DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.28–42
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925

Динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова

ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина» (г. Рязань, Российская Федерация)

Аннотация. В статье получены условия существования предельных циклов первого рода для систем автоподстройки с запаздыванием, которые, в свою очередь, определяют условия возникновения режимов скрытой синхронизации в таких системах. Принцип доказательства основан на построении положительно инвариантного тороидального множества с использованием двух цилиндрических поверхностей, границы которых определяются предельными циклами системы дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью полученных в статье результатов для предельных циклов показывается возможность использования кривизны цикла для проведения сравнительного анализа близости циклов фазовой и нефазовой систем, а также для определения режима скрытой синхронизации. Рассмотрен пример для проверки условий существования предельных циклов первого рода, позволяющий определить в фазовом пространстве исходной системы область, содержащую начальные условия таких циклов. Прикладное значение полученных результатов заключается в возможности использования системы фазовой автоподстройки как генератора модулированных колебаний.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, фазовая система, предельные циклы первого рода, скрытая синхронизация, мультистабильность, неподвижная точка, оператор сдвига, вращение векторного поля, кривизна цикла.

Для цитирования: Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 28–42. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.28–42

1. Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma, \tag{1.1}$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in [0;1]$, $\alpha_1,\ \rho_1,\ \rho_0 \in \mathbb{R}$. При $u = 0$ система (1.1) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Запаздывание в системе фазовой автоподстройки определяется значением параметра $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, при отсутствии запаздывания $\rho = 0$. В случае $\rho = 0$ изучению системы фазовой автоподстройки посвящено множество публикаций [1–6], а исследование системы (1.1) проводилось в работах [5–11]. В данной работе решается задача определения условий существования предельных циклов первого рода системы (1.1), которые определяют условия возникновения режимов скрытой синхронизации в таких системах [5; 6; 11].

2. Условия существования предельных циклов первого рода

Для системы (1.1) сформулирована теорема, доказательство которой базируется на построении положительно инвариантного тороидального множества с использованием двух цилиндрических поверхностей, границы которых определяются предельными циклами системы дифференциальных уравнений второго порядка. Использование циклов нефазовой системы (1.1) и численных методов позволяет определить наличие мультистабильности фазовой системы.

Теорема 2.1 *Пусть для системы (1.1) выполнены условия:*

1) $c^T b = -\Gamma < 0,\ c^T A = l^T, l^T b = -\nu_1 < 0,\ c^T A^{-1} b \neq 0,\ l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T, rang\,\|c,l\| = = 2,\ \alpha_1 > 0,\ \beta_1 > 0,\ \rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}, \rho = \rho_1 + \rho_0$;

2) $\varphi(\sigma)$ — Δ*-периодическая функция, имеющая два нуля на периоде* $\varphi(\widetilde{\sigma}_1) = \varphi(\widetilde{\sigma}_2) = = 0,\ 0 = \widetilde{\sigma}_1 < \widetilde{\sigma}_2 < \Delta,\ \dot{\varphi}(0) > 0,\ \dot{\varphi}(\widetilde{\sigma}_2) < 0,\ \dot{\varphi}(\sigma)$ — *ограничена на сегменте* $[0;\Delta]$;

3) существуют значения $\lambda_1, \lambda_2, r_1 > 0$ *такие, что система дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\dot{y} = -\lambda_1 y - \lambda_2 \sigma - \Gamma\varphi(\sigma) - \varepsilon, \dot{\sigma} = y + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0 (1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma \qquad (2.1)$$

при $\varepsilon = -\varepsilon_1^-,\ r_1 - \varepsilon_1^- < 0$ *имеет решение, определяющее функцию* $f_1^-(\sigma)$ *на* $\sigma \in [-\sigma_1; \sigma_2], f_1^-(-\sigma_1) = f_1^-(\sigma_2) = 0, f_1^-(\sigma) < 0$ *для любого* $\sigma \in (-\sigma_1;\sigma_2), \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$;

4) существует $r_2 > 0$ *такое, что система (2.1) при* $\varepsilon = \varepsilon_1^+ > r_2$ *имеет решение, определяющее функцию* $f_1^+(\sigma)$ *на* $\sigma \in [-\sigma_1;\sigma_3],\ \sigma_2 < \sigma_3,\ f_1^+(-\sigma_1) = f_1^+(\sigma_3) = 0, f_1^+(\sigma) > 0$ *для любого* $\sigma \in (-\sigma_1;\sigma_3)$*;*

5) система (2.1) при $\varepsilon = \varepsilon_2^- > r_2$ *имеет решение, определяющее функцию* $f_2^-(\sigma)$ *на* $[-\sigma_4;\sigma_5], f_2^-(-\sigma_4) = f_2^-(\sigma_5) = 0, -\sigma_4 < -\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_5,\ \ f_2^-(\sigma) < 0$ *для любого* $\sigma \in (-\sigma_4;\sigma_5)$*;*

6) система (2.1) при $\varepsilon = -\varepsilon_2^+, r_1 < \varepsilon_2^+$*, имеет решение, определяющее функцию* $f_2^+(\sigma)$ *на* $[-\sigma_6;\sigma_5], f_2^+(-\sigma_6) = f_2^+(\sigma_5) = 0, -\sigma_6 < -\sigma_4 < 0, f_2^+(\sigma) > 0$ *для любого* $\sigma \in (-\sigma_6;\sigma_5)$*;*

7) для любого $\sigma \in [-\sigma_6;-\sigma_4]$ *выполняется соотношение* $-\lambda_2\sigma - r_2 - \Gamma\varphi(\sigma) > 0$*;*

8) справедливо неравенство $r_1 - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) < 0$ *для любого* $\sigma \in [\sigma_2;\sigma_3]$*;*

9) для значений $\sigma \in [-\sigma_6;\sigma_5]$ *справедливы соотношения*

$$\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1), \qquad (2.2)$$

$$\psi_1(\sigma) = (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2(\alpha_1 u + \lambda_1 - \alpha_1)\sigma - (\alpha_1 - \lambda_1) r_1 < 0; \qquad (2.3)$$

10) если $\sigma \in [-\sigma_6;\sigma_5]$*, то справедливо неравенство*

$$\psi_2(\sigma) = (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2(\alpha_1 u + \lambda_1 - \alpha_1)\sigma + (\alpha_1 - \lambda_1) r_2 > 0; \qquad (2.4)$$

11) пусть $\psi_3(\sigma) = \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma$*, тогда функция* $\psi_4(\sigma) = = -\alpha_1\Gamma\varphi(\sigma) - \nu_1\varphi(\sigma) + \beta_1\psi_3(\sigma)$*, имеет единственный ноль на сегменте* $\sigma \in [-\sigma_6;\sigma_5]$*,* $\psi_4(0) = 0$.

