DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.58–71 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:517.962

Об одном методе приближенного решения смешанной краевой задачи для уравнения эллиптического типа

М. Э. Файрузов, Ф. В. Лубышев

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения эллиптического типа дивергентного вида с переменными коэффициентами. Предполагается, что область интегрирования представляет собой прямоугольник, причем граница области интегрирования есть объединение двух непересекающихся областей, на одной из которых задано граничное условие Дирихле, а на другой – граничное условие Неймана. Поставленная задача – это задача с разрывным граничным условием. Подобные задачи со смешанными условиями на границе наиболее часто встречаются на практике при моделировании процессов и представляют значительный интерес в области разработки методов их решения. Настоящая работа посвящена численной реализации аппроксимации исходной смешанной краевой задачи с главным краевым условием третьей краевой задачей уже с естественным краевым условием. Следует однако заметить, что как известно одним из вопросов, важным для практического использования, например, вариационных методов (например, метода Ритца) по решению смешанных краевых задач является проблема выделения как главных так и естественных краевых условий. Практическая важность умения отличать эти условия, как известно, состоит в том, что базисные функции не обязательно подчинять естественным краевым условиям, если они установлены. В настоящей же работе указан другой подход, основан на идеи аппроксимировать исходную смешанную задачу краевой задачей с естественным краевым условием. На базе полученных в настоящей работе результатов проведены вычислительные эксперименты по приближенному решению модельных смешанных краевых задач.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, смешанная краевая задача, соболевские пространства, теоремы вложения, аппроксимация, сходимость аппроксимаций, разностная схема, итерационные методы, метод сеток.

Для цитирования: Файрузов М. Э., Лубышев Ф. В. Об одном методе приближенного решения смешанной краевой задачи для уравнения эллиптического типа // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 58–71. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.58–71

1. Постановка смешанной краевой задачи

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Для участков границы Γ прямоугольника $\bar{\Omega}$ введем для определенности постановки смешанной задачи следующие обозначения:

$$\Gamma_{+1} = \{x_1 = l_1, 0 \le x_2 \le l_2\}, \quad \Gamma_{-1} = \{x_1 = 0, 0 \le x_2 \le l_2\},$$
$$\Gamma_{-2} = \{0 \le x_1 \le l_1, x_2 = 0\}, \quad \Gamma_{+2} = \{0 \le x_1 \le l_1, x_2 = l_2\},$$
$$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_{-1} \cup \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2}, \quad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_{-1}.$$

Рассматривается следующая смешанная граничная задача:

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

$$u(x) = \mu_1(x), \qquad x \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = -k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = \mu_2(x), \qquad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \tag{1.3}$$

где $k_\alpha(x)$, $f(x)$, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ – заданные функции; $k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega)$; $f(x) \in L_2(\Omega)$; $\mu_1(s) \in \in L_2(\Gamma_1)$; $\mu_2(s) \in L_2(\Gamma_2)$; $0 < \nu_0 \le k_\alpha(x) \le \overline{\nu}_0$, $\alpha = 1, 2$.

Более подробная постановка задачи представлена в работе см. [1].

2. Аппроксимация смешанной краевой задачи третьей краевой задачей

Рассмотрим метод, заключающийся в приближенной замене смешанной краевой задачи (1.1)–(1.3) третьей краевой задачей:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + \varepsilon(s)u_\varepsilon = g(s), \quad s \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega, \tag{2.2}$$

где

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon, & s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \\ 0, & s \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} \varepsilon\mu_1(s), & s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \\ \mu_2(s), & s \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \end{cases} \qquad \varepsilon = const > 0.$$

Определение 2.1 *Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.2) называется функция $u_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству*

$$Q(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \qquad \forall v \in W_2^1(\Omega), \tag{2.3}$$

где

$$Q(u_\varepsilon, v) = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\, d\Omega + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s)v(s)\, ds,$$

$$l_\varepsilon(v) = \varepsilon \int\limits_{\Gamma_1} \mu_1(s)v(s)\, ds + \int\limits_{\Gamma_2} \mu_2(s)v(s)\, ds + \int\limits_\Omega f(x)v(x)\, d\Omega.$$

Теорема 2.1 *Обобщенное решение из класса $W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1)–(2.2) существует, единственно, и для него выполняется априорная оценка*

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \le \frac{c_0\big[c_1\varepsilon\|\mu_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + c_2\|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + c_3\|f\|_{L_2(\Omega)}\big]}{\min\{\nu_0, \varepsilon\}}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно убедиться в следующей оценке

$$|Q(u_\varepsilon, v)| \leq \bar{\nu}_0 \Big(\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \Big)^{1/2} + \\ + \varepsilon \Big(\int\limits_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2 \, ds \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\Gamma_1} v^2 \, ds \Big)^{1/2}.$$

