенных решений пределы при $t \to \pm\infty$, получим равенства

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = p(+\infty) = 2\sin c_2, \quad \lim_{t\to-\infty} p(t) = p(-\infty) = -2\sin c_2,$$

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = q(+\infty) = -2\cos c_2, \quad \lim_{t\to-\infty} q(t) = q(-\infty) = 2\cos c_2,$$

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = r(+\infty) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} r(t) = r(-\infty) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(+\infty) = -\sin c_2, \quad \lim_{t\to-\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(-\infty) = \sin c_2,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(+\infty) = \cos c_2, \quad \lim_{t\to-\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(-\infty) = -\cos c_2,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(+\infty) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(-\infty) = 0.$$

$\diamondsuit$ Отметим, что все предельные значения в примерах 3.1-3.2 являются точными стационарными решениями, неустойчивыми по Ляпунову.

П р и м е р 3.3 *Случай семейства 2π — периодических решений*

Пусть $A = 1$, $C = \dfrac{1}{2}$, $L = -1$ и потенциальная функция задается формулой $U(\gamma_3) = -m\gamma_3^2$; $0 < m \le 1$ — произвольная постоянная. Для значений первых интегралов $J_1 = 2$, $J_2 = 1$, $J_4 = 0$ из квадратуры (2.30) найдем

$$\gamma_3(t) = \pm\,\mathrm{sn}(t + c_1, k), \tag{3.1}$$

где $\mathrm{sn}(\cdot, k)$ — эллиптический синус Якоби с модулем $k = \sqrt{1-m}$. Используя функцию (3.1) с произвольной постоянной $m \in (0, 1]$ по формулам из раздела 2 найдем оставшиеся искомые функции, которые не будем приводить в статье в силу их громоздкости. Однако если постоянный множитель m в функции $U(\gamma_3)$ выбрать равным единице, то эллиптический синус Якоби с модулем $k = 0$ в формуле (3.1) выродится в тригонометрический синус. В этом частном случае получим параметрическое семейство 2π — периодических решений системы (2.1)–(2.6) вида

$$p(t) = \sqrt{1+\cos^2\tau}\,\cos\varphi(\tau), \quad q(t) = \sqrt{1+\cos^2\tau}\,\sin\varphi(\tau),$$

$$r(t) = \pm\, 2\sin(\tau), \quad \gamma_1(t) = \frac{\cos\tau\Big(\cos\tau\cos\varphi(\tau) \pm \sin\varphi(\tau)\Big)}{\sqrt{1+\cos^2\tau}},$$

$$\gamma_2(t) = \frac{\cos\tau\Big(\cos\tau\sin\varphi(\tau) \mp \cos\varphi(\tau)\Big)}{\sqrt{1+\cos^2\tau}}, \quad \gamma_3(t) = \pm\,\sin(\tau),$$

где функция $\varphi(t)$ задается следующим образом:

$$\varphi(\tau) = c_2 \pm \left(\cos\tau - \mathrm{arctg}\,(\cos\tau)\right),$$

$\tau = t + c_1$, c_1, c_2 — произвольные постоянные.

П р и м е р 3.4 *Случай семейства почти периодических решений*

Рассмотрим случай следующих значений параметров $A = 1$, $C = \dfrac{3}{2}$, $L = 1$ и потенциальной функции задается формулой $U(\gamma_3) = -\dfrac{2}{3}\gamma_3 + \dfrac{1}{3}\gamma_3^2$. Используя формулы раздела 2, для значений первых интегралов $J_1 = 2$, $J_2 = -1$, $J_4 = 1$ получим параметрическое семейство почти периодических решений

$$p(t) = \Omega(t)\cos\varphi(t), \quad q(t) = \Omega(t)\sin\varphi(t), \quad r(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sin\tau,$$

$$\gamma_1(t) = -\frac{1}{\Omega(t)}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\tau\sin\varphi(t) + \left(1 + \frac{1}{2}\sin\tau - \frac{1}{4}\sin^2\tau\right)\cos\varphi(t)\right),$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\Omega(t)}\left(\cos\tau\cos\varphi(t) - \left(1 + \frac{1}{2}\sin\tau - \frac{1}{4}\sin^2\tau\right)\sin\varphi(t)\right),$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{2}\sin\tau,$$

где функции $\Omega(t)$ и $\varphi(t)$ задаются следующим образом:

$$\Omega(t) = \frac{1}{6}\sqrt{39 + 9\cos^2\tau - 36\sin\tau}, \quad \varphi(t) = c_2 + \frac{t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\frac{\tau}{2} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\tau - \operatorname{arctg}\frac{(\sqrt{21}-3)\cos\dfrac{\tau}{2} - 8\sin\dfrac{\tau}{2}}{(3\sqrt{3}+\sqrt{7})\cos\dfrac{\tau}{2}} + \operatorname{arctg}\frac{(\sqrt{21}+3)\cos\dfrac{\tau}{2} + 8\sin\dfrac{\tau}{2}}{(3\sqrt{3}-\sqrt{7})\cos\dfrac{\tau}{2}}.$$

Здесь $\tau = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(c_1 - t)$, c_1, c_2 — произвольные постоянные.