Тогда система (1.1) имеет предельный цикл.

Доказательство.

Рассмотрим функции $W_1(z) = l^T x + \lambda_1 c^T x + \lambda_2\sigma - r_1, W_2(z) = l^T x + \lambda_1 c^T x + +\lambda_2\sigma + r_2,\ \ P(z) = c^T x, V_1^+(z) = c^T x - f_1^+(\sigma), V_1^-(z) = c^T x - f_1^-(\sigma), V_2^+(z) = c^T x - -f_2^+(\sigma), V_2^-(z) = c^T x - f_2^-(\sigma)$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}, r_1, r_2, f_1^+(\sigma), f_1^-(\sigma), f_2^+(\sigma), f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют условиям 3)–10) теоремы. Пусть

$$\partial Q_1 = \left\{z : V_1^+(z) = c^T x - f_1^+(\sigma) = 0,\ \sigma \in [-\sigma_1;\sigma_3]\right\},$$

$$\partial Q_2 = \left\{ z : V_1^- \left(z \right) = c^T x - f_1^- \left(\sigma \right) = 0, \ \sigma \in \left[-\sigma_1; \sigma_2 \right] \right\},$$

$$\partial Q_3 = \left\{ z : P \left(z \right) = c^T x = 0, \ \sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_3 \right\},$$

$\partial Q = \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_3$, тогда ∂Q является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂Q через множество Q.

Пусть

$$\partial D_1 = \left\{ z : V_2^+ \left(z \right) = c^T x - f_2^+ \left(\sigma \right) = 0, \ \sigma \in \left[-\sigma_6; \sigma_5 \right] \right\},$$

$$\partial D_2 = \left\{ z : V_2^- \left(z \right) = c^T x - f_2^- \left(\sigma \right) = 0, \ \sigma \in \left[-\sigma_4; \sigma_5 \right] \right\},$$

$$\partial D_3 = \left\{ z : P \left(z \right) = c^T x = 0, \ -\sigma_6 \leq \sigma \leq -\sigma_4 \right\},$$

$\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3$, тогда ∂D является цилиндрической поверхностью. Обозначим внутренность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂D через множество D. В силу условий теоремы множество $\Omega = Q \cap D \cap \{z : W_1 \left(z \right) \leq 0\} \cap \{z : W_2 \left(z \right) \geq 0\}$ является тороидальным, сечение его плоскостью $l^T x = 0$ изображено на Рис. 2.1, а граница этого множества определяется равенством $\partial \Omega = \partial \Omega_1^+ \cup \partial \Omega_2^+ \cup \partial \Omega_3^+ \cup \partial \Omega_4^- \cup \partial \Omega_5^- \cup \ \cup \partial \Omega_6^- \cup \partial \Omega_7^- \cup \partial \Omega_8^+$, где

$$L = \{z : W_1 \left(z \right) \leq 0, W_2 \left(z \right) \geq 0\},$$

$$\partial \Omega_1^+ = \partial Q_1 \cap L, \partial \Omega_2^+ = \partial Q_2 \cap L, \partial \Omega_3^+ = \partial Q_3 \cap L,$$

$$\partial \Omega_4^- = \partial D_1 \cap L, \partial \Omega_5^- = \partial D_2 \cap L, \partial \Omega_6^- = \partial D_3 \cap L,$$

$$\partial \Omega_7^- = Q \cap D \cap \{z : W_1 \left(z \right) = 0\}, \partial \Omega_8^+ = Q \cap D \cap \{z : W_2 \left(z \right) = 0\}.$$

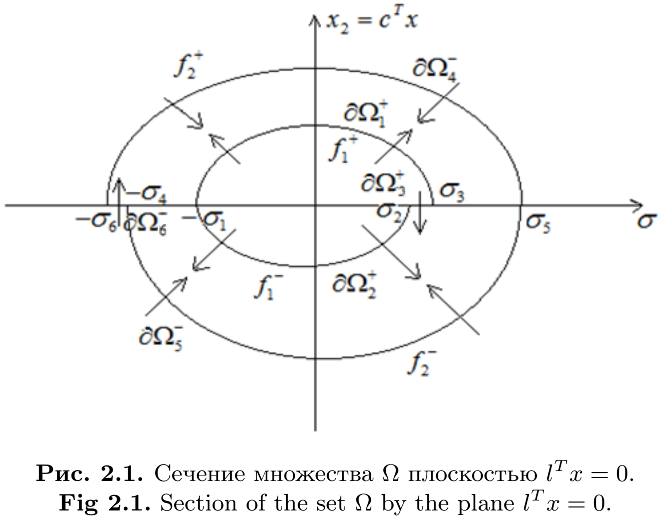


Рис. 2.1. Сечение множества Ω плоскостью $l^T x = 0$.
Fig 2.1. Section of the set Ω by the plane $l^T x = 0$.