Кроме того,

$$\Big(\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \Big)^{1/2} \leq \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \Big(\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \Big)^{1/2} \leq \|v\|_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\Big(\int\limits_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2 \, ds \Big)^{1/2} \leq c_1 \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \qquad \Big(\int\limits_{\Gamma_1} v^2 \, ds \Big)^{1/2} \leq c_1 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Поэтому имеем

$$|Q(u_\varepsilon, v)| \leq \big(\bar{\nu}_0 + c_1^2 \varepsilon \big) \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Далее, принимая во внимание оценки [2–6]

$$\|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq c_1 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \|v\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq c_2 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_3 \|v\|_{W_2^1(\Omega)},$$

нетрудно получить неравенство

$$|l_\varepsilon(v)| \leq \big[c_1 \varepsilon \|\mu_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + c_2 \varepsilon \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + c_3 \|f\|_{L_2(\Omega)} \big] \cdot \|v\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Кроме того, принимая во внимание неравенство [2; 4]

$$\|u_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq c_0 \Big[\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2(s) \, ds \Big],$$

нетрудно установить оценку

$$Q(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \frac{1}{c_0} \min\{\nu_0, \varepsilon\} \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Таким образом, установлены оценки (2.5)– (2.7) и выполнены условия леммы Лакса-Мильграма [2; 7]. Следовательно, обобщенное решение из класса $W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1)–(2.2) существует и единственно.

Используя неравенства (2.5)–(2.7), получим априорную оценку

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{c_0 \big[c_1 \varepsilon \|\mu_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + c_2 \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + c_3 \|f\|_{L_2(\Omega)} \big]}{\min\{\nu_0, \varepsilon\}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будут рассмотрены задачи (1.1)–(1.3) и (2.1)–(2.2) для случая, когда

$$\mu_1(s) \equiv 0, \qquad s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}.$$

В этому случае получим

$$g(s) = \begin{cases} 0, & s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \\ \mu_2(s), & s \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}. \end{cases}$$

Таким образом, задачу (2.1)–(2.2) можем переписать в следующем виде:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.8}$$

$$-k_1(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} = \mu_2(x), \qquad x \in \Gamma_{-1}, \tag{2.9}$$

$$k_1(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} + \varepsilon u_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_{+1}, \tag{2.10}$$

$$-k_2(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2} + \varepsilon u_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_{-2}, \tag{2.11}$$

$$k_2(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2} + \varepsilon u_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_{+2}, \tag{2.12}$$

где $\varepsilon = const > 0$.

Обобщенное решение $u_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$ задачи (2.8)–(2.12) будет удовлетворять тождеству

$$Q(u_\varepsilon, v) = \tilde{l}(v), \qquad \forall\, v \in W_2^1(\Omega), \tag{2.13}$$

где

$$Q(u_\varepsilon, v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\, d\Omega + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s) v(s)\, ds,$$

$$\tilde{l}(v) = \int\limits_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s)\, ds + \int\limits_{\Omega} f(x) v(x)\, d\Omega.$$

Здесь

$$\int\limits_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s) v(s)\, ds = \int\limits_{\Gamma_{+1}\cup\Gamma_{-2}\cup\Gamma_{+2}} u_\varepsilon(s) v(s)\, ds, \qquad \int\limits_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s)\, ds = \int\limits_{\Gamma_{-1}} \mu_2(s) v(s)\, ds.$$

3. Разностная аппроксимация краевой задачи (2.8)–(2.12). Корректность постановки сеточной задачи

Для аппроксимации задачи (2.8)–(2.12) введем в Ω сетку, вводя в рассмотрение одномерные сетки на отрезках $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$. Пусть $\bar{\omega}_\alpha = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, N_\alpha h_\alpha = = l_\alpha\right\}$ – одномерная сетка на $[0, l_\alpha]$, $\omega_\alpha \equiv \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} : i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}\right\}$ – множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_\alpha$. Введем также множества $\omega_\alpha^+ = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}\right\}$, $\omega_\alpha^- = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha - 1}\right\}$, $\alpha = 1, 2$, и средний шаг сетки $\bar{\omega}_\alpha$: $\hbar_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha$, если $i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}$, $\hbar_\alpha = 0.5 h_\alpha$, если $i_\alpha = 0, N_\alpha$. Пусть $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \left\{x = (x_1, x_2) : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\right\}$ – двумерная сетка в $\bar{\Omega}$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ – множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$, $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ – множество граничных узлов, $\overset{\circ}{\gamma} = (\bar{\omega}_1 \setminus \omega_1) \times (\bar{\omega}_2 \setminus \omega_2)$ – угловые точки, $\gamma_\alpha^+ = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = l_\alpha\} \times \omega_\beta$, $\gamma_\alpha^- = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = 0\} \times \omega_\beta$. Пусть $N = (N_1, N_2)$, $h = (h_1, h_2)$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Для сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}$, введем скалярные произведения и нормы [7–10]