4. Заключение

В статье исследовалась нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием момента потенциальных и циркулярно-гироскопических сил. Для аналога случая Лагранжа выполнено интегрирование и построены семейства параметрических точных решений для ряда примеров. Эти точные решения представляют движения, обладающие рядом интересных свойств, в частности периодичностью и почти периодичностью. Найдены также двояко асимптотические движения. В качестве одного из возможных направлений дальнейших исследований полученных в статье точных решений представляет интерес анализ их устойчивости вторым методом Ляпунова с помощью успешно применявшегося в подобных случаях подхода [11].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746).

Список литературы

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.

2. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 344 с.

3. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 256 с.

4. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

5. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев. Наукова думка, 2012. 401 с.

6. Nikolov S., Nedkova N. Dynamical Behavior of a Rigid Body with One Fixed Point (Gyroscope). Basic Concepts and Results. Open Problems: a Review. Journal of Applied and Computational Mechanics. 2015. Vol. 1, No. 4. Pp. 187–206. DOI: https://doi.org/10.22055/jacm.2015.11949

7. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле. Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.

8. Борисов А.В., Мамаев И.С. Случай Гесса в динамике твердого тела. Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, Вып. 2. С. 256–265.

9. Беляев А.В. Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса. Матем. сб. 2015 Т. 206, №. 5. С. 5–34. DOI: https://doi.org/10.4213/sm8335

10. Бизяев И.А., Борисов А.В., Мамаев И.С. Система Гесса–Аппельрота и ее неголономные аналоги. Тр. МИАН. 2016. Т. 294, № 1. С. 268–292. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968516030171

11. Новиков М.А. О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса. Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 28–37. DOI: https://doi.org/10.7868/S0572329918030042

Поступила 18.02.2021; доработана после рецензирования 19.03.2021; принята к публикации 1.05.2021

Информация об авторах:

Косов Александр Аркадьевич, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

Семенов Эдуард Иванович, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9768-9945, edwseiz@gmail.com

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 34A34, 34A05, 34C25, 34C27

On exact solutions of equations of rotational motion of a rigid body under action of torque of circular-gyroscopic forces

A. A. Kosov, E. I. Semenov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

Abstract. A nonlinear system of differential equations describing the rotational motion of a rigid body under the action of torque of potential and circular-gyroscopic forces is considered. For this torque, the system of differential equations has three classical first integrals: the energy integral, the area integral, and the geometric integral. For the analogue of the Lagrange case, when two moments of inertia coincide and the potential depends on one angle, an additional first integral is found and integration in quadratures is performed. A number of examples is considered where parametric families of exact solutions are considered. In these examples, polynomial or analytical functions were used as a potential. In particular, we construct families of periodic and almost periodic motions, as well as families of asymptotically uniaxial rotations. We also identified movements that have limit values of opposite signs for unlimited increase and decrease of time.

Key Words: rigid body, equations of motion, first integrals, exact solutions

For citation: *A. A. Kosov, E. I. Semenov.* On exact solutions of equations of rotational motion of a rigid body under action of torque of circular-gyroscopic forces. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:2(2021), 159–170. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.159–170

References

1. V. V. Golubev, “Israeli Program for Scientific Translations”, 1960.

2. V. I. Zubov, *Analytical dynamics of the system of bodies*, LSU Publ., Leningrad, 1983 (In Russ.), 344 p.

3. V. V. Kozlov, *[Qualitative analysis methods in the dynamics of a rigid body]*, NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika» Publ., Izhevsk, 2000 (In Russ.), 256 p.

4. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, *[Solid dynamics]*, NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika» Publ., Izhevsk, 2001 (In Russ.), 384 p.

5. I. N. Gashenenko, G. V. Gorr, A. M. Kovalev, *Classical problems in the dynamics of rigid body*, Naukova dumka Publ., Kiev, 2012 (In Russ.), 401 p.

6. S. Nikolov, N. Nedkova, “Dynamical behavior of a rigid body with one fixed point (Gyroscope). Basic concepts and results. Open problems: a review”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **4**:1 (2015), 187–206. DOI: https://doi.org/10.22055/jacm.2015.11949

7. V. V. Kozlov, “[To the problem of the rotation of a solid in a magnetic field]”, *Izv. AN SSSR. MTT*, 1985, no. 6, 28–33 (In Russ.).

8. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, "[Hess case in rigid body dynamics]", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **67**:2 (2003), 256–265 (In Russ.).

9. A. V. Belyaev, "On the general solution of the problem of the motion of a heavy rigid body in the Hess case", *Sbornik: Mathematics.*, **206**:5 (2015), 621–649. DOI: https://doi.org/10.4213/sm8335

10. I. A. Bizyaev, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, "The Hess-Appelrot system and its nonholonomic analogues", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **294**:1 (2016), 252–275. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968516030171

11. M. A. Novikov, "[On stationary motions of a rigid body with the existence of a private Hess integral]", *Izv. RAN. MTT*, 2018, no. 3, 28–37 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.7868/S0572329918030042

Submitted 18.02.2021; Revised 19.03.2021; Accepted 1.05.2021

Information about the authors:

Alexander Kosov, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

Eduard Semenov, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9768-9945, edwseiz@gmail.com,

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.