Пусть $z \in \partial \Omega_1^+$, тогда справедливы соотношения

$$c^T x = f_1^+ \left(\sigma \right), \sigma \in \left[-\sigma_1; \sigma_3 \right], \tag{2.5}$$

$$l^T x \geq -r_2 - \lambda_1 c^T x - \lambda_2 \sigma. \tag{2.6}$$

Используя (2.5), (2.6) и условия 1); 4) теоремы найдём производную функции $V_1^+(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_1^+$

$$\begin{gathered}\dot{V_1}^+(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma}\big(f_1^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma\big) \geq \\ \geq -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_1^+(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma}\big(f_1^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma\big) = \\ = -r_2 + \varepsilon_1^+ > 0.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Для $z \in \partial\Omega_2^+$, выполняются соотношения

$$c^T x = f_1^-(\sigma), \sigma \in [-\sigma_1; \sigma_2], \tag{2.8}$$

$$l^T x \leq r_1 - \lambda_1 c^T x - \lambda_2 \sigma. \tag{2.9}$$

Найдём производную функции $V_1^-(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_2^+$. Используя (2.8), (2.9), условия 1), 3) теоремы, получим

$$\begin{gathered}\dot{V_1}^-(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma}\big(f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma\big) \leq \\ \leq r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_1^-(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma}\big(f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma\big) = \\ = r_1 - \varepsilon_1^- < 0.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3^+$, если $z \in \partial\Omega_3^+$, то справедливо неравенство (2.9) и равенство

$$c^T x = 0, \sigma \in [\sigma_2; \sigma_3], \tag{2.11}$$

В силу условий 1); 8) теоремы и (2.9), (2.11) получим, что производная функции $P(z)$ в силу системы (1.1) удовлетворяет соотношению

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \leq r_1 - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) < 0. \tag{2.12}$$

Пусть $z \in \partial\Omega_4^-$, тогда справедливо (2.9) и соотношение

$$c^T x = f_2^+(\sigma), \sigma \in [-\sigma_6; \sigma_5], \tag{2.13}$$

Используя (2.9), (2.13) и условия 1); 6) теоремы найдём производную функции $V_2^+(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_4^-$.

$$
\begin{gathered}
\dot{V_2}^{+}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_2^{+}(\sigma)}{d\sigma}\left(f_2^{+}(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma\right) \le \\
\le r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_2^{+}(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_2^{+}(\sigma)}{d\sigma}\left(f_2^{+}(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma\right) = \\
= r_1 - \varepsilon_2^{+} < 0.
\end{gathered} \tag{2.14}
$$

Для $z \in \partial\Omega_5^-$ выполняется (2.6) и равенство

$$
c^T x = f_2^-(\sigma), \sigma \in [-\sigma_4; \sigma_5], \tag{2.15}
$$

Найдём производную функции $V_2^-(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_5^-$, применив (2.6), (2.15) и условия 1); 5) теоремы. Получим

$$
\begin{gathered}
\dot{V_2}^{-}(z) \ge -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_2^-(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \\
- \frac{df_2^-(\sigma)}{d\sigma}\left(f_2^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma\right) = -r_2 + \varepsilon_2^- > 0.
\end{gathered} \tag{2.16}
$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_6^-$, если $z \in \partial\Omega_6^-$, то справедливо неравенство (2.6) и равенство

$$
c^T x = 0, \sigma \in [-\sigma_6; -\sigma_4]. \tag{2.17}
$$

С учётом условий 1); 7) теоремы и (2.6), (2.17) получим, что производная функции $P(z)$ в силу системы (1.1) удовлетворяет соотношению

$$
\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \ge -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^T x - \Gamma\varphi(\sigma) = -r_2 - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \tag{2.18}
$$

Пусть $z \in \partial\Omega_7^-$, тогда выполняется условие $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$ и справедливо соотношение

$$
l^T x = r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^T x. \tag{2.19}
$$

Используя (2.19) и условия 1); 9) теоремы найдём производную функции $W_1(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_7^-$.

$$
\begin{gathered}
\dot{W}_1(z) = -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1\varphi(\sigma) + \lambda_1 l^T x - \lambda_1\Gamma\varphi(\sigma) + \lambda_2 c^T x + \lambda_2\rho_1\varphi(\sigma) + \\
+ \lambda_2\rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \lambda_2\alpha_1 u\sigma = (\lambda_1 - \alpha_1) l^T x + (\lambda_2 - \beta_1) c^T x + \\
+ (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2\alpha_1 u\sigma = (\lambda_1 - \alpha_1) r_1 - (\lambda_1 - \alpha_1)\lambda_2\sigma - \\
- (\lambda_1 - \alpha_1)\lambda_1 c^T x + (\lambda_2 - \beta_1) c^T x + (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \\
- \lambda_2\alpha_1 u\sigma = (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)) c^T x - (\lambda_2\alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1))\sigma + \\
+ (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - (\alpha_1 - \lambda_1) r_1 = \psi_1(\sigma) < 0.
\end{gathered} \tag{2.20}
$$

Для $z \in \partial\Omega_8^+$ выполняется условие $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$ и равенство

$$l^T x = -r_2 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 c^T x. \tag{2.21}$$

Найдём производную функции $W_2(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_8^+$, применив (2.21) и условия 1); 10) теоремы. Получим

$$\begin{aligned}\dot{W}_2(z) = (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1))\, c^T x - (\lambda_2\alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1))\,\sigma + \\ + (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\,\varphi(\sigma) + (\alpha_1 - \lambda_1)\, r_2 = \psi_2(\sigma) > 0.\end{aligned} \tag{2.22}$$

С учётом соотношений (2.7), (2.10), (2.12), (2.14),(2.16), (2.18),(2.20), (2.22) получим, что множество Ω является положительно инвариантным.