$$(y, v)_{L_2(\bar{\omega})} = \sum_{x \in \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2} y(x) v(x)\, \hbar_1 \hbar_2, \qquad \|y\|^2_{L_2(\bar{\omega})} = (y, y)_{L_2(\bar{\omega})},$$

$$(y, v)_{L_2(\gamma)} = \sum_{x \in \gamma} y(x) v(x)\, \hbar_\alpha, \qquad \|y\|^2_{L_2(\gamma)} = (y, y)_{L_2(\gamma)},$$

$$\hbar_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0.5 h_\alpha, & x_\alpha = 0, l_\alpha, \\ h_\alpha, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Определение 3.1 *Сеточную функцию $y_\varepsilon(x)$, заданную на сетке $\bar{\omega}$, назовем решением разностной схемы для задачи (2.8)–(2.12), если она для любой сеточной функции $\nu(x)$, заданной на сетке $\bar{\omega}$, удовлетворяет сумматорному тождеству*

$$Q_h(y_\varepsilon, \nu) = \tilde{l}_h(\nu),$$

где

$$Q_h(y_\varepsilon, \nu) = \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} a_1(x) y_{\varepsilon \bar{x}_1} \nu_{\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} a_2(x) y_{\varepsilon \bar{x}_2} \nu_{\bar{x}_2} \hbar_1 h_2 +$$
$$+ \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon(x) \nu(x) \hbar_2 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon(x) \nu(x) \hbar_1 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon(x) v(x) \hbar_1, \quad (3.1)$$

$$\tilde{l}_h(\nu) = \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-1} \cap \gamma} \mu_2(x) \nu(x) \hbar_2 + \sum_{x \in \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2} f(x) \nu(x) \hbar_1 \hbar_2,$$

$$a_1(x_1, x_2) = k_1(x_1 - 0.5 h_1, x_2), \qquad a_2(x_1, x_2) = k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2),$$

$$\hbar_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0.5 h_\alpha, & x_\alpha = 0, l_\alpha, \\ h_\alpha, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Теорема 3.1 *Решение $y_\varepsilon(x)$ разностной схемы для задачи (2.8)–(2.12), определяемое из сумматорного тождества (3.1) существует, единственно и для него справедлива априорная оценка*

$$\|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \le \frac{\bar{c}_2 \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \|f(x)\|_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2}}{\min\{c_1^{-1}, c_5^{-1}, c_6^{-1}\} \min\left\{\frac{\nu_0}{3}, \varepsilon\right\}}. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} a_1(x)y_{\varepsilon\bar x_1}\nu_{\bar x_1}h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} a_2(x)y_{\varepsilon\bar x_2}\nu_{\bar x_2}\hbar_1 h_2\Big| \le \\
&\le \bar\nu_0\Big[\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} |y_{\varepsilon\bar x_1}|\cdot|\nu_{\bar x_1}|\,h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} |y_{\varepsilon\bar x_2}|\cdot|\nu_{\bar x_2}|\,\hbar_1 h_2\Big] \le \\
&\le \bar\nu_0\Big[\Big(\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} |y^2_{\varepsilon\bar x_1}|\,h_1\hbar_2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} |\nu^2_{\bar x_1}|\,h_1\hbar_2\Big)^{1/2} + \\
&+ \Big(\sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} |y^2_{\varepsilon\bar x_2}|\,\hbar_1 h_2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} |\nu^2_{\bar x_2}|\,\hbar_1 h_2\Big)^{1/2}\Big] \le \\
&\le \bar\nu_0\Big[\Big(\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} y^2_{\varepsilon\bar x_1}\,h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} y^2_{\varepsilon\bar x_2}\,\hbar_1 h_2\Big)^{1/2} \times \Big(\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} \nu^2_{\bar x_1}\,h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} \nu^2_{\bar x_2}\,\hbar_1 h_2\Big)^{1/2}\Big].
\end{aligned}
$$

Далее имеем оценки:

$$
\Big(\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} y^2_{\varepsilon\bar x_1}\,h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} y^2_{\varepsilon\bar x_2}\,\hbar_1 h_2\Big)^{1/2} \le \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)},
$$

$$
\Big(\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} \nu^2_{\bar x_1}\,h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2^+} \nu^2_{\bar x_2}\,\hbar_1 h_2\Big)^{1/2} \le \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)},
$$

$$
\sum_{x\in\Gamma_{+1}\cap\gamma} y_\varepsilon(x)\nu(x)\hbar_2 \le \|y_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Gamma_{+1}\cap\gamma)}\|\nu(x)\|_{L_2(\Gamma_{+1}\cap\gamma)} \le \bar c_1^2\|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}\|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)},
$$

$$
\sum_{x\in\Gamma_{-2}\cap\gamma} y_\varepsilon(x)\nu(x)\hbar_1 \le \bar c_2^2\|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}\|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)},
$$

$$
\sum_{x\in\Gamma_{+2}\cap\gamma} y_\varepsilon(x)\nu(x)\hbar_1 \le \bar c_3^2\|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}\|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}.
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
|Q_h(y_\varepsilon,\nu)| &\le \bar\nu_0\|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}\|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)} + \big(\bar c_1^2+\bar c_2^2+\bar c_3^2\big)\varepsilon\|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}\|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)} = \\
&= \big[\bar\nu_0\big(\bar c_1^2+\bar c_2^2+\bar c_3^2\big)\varepsilon\big]\,\|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}\|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar\omega)}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Далее имеем

$$
\begin{gathered}
Q_h(y_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \nu_0 \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon\bar{x}_1}^2 \, h_1 \hbar_2 + \nu_0 \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon\bar{x}_2}^2 \, \hbar_1 h_2 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 \hbar_2 + \\
+ \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 \hbar_1 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 \hbar_1 = \frac{\nu_0}{3} \left[3 \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon\bar{x}_1}^2 \, h_1 \hbar_2 + 3 \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon\bar{x}_2}^2 \, \hbar_1 h_2 \right] + \\
+ \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) \hbar_2 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) \hbar_1 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) \hbar_1 \geq \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \times \\
\times \left[3 \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon\bar{x}_1}^2 \, h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon\bar{x}_2}^2 \, \hbar_1 h_2 \right) + \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 \hbar_2 + \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 \hbar_1 + \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 \hbar_1 \right] = \\
= \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \left[\left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon\bar{x}_1}^2 \, h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon\bar{x}_2}^2 \, \hbar_1 h_2 + \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) \hbar_2 \right) + \right. \\
+ \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon\bar{x}_1}^2 \, h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon\bar{x}_2}^2 \, \hbar_1 h_2 + \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) \hbar_1 \right) + \\
\left. + \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon\bar{x}_1}^2 \, h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon\bar{x}_2}^2 \, \hbar_1 h_2 + \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) \hbar_1 \right) \right] \geq \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \times \\
\times \left[\frac{1}{c_4} \| y_\varepsilon \|^2_{W_2^1(\bar{\omega})} + \frac{1}{c_5} \| y_\varepsilon \|^2_{W_2^1(\bar{\omega})} + \frac{1}{c_6} \| y_\varepsilon \|^2_{W_2^1(\bar{\omega})} \right] \geq \min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \| y_\varepsilon \|^2_{W_2^1(\bar{\omega})}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, имеем оценку

$$
Q_h(y_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \| y_\varepsilon \|^2_{W_2^1(\bar{\omega})}. \tag{3.4}
$$

Далее справедливы оценки

$$
\begin{gathered}
|\tilde{l}_h(\nu)| \leq \| \mu_2(x) \|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} \| \nu(x) \|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \| f(x) \|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} \| \nu(x) \|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}, \\
\| \nu(x) \|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} \leq \bar{c}_2 \| \nu(x) \|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}, \quad \| \nu(x) \|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} \leq \bar{c}_3 \| \nu(x) \|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}.
\end{gathered}
$$

Следовательно, имеем неравенство

$$
|\tilde{l}_h(\nu)| \leq \left[\bar{c}_2 \| \mu_2(x) \|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \| f(x) \|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} \right] \| \nu(x) \|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}. \tag{3.5}
$$

Кроме того, справедливы оценки:

$$
\begin{gathered}
\min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \| y_\varepsilon \|^2_{W_2^1(\bar{\omega})} \leq A_{1h}(y_\varepsilon, y_\varepsilon) = \tilde{l}_h(y_\varepsilon) \leq \\
\leq |\tilde{l}_h(y_\varepsilon)| \leq \left[\bar{c}_2 \| \mu_2(x) \|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \| f(x) \|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} \right] \| y_\varepsilon(x) \|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)},
\end{gathered}
$$

$$
\| y_\varepsilon(x) \|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} \leq \frac{\bar{c}_2 \| \mu_2(x) \|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \| f(x) \|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}}{\min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\}} \tag{3.6}
$$

Таким образом, установлены оценки (3.3)–(3.5), выполнены условия леммы Лакса-Мильграма. Значит разностная схема для задачи (2.8)–(2.12) однозначно разрешима, и выполнена оценка (3.6).

Доказательство завершено.