Рассмотрим часть плоскости $P_0 = \{z : Q_0(z) = \sigma = 0, c^T x > 0\}$. Найдём пересечение множеств $\Omega \cap P_0 = G$. Обозначим через T оператор сдвига по траекториям системы (1.1). Покажем, что $T(G) \subset G$. Для этого множество Ω разобьем на два множества $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \Omega \setminus \{z : c^T x > 0, \sigma < 0\}$, $\Omega_2 = \overline{\Omega \setminus \Omega_1}$, Ω_2 – замыкание множества $\Omega \backslash \Omega_1$. В силу построения множества Ω справедливо, что существует $\overline{\varepsilon} > 0$ и для любого $z \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\left(c^T x\right)^2 + \sigma^2 \geq \overline{\varepsilon}. \tag{2.23}$$

Найдём производную функции $Q_0(z)$ в силу системы (1.1) на множестве G. Применяя условие 2) теоремы, получим

$$\dot{Q}_0(z) = c^T x + \rho_1\varphi(0) + \rho_0(1-u)\varphi(0) - \alpha_1 u\sigma = c^T x > 0. \tag{2.24}$$

Пусть $z \in G_{1,1} = \{z : c^T x = 0, -\sigma_4 < \sigma < -\sigma_1, W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\}$, тогда используя условия 1); 7) теоремы найдём производную функции $P(z) = c^T x$ в силу системы (1.1) на множестве $G_{1,1}$

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \geq -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^T x - \Gamma\varphi(\sigma) = -r_2 - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \tag{2.25}$$

Для множества Ω_1 поверхности G, $G_{1,1}$ являются частью границы. Пусть $z_0 \in G \subset \Omega_1$ покажем, что для решения системы (1.1) $z(t, z_0)$ с начальными условиями $z(0, z_0) = z_0$ существует t_1, такое что $z(t_1, z_0) \notin \Omega_1$. Предположим противное, то есть для любого $t > > 0$ выполняется принадлежность $z(t_1, z_0) \in \Omega_1$. Множество Ω_1 является ограниченным, следовательно, решение $z(t, z_0)$ является ограниченным.

Обозначим $\psi_3(\sigma) = \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma$. В силу системы (1.1) справедливо соотношение

$$\int_0^t \dot{\sigma}(t)dt = \int_0^t (c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma)dt = (\sigma(t) - \sigma(0)) \in R. \tag{2.26}$$

Из соотношения (2.26) в силу леммы Барбалата [12] получим равенство

$$\lim_{t\to+\infty}(c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = \lim_{t\to+\infty}(c^T x + \psi_3(\sigma)) = 0. \tag{2.27}$$

Используя условие 1) теоремы найдем интегралы

$$\int_0^t c^T \dot{x} dt = \int_0^t (l^T x - \Gamma\varphi(\sigma))dt = c^T(x(t) - x(0)) \in R, \tag{2.28}$$

$$\int_0^t l^T \dot{x} dt = \int_0^t (-\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma)) dt = l^T (x(t) - x(0)) \in R. \tag{2.29}$$

С учетом (2.28), (2.29) и леммы Барбалата справедливы равенства

$$\lim_{t \to +\infty} (l^T x - \Gamma\varphi(\sigma)) = 0, \tag{2.30}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (-\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma)) = 0. \tag{2.31}$$

Используя (2.27), (2.30), (2.32) получим

$$\lim_{t \to +\infty} (-\alpha_1 \Gamma\varphi(\sigma) + \beta_1 \psi_3(\sigma) - \nu_1 \varphi(\sigma)) = \lim_{t \to +\infty} \psi_4(\sigma) = 0. \tag{2.32}$$

В силу условий 2); 11) теоремы и (2.27), (2.32) получим

$$\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0, \lim_{t \to +\infty} c^T x = 0, \lim_{t \to +\infty} ((c^T x)^2 + \sigma^2) = 0. \tag{2.33}$$

Соотношения (2.23) и (2.33) одновременно не выполняются, следовательно, существует t_1, такое что $z(t_1, z_0) \notin \Omega_1$. С учетом (2.7), (2.10), (2.12), (2.14), (2.16), (2.24), (2.25) получим, что существует $\overline{t}$, для которого $z(\overline{t}, z_0) \in G_{1,1}$. Получим, что оператор T отображает множество G во множество $G_{1,1}$, $T(G) \subset G_{1,1}$.

Пусть $z \in G_{1,2} = \{z : c^T x = 0, -\sigma_6 < \sigma < -\sigma_1, W_1(z) \leq 0, W_2 \geq 0\}$, тогда используя условия 1); 7) теоремы найдём производную функции $P(z) = c^T x$ в силу системы (1.1) на множестве $G_{1,2}$

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \geq -r_2 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 c^T x - \Gamma\varphi(\sigma) = -r_2 - \lambda_2 \sigma - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \tag{2.34}$$

Для множества Ω_2 поверхности G, $G_{1,2}$ являются частью границы. Пусть $z_2 \in G_{1,2}$, $G_{1,1} \subset G_{1,2}$, тогда аналогично множеству Ω_1 показывается, что для решения системы (1.1) $z(t, z_2)$ с начальными условиями $z(0, z_2) = z_2$ существует t_2, такое что $z(t_2, z_2) \in G$. Таким образом, для оператора T выполняется включение $T(G) \subset G$.

Из непрерывности решений системы (1.1) и того факта, что множество G – множество без контакта следует непрерывность оператора T. Множество G – замкнутое, ограниченное, выпуклое, оператор T отображает множество G в себя, $T(G) \subset G$, тогда по теореме Брауэра [13] существует неподвижная точка оператора T такая, что $Tz^* = z^* \in G$. Неподвижная точка z^* определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Теорема доказана.

3. Проверка условий теоремы

Пример 3.1 Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.1), где $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, тогда $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $rang \, \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}$, $\rho = \rho_1 + \rho_0$. Для системы (1) выполнено условие 1) теоремы.