Введем гильбертово пространство сеточных функций $H_h(\bar\omega)$, заданных на сетке $\bar\omega$. Скалярное произведение $[y_\varepsilon, v]$ в $H_h(\bar\omega)$ зададим соотношением

$$[y_\varepsilon, v] = (y_\varepsilon, v)_{L_2(\bar\omega)},$$

где

$$[y_\varepsilon, v] = (y_\varepsilon, v)_{L_2(\bar\omega)} = \sum_{x\in\bar\omega} y_\varepsilon(x)v(x)\hbar_1(x)\hbar_2(x) = \sum_{x\in\bar\omega_1} \hbar_1(x_1) \sum_{x\in\bar\omega_2} y_\varepsilon(x)v(x)\hbar_2(x_2),$$

$$\hbar_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0.5h_\alpha, & x_\alpha = 0, l_\alpha, \\ h_\alpha, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \alpha = 1,2, \end{cases} \qquad \text{при этом } \|y_\varepsilon\|^2_{L_2(\bar\omega)} = (y_\varepsilon, y_\varepsilon)_{L_2(\bar\omega)}.$$

Задача о нахождении сеточного решения $y_\varepsilon(x)$, $x\in\bar\omega$ из сумматорного тождества (3.1) может быть записана в виде операторного уравнения первого рода с оператором A_h, действующим в гильбертовом пространстве $H_h(\bar\omega)$:

$$A_h y_\varepsilon(x) = F_h, \qquad y_\varepsilon \in H_h(\bar\omega), \tag{3.7}$$

$$A_h = A_{1h} + A_{2h}, \quad F_h(x) = f(x) + \frac{2}{h_1}F_{1h}(x) + \frac{2}{h_2}F_{2h}(x), \quad x\in\bar\omega. \tag{3.8}$$

Здесь операторы A_{1h}, A_{2h} и сеточные функции $F_{1h}(x)$, $F_{2h}(x)$, $x\in\bar\omega$ определяются соотношениями:

$$A_{1h}y_\varepsilon = \begin{cases} -\dfrac{2}{h_1}\left(a_1^{+1}y_{\varepsilon x_1}\right), & x_1 = 0, \\ -\left(a_1 y_{\varepsilon\bar x_1}\right)_{x_1}, & h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1, \\ \dfrac{2}{h_1}\left(a_1 y_{\varepsilon\bar x_1} + \varepsilon y_\varepsilon\right), & x_1 = l_1, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$A_{2h}y_\varepsilon = \begin{cases} -\dfrac{2}{h_2}\left(a_2^{+1}y_{\varepsilon x_2} - \varepsilon y_\varepsilon\right), & x_2 = 0, \\ -\left(a_2 y_{\varepsilon\bar x_2}\right)_{x_2}, & h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2, \\ \dfrac{2}{h_2}\left(a_2 y_{\varepsilon\bar x_2} + \varepsilon y_\varepsilon\right), & x_2 = l_2, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$F_{1h}(x) = \begin{cases} \mu_2(x), & x_1 = 0, \\ 0, & h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1, \\ 0, & x_1 = l_1, \end{cases} \qquad F_{2h}(x) = \begin{cases} 0, & x_2 = 0, \\ 0, & h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2, \\ 0, & x_2 = l_2, \end{cases}$$

$$a_1^{+1} = a_1(x_1 + h_1, x_2), \qquad a_2^{+1} = a_2(x_1, x_2 + h_2). \tag{3.11}$$

Здесь

$$a_1(x_1,x_2) = k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2), \quad a_2(x_1,x_2) = k_2(x_1, x_2 - 0.5h_2). \tag{3.12}$$

Оператор A_h, определяемый согласно (3.7)–(3.12), самосопряжен и положителен в $H_h(\bar\omega)$ [9].

4. Модельная смешанная краевая задача для проведения вычислительных экспериментов

В качестве модельного примера рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega,\\
&u(x) = \mu_1(x), \qquad x \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1},\\
&\frac{\partial u}{\partial N} = -k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = \mu_2(x), \qquad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1},
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Функции $k_\alpha(x)$, $f(x)$, $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$, $\alpha = 1, 2$, выберем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&k_1(x_1, x_2) = 1 + \exp(x_1) + x_2^2, \qquad k_2(x_1, x_2) = 1 + \exp(x_2) + x_1^2,\\
&\mu_1(x) \equiv 0, \quad x \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{-1},\\
&\mu_2(x) = (2 + x_2^2)(l_2 - x_2)x_2, \qquad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1},\\
&f(x) = \exp(x_1)x_2(l_2 - x_2) - (l_1 - x_1)\big[\exp(x_2)(l_2 - 2x_2 - 2) - 2(1 + x_1^2)\big].
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Точным решением задачи (4.1), при заданных функциях (4.2), является функция:

$$
u(x_1, x_2) = (l_1 - x_1)(l_2 - x_2)x_2, \quad x \in \Omega.
$$

Для модельной смешанной краевой задачи (4.1) аппроксимирующая ее третья краевая задача, как нетрудно видеть, примет вид (см. выше):

$$
-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
-k_1(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} &= \mu_2(x), \qquad x \in \Gamma_{-1},\\
k_1(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} + \varepsilon u_\varepsilon(x) &= 0, \qquad x \in \Gamma_{+1},\\
-k_2(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2} + \varepsilon u_\varepsilon(x) &= 0, \qquad x \in \Gamma_{-2},\\
k_2(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2} + \varepsilon u_\varepsilon(x) &= 0, \qquad x \in \Gamma_{+2},
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

где $\varepsilon = const > 0$.

Функции $k_\alpha(x)$, $f(x)$ и $\mu_2(x)$, $\alpha = 1, 2$, выбраны следующем образом:

$$
\begin{aligned}
&k_1(x_1, x_2) = 1 + \exp(x_1) + x_2^2, \qquad k_2(x_1, x_2) = 1 + \exp(x_2) + x_1^2,\\
&\mu_2(x) = (2 + x_2^2)(l_2 - x_2)x_2, \qquad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1},\\
&f(x) = \exp(x_1)x_2(l_2 - x_2) - (l_1 - x_1)\big[\exp(x_2)(l_2 - 2x_2 - 2) - 2(1 + x_1^2)\big].
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Наиболее универсальными методами численного решения аппроксимирующей краевой задачи (4.3)–(4.5) являются метод сеток, вариационные методы, метод конечных элементов [7–10].

5. Расчетные формулы для нахождения приближенного решения сеточной задачи (3.7)-(3.12) методом верхней релаксации

Разностная аппроксимация задачи (4.3)–(4.5) имеет вид (3.7)–(3.12). Приближенное решение разностной задачи (3.7)–(3.12) найдем методом верхней релаксации. Пусть на прямоугольной сетке $\bar{\omega} = \big\{(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (ih_1, jh_2), 0 \le i \le N_1, 0 \le j \le N_2, h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha, \alpha = 1,2\big\}$, введенной в прямоугольнике $\Omega = \big\{x = (x_1, x_2) : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2\big\}$, требуется найти решение задачи (3.7)–(3.12). В данной задаче неизвестными являются $y_\varepsilon(i,j) = y_\varepsilon((x_1^{(i)}, x_2^{(j)}))$ в узлах сетки. Если упорядочить неизвестные естественным способом по строкам сетки $\bar{\omega}$, начиная с нижней, то метод верхней релаксации, как нетрудно убедиться, описывается формулами [9; 10]:

$$b(0,0)y_\varepsilon^{k+1}(0,0) = (1-\omega)b(0,0)y_\varepsilon^k(0,0) + \omega\Bigg[\frac{a_1(1,0)}{h_1^2}y_\varepsilon^k(1,0) + \\ + \frac{a_2(0,1)}{h_2^2}y_\varepsilon^k(0,1) + \frac{\mu_2(0)}{h_1} + \frac{1}{2}f(0,0)\Bigg],$$

$$b(0,0) = \frac{a_1(1,0)}{h_1^2} + \frac{a_2(0,1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2};$$

$$b(0,j)y_\varepsilon^{k+1}(0,j) = (1-\omega)b(0,j)y_\varepsilon^k(0,j) + \omega\Bigg[\frac{2a_1(1,j)}{h_1^2}y_\varepsilon^k(1,j) + \\ + \frac{a_2(0,j)}{h_2^2}y_\varepsilon^{k+1}(0,j-1) + \frac{a_2(0,j+1)}{h_2^2}y_\varepsilon^k(0,j+1) + \frac{2\mu_2(j)}{h_1} + f(0,j)\Bigg],$$

$$b(0,j) = \frac{2a_1(1,j)}{h_1^2} + \frac{a_2(0,j) + a_2(0,j+1)}{h_2^2}, \quad 1 \le j \le N_2 - 1;$$

$$b(0,N_2)y_\varepsilon^{k+1}(0,N_2) = (1-\omega)b(0,N_2)y_\varepsilon^k(0,N_2) + \omega\Bigg[\frac{a_1(1,0)}{h_1^2}y_\varepsilon^k(1,N_2) + \\ + \frac{a_2(0,1)}{h_2^2}y_\varepsilon^{k+1}(0,N_2-1) + \frac{\mu_2(l_2)}{h_1} + \frac{1}{2}f(0,l_2)\Bigg],$$

$$b(0,N_2) = \frac{a_1(1,l_2)}{h_1^2} + \frac{a_2(0,l_2)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2};$$

$$b(i,0)y_\varepsilon^{k+1}(i,0) = (1-\omega)b(i,j)y_\varepsilon^k(i,0) + \omega\Bigg[\frac{a_1(i,0)}{h_1^2}y_\varepsilon^{k+1}(i-1,0) + \\ + \frac{a_1(i+1,0)}{h_1^2}y_\varepsilon^k(i+1,j) + 2\frac{a_2(i,1)}{h_2^2}y_\varepsilon^k(i,1) + f(i,0)\Bigg],$$

$$b(i,0) = \frac{a_1(i,0) + a_1(i+1,0)}{h_1^2} + 2\frac{a_2(i,1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}, \quad 1 \le i \le N_1 - 1;$$

$$b(i,j)y_\varepsilon^{k+1}(i,j) = (1-\omega)b(i,j)y_\varepsilon^k(i,j) + \omega\Bigg[\frac{a_1(i,j)}{h_1^2}y_\varepsilon^{k+1}(i-1,j) +$$

$$+\frac{a_2(i,j)}{h_2^2}y_\varepsilon^{k+1}(i,j-1) + \frac{a_1(i+1,j)}{h_1^2}y_\varepsilon^k(i+1,j) + \frac{a_2(i,j+1)}{h_2^2}y_\varepsilon^k(i,j+1) + f(i,j)\Bigg],$$

$$1 \le i \le N_1-1, 1 \le j \le N_2-1,$$

$$b(i,j) = \frac{a_1(i,j)+a_1(i+1,j)}{h_1^2} + \frac{a_2(i,j)+a_2(i,j+1)}{h_2^2};$$

$$b(i,N_2)y_\varepsilon^{k+1}(i,N_2) = (1-\omega)b(i,j)y_\varepsilon^k(i,N_2) + \omega\Bigg[\frac{k_1(i-0.5,l_2)}{h_1^2}y_\varepsilon^{k+1}(i-1,N_2) +$$

$$+\frac{a_1(i+1,l_2)}{h_1^2}y_\varepsilon^k(i+1,N_2) + 2\frac{a_2(i,l_2)}{h_2^2}y_\varepsilon^{k+1}(i,N_2-1) + f(i,N_2)\Bigg],$$

$$b(i,N_2) = \frac{a_1(i,l_2)+a_1(i+1,l_2)}{h_1^2} + 2\frac{a_2(i,l_2)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}, \quad 1 \le i \le N_1-1;$$

$$b(N_1,0)y_\varepsilon^{k+1}(N_1,0) = (1-\omega)b(N_1,0)y_\varepsilon^k(N_1,0) + \omega\Bigg[\frac{a_1(l_1,0)}{h_1^2}y_\varepsilon^{k+1}(N_1-1,0) +$$

$$+\frac{a_2(l_1,1)}{h_2^2}y_\varepsilon^k(N_1,1) + \frac{1}{2}f(N_1,0)\Bigg],$$

$$b(N_1,0) = \frac{a_1(l_1,0)}{h_1^2} + \frac{a_2(l_2,1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2};$$

$$b(N_1,j)y_\varepsilon^{k+1}(N_1,j) = (1-\omega)b(N_1,j)y_\varepsilon^k(N_1,j) + \omega\Bigg[\frac{2k_1(l_1-0.5,j)}{h_1^2}y_\varepsilon^{k+1}(N_1-1,j) +$$

$$+\frac{a_2(l_1,j)}{h_2^2}y_\varepsilon^{k+1}(N_1,j-1) + \frac{a_2(l_1,j+1)}{h_2^2}y_\varepsilon^k(N_1,j+1) + f(N_1,j)\Bigg],$$

$$b(N_1,j) = \frac{2a_1(l_1,j)}{h_1^2} + \frac{a_2(l_1,j)+a_2(l_1,j+1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}, \quad 1 \le j \le N_2-1;$$

$$b(N_1,N_2)y_\varepsilon^{k+1}(N_1,N_2) = (1-\omega)b(N_1,N_2)y_\varepsilon^k(N_1,N_2) + \omega\Bigg[\frac{a_1(l_1,l_2)}{h_1^2}y_\varepsilon^{k+1}(N_1-1,N_2) +$$

$$+\frac{a_2(l_1,l_2)}{h_2^2}y_\varepsilon^{k+1}(N_1,N_2-1) + \frac{1}{2}f(N_1,N_2)\Bigg],$$

$$b(N_1,N_2) = \frac{a_1(l_1,l_2)}{h_1^2} + \frac{a_2(l_1,l_2)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}.$$

Здесь $0 < \omega < 2$ – параметр метода, при котором метод релаксации сходится, а $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Вычисления начинаются с точки $i = 0$, $j = 0$ и продолжаются по столбцам сетки $\bar{\omega}$. Найденное значение $y_\varepsilon^{k+1}(i, j)$ размещается на месте $y_\varepsilon^k(i, j)$. Начальное приближение выбирается следующим образом: $y_\varepsilon^0(x) = 0$, $x \in \bar{\omega}$.