Пусть $\alpha_1 = 0.02,\ \beta_1 = 2.11,\ \Gamma = 4,\ \nu_1 = 1.24,\ \gamma = 0.12,\ u = 0.978,\ \rho_1 = 0.59,\ \rho_0 = 0.032$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + b\varphi_2(\widetilde{\sigma}),\ \dot{\widetilde{\sigma}} = c^T x + \rho_1\varphi_2(\widetilde{\sigma}) + \rho_0(1-u)\varphi_2(\widetilde{\sigma}) - \alpha_1 u\widetilde{\sigma}. \tag{3.1}$$

Функция $\varphi_2(\widetilde{\sigma}) = -\gamma + sin(\widetilde{\sigma})$ – периодическая с периодом $\Delta = 2\pi$. Уравнение $\varphi_2(\widetilde{\sigma}) = 0$ на сегменте $[0; \Delta]$ имеет два корня $\varphi_2(\widetilde{\sigma_1}) = \varphi_2(\widetilde{\sigma_2}) = 0$, где $0 < \widetilde{\sigma_1} < \widetilde{\sigma_2} < \Delta$, $\widetilde{\sigma_1} = arcsin\gamma = 0.12,\ \widetilde{\sigma_2} = \pi - 2arcsin\gamma = 2.9$. В системе (3.1) сделаем замену переменных $\sigma = \widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma_1}$, тогда в силу условия 2) теоремы система (3.1) примет вид (1.1), где $\varphi(\sigma) = = -\gamma + sin(\widetilde{\sigma} + arcsin\gamma)$. Тогда $\dot{\varphi}(0) > 0,\ \dot{\varphi}(\sigma_2) < 0,\ \dot{\varphi}(\sigma)$ ограничена на сегменте $[0; \Delta]$. Для системы (1.1) выполнено условие 2) теоремы.

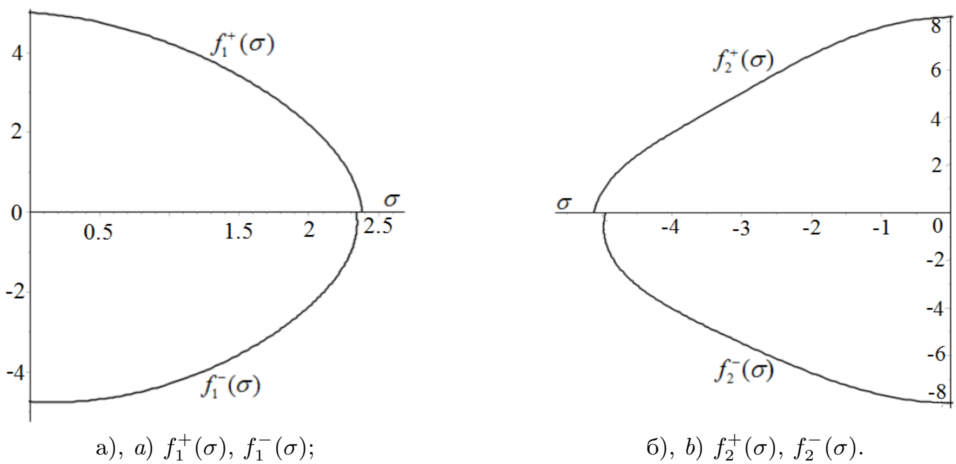
Пусть $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \beta_1 = 2.11$ тогда система второго порядка (2.1) при $\varepsilon = -\varepsilon_1^- = -0.96$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$ такую, что при любом $\sigma \in [-2.161; 2.34]$ справедливы соотношения $f_1^-(-2.161) = f_1^-(2.34) = 0,\ \sigma_1 = 2.161 > 0,\ \sigma_2 = 2.34$ и $f_1^-(\sigma) < 0$. Существует $r_1 > 0$ и $r_1 - \varepsilon_1^- < 0$. Для системы (1.1) выполняется условие 3) теоремы.

Система второго порядка (2.1) при $\varepsilon = \varepsilon_1^+ = 0.96 > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma)$ на $\sigma \in [-2.161; 2.382]$, где$\sigma_3 = 2.382 > 0$. Функция $f_1^+(\sigma) > 0$, $f_1^+(-2.161) = f_1^+(2.382) = 0,\ f_1^+(\sigma) > 0$ и $0 < 2.34 < 2.382$. Существует такое r_2, для которого $r_2 < \varepsilon = \varepsilon_1^+ = 0.96$. Условие 4) теоремы выполняется.

Система (2.1) в случае $\varepsilon = \varepsilon_2^- = 0.26 > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^-(\sigma)$ на $\sigma \in [-4.949; 5.749]$, где $-\sigma_4 = -4.949$ и $\sigma_5 = 5.749$. Функция $f_2^-(\sigma) < 0$, $f_2^-(-4.949) = f_2^-(5.749)$ и справедливы неравенства $-4.949 < -2.161 < 2.382 < 5.749$. Проверено условие 5) теоремы.

При $\varepsilon = -\varepsilon_2^+ = -0.26$ и $r_1 < \varepsilon_2^+$ показывается, что система второго порядка (2.1) имеет решение $f_2^+(\sigma)$ на $\sigma \in [-5.118; 5.749]$, где $-\sigma_6 = -5.118$. Функция $f_2^+(\sigma) > 0$, $f_2^+(-5.118) = f_2^+(5.749) = 0$ и справедливы неравенства $-5.118 < -4.949 < 0$. Проверено условие 6) теоремы.

На Рис. 3.1, а изображены функции $f_1^+(\sigma)$ и $f_1^-(\sigma)$, а на Рис. 3.1, б – функции $f_2^+(\sigma)$ и $f_2^-(\sigma)$.

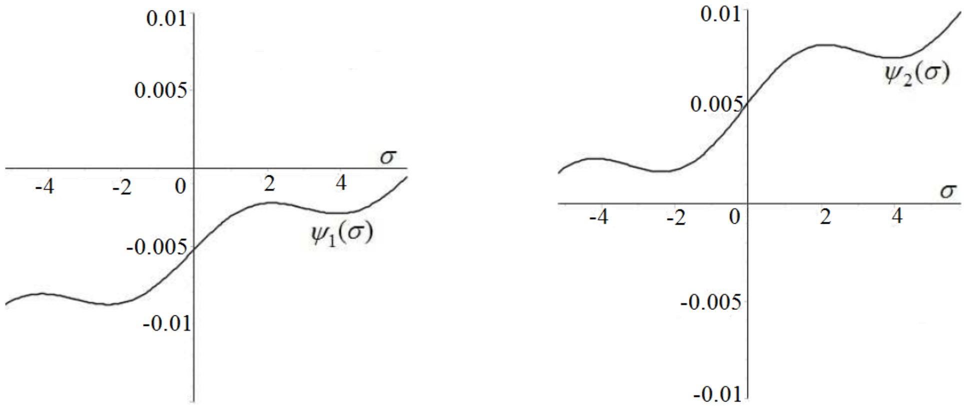


а), *a)* $f_1^+(\sigma),\ f_1^-(\sigma)$; б), *b)* $f_2^+(\sigma),\ f_2^-(\sigma)$.