Вычислительные эксперименты по приближенному решению краевых задач (4.3)–(4.5) проводились на основе разностной схемы (3.7)–(3.12), представляющей собой систему сеточных уравнений. Расчеты проводились в единичном квадрате ($l_1 = l_2 = 1$), на квадратной сетке с $N_1 = N_2$, с шагами сетки $h_1 = h_2$.

Процесс итераций, построенный на основе метода верхней релаксации по решению системы сеточных уравнений (3.7)–(3.12), заканчивался, если выполнялось условие

$$\|y_\varepsilon^{k+1}(x) - y_\varepsilon^k(x)\|_{L_\infty(\bar{\omega})} < 10^{-6}.$$

Вычислительные эксперименты по решению модельных задач показали, что с ростом параметра $\varepsilon > 0$ наблюдается монотонное убывание погрешности типа $\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, поэтому имеем при $\varepsilon \to +\infty$

$$\|u(x) - y(x, \varepsilon, h, k)\|_{L_\infty(\bar{\omega})} \to 0.$$

Здесь $u(x)$ – точное решение модельной смешанной краевой задачи (4.1)–(4.2), а $y(x, \varepsilon, h, k)$ – приближенное решение аппроксимирующей краевой задачи (4.3)–(4.5), полученное на основе разработанного метода решения смешанных краевых задач.

Список литературы

1. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. Аппроксимация смешанной краевой задачи Журнал Средневолжского математического общества. 2018, Т. 20, № 4. С. 429–438.

2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: монография. М.: Мир, 1985. 590 с.

3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.

4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

5. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

6. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

7. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987. 296 с.

8. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.

9. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009. 784 с.

10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978. 592 с.

Поступила 26.12.2020; доработана после рецензирования 20.02.2021; принята к публикации 25.02.2021

Информация об авторах:

Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 65N06

On a method for approximate solution of a mixed boundary value problem for an elliptic equation

M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev

Bashkir State University (Ufa, Russian Federation)

Abstract. A mixed boundary value problem for an elliptic equation of divergent type with variable coefficients is considered. It is assumed that the integration region is a rectangle, and the boundary of the integration region is the union of two disjoint pieces. The Dirichlet boundary condition is set on the first piece, and the Neumann boundary condition is set on the other one. The given problem is a problem with a discontinuous boundary condition. Such problems with mixed conditions at the boundary are most often encountered in practice in process modeling, and the methods for solving them are of considerable interest. This work is related to the paper [1] and complements it. It is focused on the approbation of the results established in [1] on the convergence of approximations of the original mixed boundary value problem with the main boundary condition of the third boundary value problem already with the natural boundary condition. On the basis of the results obtained in this paper and in [1], computational experiments on the approximate solution of model mixed boundary value problems are carried out.

Key Words: elliptic equation, mixed boundary value problem, Sobolev spaces, embedding theorem, approximation, convergence of approximations, difference scheme, iterative method, grid method

For citation: *M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev.* On a method for approximate solution of a mixed boundary value problem for an elliptic equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:1(2021), 58–71. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.58–71

References

1. F. V. Lubyshev, M. E. Fairuzov, “Approximation of a mixed boundary value problem”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:4 (2018), 429–438 (In Russ.).

2. K. Rektoris, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]*, Mir Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 590 p.

3. V. P. Mikhaylov, *Differentsial’nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Partial Differential Equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 391 p.

4. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 408 p.

5. David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order Second Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.

6. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Vvedenie v proekcionno-setochnye metody [Introduction to projection-grid methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 416 p.

7. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *Raznostnye skhemy dlya differencial’nyh uravnenij s obobshchennymi resheniyami [Difference schemes for differential equations with generalized solutions]*, Vysshaya shkola Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 296 p.

8. A. A. Samarskij, V. B. Andreev, *Raznostnye metody dlya ellipticheskih uravnenij [Difference methods for elliptic equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 352 p.

9. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *Vychislitel’naya teploperedacha [Computational heat transfer]*, Knizhnyy dom “LIBROKOM” Publ., M., 2009 (In Russ.), 784 p.

10. A. A. Samarskij, E. S. Nikolaev, *Metody resheniya setochnyh uravnenij [Methods for solving grid equations]*, Nauka Publ, Moscow, 1978 (In Russ.), 592 p.

Submitted 26.12.2020; Revised 20.02.2021; Accepted 25.02.2021

Information about the authors:

Mahmut E. Fairuzov, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir State University» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph. D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

Fedor V. Lubyshev, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir State University» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.