Рис. 3.1. Графики функций а) $f_1^+(\sigma),\ f_1^-(\sigma)$ и б) $f_2^+(\sigma),\ f_2^-(\sigma)$.
Fig 3.1. Function graphs *a)* $f_1^+(\sigma),\ f_1^-(\sigma)$ and *b)* $f_2^+(\sigma),\ f_2^-(\sigma)$.

Численно показывается, что при $\sigma \in [-5.118; -4.949]$ выполняется соотношение $-2.11\sigma - r_2 - 4\varphi(\sigma) > 0$, а для любого $\sigma \in [2.34; 2.382]$ справедливо неравенство $r_1 - 2.11\sigma - 4\varphi(\sigma) < 0$. В теореме выполнены условия 7), 8).

При $\sigma \in [-5.118; 5.749]$ выполняются неравенства $\psi_1(\sigma) < 0$ и $\psi_2(\sigma) > 0$. На Рис. 3.2, а-б изображены функции $\psi_1(\sigma) < 0$ и $\psi_2(\sigma) > 0$. Выполнены условия 9) и 10) теоремы.



а), *a*) $\psi_1(\sigma) < 0$; б), *b*) $\psi_2(\sigma) > 0$.

Рис. 3.2. Графики функций $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ при условии а) $\psi_1(\sigma) < 0$ и б) $\psi_2(\sigma) > 0$.

Fig 3.2. Function graphs $\psi_1(\sigma)$ and $\psi_2(\sigma)$ provided *a*) $\psi_1(\sigma) < 0$ and *b*) $\psi_2(\sigma) > 0$.

Если $\psi_3(\sigma) = 0.59\varphi(\sigma) + 7.04 \cdot 10^{-4}\varphi(\sigma) - 0.019\sigma$, то функция $\psi_4(\sigma) = -0.08\varphi(\sigma) - -1.24\varphi(\sigma) + 2.11\psi_3(\sigma)$ имеет единственный ноль на сегменте $\sigma \in [-5.118; 5.749]$, $\psi_4(0) = 0$. Условие 11) теоремы выполняется.

Для системы (1.1) выполнены все условия теоремы, тогда система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Условия теоремы позволяют определить область начальных условий цикла первого рода системы (1.1). Численно показывается, что система (1.1) при $u = 0.978$ имеет устойчивый предельный цикл первого рода $z_1(t) = colon(x_1(t), x_2(t), \sigma(t))$ с начальными условиями $x_1 = -0.00165$, $x_2 = 7.10951$, $\sigma = 0$, $T_z = 4.6802$ и $<\dot{\sigma}>= 0.00073$, где $<\dot{\sigma}>= T^{-1}\int_0^T \dot{\sigma}(t)dt = 0$.

Рассмотрим множество $\omega_1 = \{(\sigma, x) : (x_1 - 0.00165)^2 + (x_2 - 7.10951)^2 \leq 2.22^2, \sigma = 0\}$. Пусть U_1– оператор сдвига по траекториям системы (1.1), тогда $U_1(\omega_1) \subset \{z : \sigma = 0, c^T x > 0\}$. Обозначим $Q_1(x) = x - U_1(x)$, $\gamma(Q_1, \partial\omega_1)$ – вращение векторного поля Q_1 оператора U_1 на границе $\partial\omega_1$ множества ω_1. Вращение векторного поля Q_1 на границе $\partial\omega_1$ множества ω_1 отлично от нуля, $\gamma(Q_1, \partial\omega_1) \neq 0$. Множество ω_1 при $u = 0.978$ содержит неподвижную точку оператора U_1, определяющую начальные условия цикла первого рода $z_1(t)$ системы (1.1).

При уменьшении значения параметра u до значения $u = 0$, нефазовая система (1.1) становится фазовой системой с запаздыванием

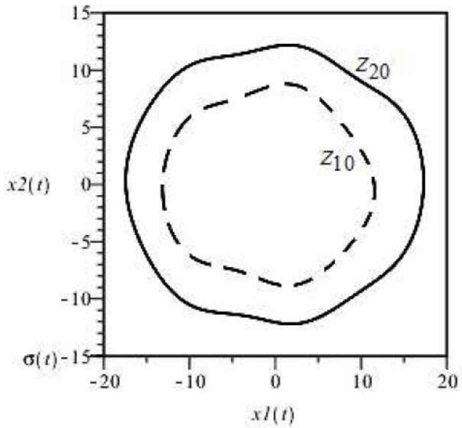
$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma),\ \dot{\sigma} = c^T x + (\rho_1 + \rho_0)\varphi(\sigma). \tag{3.2}$$

Пусть U_2 оператор сдвига по траекториям системы (1.1), $Q_2(x) = x - U_2(x)$, $\gamma(Q_2, \partial\omega_2)$ – вращение векторного Q_2 поля оператора U_2. Численно показывается, что

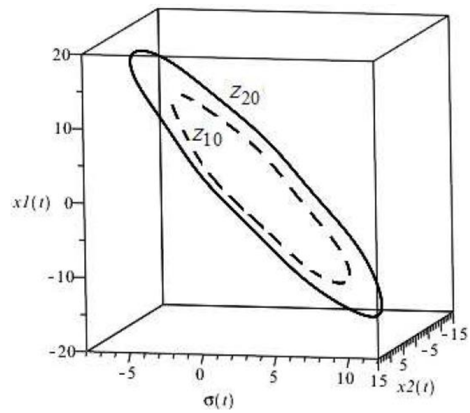
$\gamma(Q_2, \partial\omega_2) \neq \neq 0$, на $\partial\omega_2 = \{(\sigma, x) : (x_1 - 1.890)^2 + (x_2 - 8.743)^2 = 1.22^2, \sigma = 0\}$. Оператор U_2 имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия устойчивого цикла первого рода $z_{10}(t)$, $x_1 = 1.89025$, $x_2 = 8.74307$, $\sigma = 0$, $T_{z_{10}} = 4.45675$ фазовой системы (3.2), для которого $< \dot{\sigma} >= 0.00089$. Таким образом, цикл $z_1(t)$ нефазовой системы (1.1) переходит в цикл $z_{10}(t)$ фазовой системы (3.2).

У фазовой системы (3.2) помимо цикла $z_{10}(t)$ существует еще один устойчивый предельный цикл $z_{20}(t)$ с начальными условиями $x_1 = 2.36543$, $x_2 = 12.1368$, $\sigma = 0$, $T_{z_{20}} = 4.29085 < \dot{\sigma} >= 0.0012$. Существование в системе (3.2) разночастотных предельных циклов первого рода позволяет сделать вывод о наличии фазовой мультистабильности в этой системе, при этом предельные циклы первого рода системы (3.2) определяют режимы фазовой синхронизации.

На Рис. 3.3, а изображены проекции полученных циклов $z_{10}(t)$,$z_{20}(t)$ фазовой системы (3.2) на плоскость (x_1, x_2), а на Рис. 3.3, б представлено их изображение в пространстве (x_1, x_2, σ).



а), *a*) (x_1, x_2);



б), *b*) (x_1, x_2, σ).

Рис. 3.3. Циклы $z_{10}(t)$ и $z_{20}(t)$ фазовой системы в плоскости а) (x_1, x_2) и в пространстве б) (x_1, x_2, σ).

Fig 3.3. Cycles $z_{10}(t)$ and $z_{20}(t)$ of the phase system in the plane *a*) (x_1, x_2) and in space *b*) (x_1, x_2, σ).

В работах [6; 7; 11] проводились исследования, связанные с определением пространственных характеристик циклов систем (1.1) и (3.2). Под пространственными характеристиками, понимаются понятия кривизны $K_z(t)$ и кручения $Q_z(t)$ циклов первого рода. Был рассмотрен вопрос возможности использования кривизны и кручения для определения характеристик режима скрытой синхронизации в системах фазовой автоподстройки [6; 7]. В работе [11] было показано, что для определения режима скрытой синхронизации в случае фазовой мультистабильности можно использовать кривизну цикла.

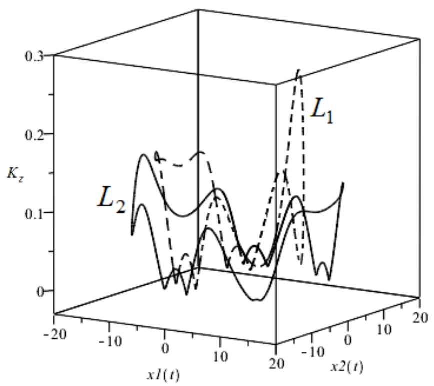
Для выбора наилучшего режима скрытой синхронизации системы (1.1) возникает необходимость проведения сравнительного анализа зависимости кривизны циклов системы (1.1) от ее координат. Для этого рассматривается расширенная система вида [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma, \\ \dot{K}(t) = \psi(\sigma, x), \end{cases} \tag{3.3}$$

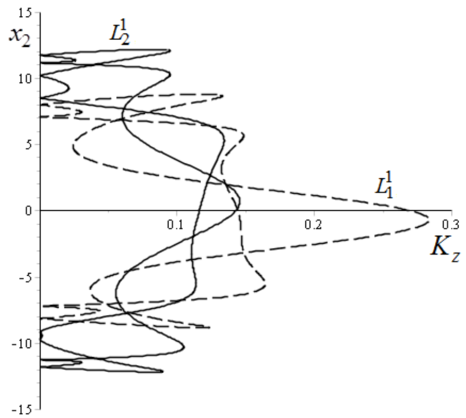
где $\dot{K}(t) = \dfrac{g'f - 3gf'}{2g^{1/2}f^{5/2}}$ – производная кривизны цикла системы (1.1), а функции $g(x;\sigma),\ g'(x;\sigma),\ f(x;\sigma),\ f'(x;\sigma)$ и определяются соотношениями

$$\begin{aligned} g(x;\sigma) =& (x_1'x_2'' - x_1''x_2')^2 + (x_2'\sigma'' - x_2''\sigma')^2 + (\sigma'x_1'' - \sigma''x_1')^2, \\ g'(x;\sigma) =& 2(x_1'x_2'' - x_1''x_2')(x_1'x_2''' - x_1'''x_2') + 2(x_2'\sigma'' - x_2''\sigma')(x_2'\sigma''' - x_2'''\sigma') + \\ &+ 2(\sigma'x_1'' - \sigma''x_1')(\sigma'x_1''' - \sigma'''x_1'), \\ f(x;\sigma) =& (x_1')^2 + (x_2')^2 + (\sigma')^2, \\ f'(x;\sigma) =& 2x_1'x_1'' + 2x_2'x_2'' + 2\sigma'\sigma''. \end{aligned}$$

Используя результаты, полученные в работах [6; 7; 11], для циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, системы (3.2) проведен сравнительный анализ зависимости кривизны от фазовых координат этой системы. Так, например, на Рис. 3.4, а в пространстве $(x_1; x_2; K_z(t))$ изображены линии $L_1,\ L_2$ определяющие решения системы (3.3), с начальными условиями, соответствующими начальным условиям циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$ системы (3.2), а на Рис. 3.4, б представлены линии $L_1^1,\ L_2^2$, которые описывают зависимость кривизны $K_z(t)$ этих циклов от координаты $x_2(t)$.



а), *a*) $L_1,\ L_2$;



б), *b*) $L_1^1,\ L_2^2$.

Рис. 3.4. Линии а) $L_1,\ L_2$ и б) $L_1^1,\ L_2^2$.
Fig 3.4. Lines *a*) $L_1,\ L_2$ and *b*) $L_1^1,\ L_2^2$.

Использование пространственных характеристик позволяет проводить анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем для определения режима фазовой синхронизации. Результаты, полученные в данной работе, для математической модели системы фазовой автоподстройки, описываемой системой (3.2), позволяют получить условия существования в такой системе режимов фазовой мультистабильности, квазисинхронных режимов и режимов вынужденной фазовой синхронизации, влияющих на появление в системе (3.2) режима скрытой синхронизации.

Список литературы

1. Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 368 с.

2. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448с.

3. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.

4. Мамонов С.С., Харламова А.О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т.19, №1. С. 67–76. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.67-76

5. Мамонов С.С., Харламова А.О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 62. С. 26–35. DOI: https://doi.org/10.21667/1995-4565-2017-62-4-26-35

6. Мамонов С.С., Ионова И.В., Харламова А.О. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3. С. 333–348. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-333-348

7. Мамонов С.С., Ионова И.В., Харламова А.О. Кривизна колебательных циклов фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 19, № 2. С. 105-110.

8. Kharlamova A. O. Asynchronous modes of phase systems. Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 248, No. 4. P. 476–483. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-04888-w

9. Mamonov S.S., Kharlamova A. O. First-kind cycles of systems with cylindrical phase space// Journal of Mathematical Sciences, 2020. Vol. 248, No. 4, P. 457–466 (2020). DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-04886-y

10. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Матричные уравнения систем фазовой синхронизации // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2. С. 244–258. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-2-244-258

11. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Пространственные характеристики циклов систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : межвуз. сб. науч. тр. 2020. Вып. 1. С. 39–45.

12. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988. 256 с.

13. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.

Поступила 22.01.2021; доработана после рецензирования 25.02.2021; принята к публикации 28.02.2021

Информация об авторах:

Мамонов Сергей Станиславович, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина», (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5626-748X, s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионова Ирина Викторовна, доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина», (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2580-5388, i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина», (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7811-381X, a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 34C25

Dynamics of the mathematical model of phase-locked systems with delay

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova

Ryazan State University named after S.A. Esenin (Ryazan, Russian Federation)

Abstract. In the article, the conditions for the existence of limit cycles of the first kind are obtained for self-tuning systems with delay, which, in turn, determine the conditions for the occurrence of hidden synchronization modes in such systems. The principle of the proof is based on constructing a positively invariant toroidal set using two cylindrical surfaces, whose boundaries are determined by the limit cycles of a system of the second-order differential equations. Using the results obtained in the article for limit cycles, the possibility of using the curvature of the cycle for a comparative analysis of the proximity of the cycles of phase and non-phase systems, as well as for determining the mode of hidden synchronization, is shown.

Key Words: system of differential equations, phase system, limit cycles of the first kind, latent synchronization, multistability, fixed point, shift operator, rotation of a vector field, cycle curvature

For citation: *S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova.* Dynamics of the mathematical model of phase-locked systems with delay. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:1(2021), 28–42. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.28–42

References

1. G. A. Leonov, I. M. Burkin, A. I. Shepelyavyy, *[Frequency methods in the theory of vibrations]*, SPbGU Publ., St. Petersburg, 1992 (In Russ.), 368 p.
2. V. V. Shahgildyan, A. A. Lyakhovkin, *[Phase-locked loop systems]*, Svyaz' Publ, Moscow, 1972 (In Russ.), 448 p.
3. V. D. Shalfeev, V. V. Matrosov, *[Nonlinear dynamics of phase synchronization systems]*, NNGU Publ., N. Novgorod, 2013 (In Russ.), 366 p.

4. S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova, "Determination of the conditions for the existence of limit cycles of the first kind of systems with a cylindrical phase space", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:1 (2017), 67–76 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.67-76

5. S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova, "Forced synchronization of the system phase-locked loop with delay", *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta.*, **62** (2017), 26–35 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.21667/1995-4565-2017-62-4-26-35

6. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, "Mechanisms of occurrence of hidden synchronization of dynamic systems", *Chebyshevckiy sbornik*, **20**:3 (2019), 333–348 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-333-348

7. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, "Curvature of oscillatory cycles of phase systems", *Vestnik RAEN. Differentsial'nye uravneniya*, **19**:2 (2019), 105–110 (In Russ.).

8. A. O. Kharlamova, "Asynchronous modes of phase systems", *Journal of Mathematical Sciences*, **248**:4 (2020), 476–483. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-04888-w

9. S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova, "First-kind cycles of systems with cylindrical phase space", *Journal of Mathematical Sciences*, **248**:4 (2020), 457–466. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-04886-y

10. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, "Matrix equations of the system of phase synchronization", *Chebyshevskii Sbornik*, **20**:2 (2019), 244–258 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-2-244-258

11. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, "Spatial characteristics of cycles of systems of differential equations", *Differentsial'nye uravneniya i matematicheskoe modelirovanie : mezhvuz. sb. nauch. tr.*, **1** (2020), 39–45 (In Russ.).

12. E. P. Popov, *[Theory of nonlinear automatic control and control systems]*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 256 p.

13. M. A. Krasnosel'skiy, *[The operator of the shift along the trajectories of differential equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 332 p.

Submitted 22.01.2021; Revised 25.02.2021; Accepted 28.02.2021

Information about the authors:

Sergei S. Mamonov, Full Professor, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenin (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5626-748X, s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Irina V. Ionova, Associate Professor, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenin (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2580-5388, i.ionova@365.rsu.edu.ru

Anastasiya O. Kharlamova, Senior Lecturer, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenin (46 Svobody

Str., Ryazan 390000, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7811-381X, a.harlamova@365.rsu.edu.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.