Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.449-455

*УДК 519.624*

# Итеративный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве

© **И. П. Рязанцева**[1]

**Аннотация.** Исследована сходимость неявного итеративного метода второго порядка с постоянными коэффициентами для нелинейных монотонных уравнений в гильбертовом пространстве. Для неотрицательных решений разностного числового неравенства второго порядка установлена оценка сверху. Эта оценка используется при доказательстве сходимости изучаемого итеративного метода. Сходимость итеративного метода установлена в предположении, что оператор уравнения на гильбертовом пространстве является монотонным и удовлетворяет условию Липшица. Достаточные условия сходимости предложенного метода включают также некоторые соотношения, связывающие параметры, определяющие указанные свойства оператора решаемого уравнения и коэффициенты разностного уравнения второго порядка, определяющего изучаемый метод. Параметрическое обеспечение предложенного метода подтверждено примером. Предложенный метод второго порядка с постоянными коэффициентами имеет лучшую оценку сверху скорости сходимости по сравнению с тем же методом с переменными коэффициентами, который изучался ранее.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, сильно монотонный оператор, условие Липшица, разностное уравнение, итеративный процесс второго порядка, оценка сверху решения числового разностного неравенства второго порядка, теорема Штольца, сходимость

## 1. Постановка задачи

Пусть $H$ – вещественное гильбертово пространство, $(u, v)$ – скалярное произведение элементов $u$ и $v$ из $H$, $A : H \to H$ – нелинейный оператор, обладающий свойствами:

а) $A$ – сильно монотонный оператор, т. е. справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \ \ M > 0; \tag{1.1}$$

б) $A$ удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \ \ L > 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим в $H$ уравнение

$$Ax = f, \quad f \in H. \tag{1.3}$$

В рассматриваемых предположениях оно имеет единственное решение $x$ в $H$ (см., например, [1–2]).

Построим в $H$ итеративный процесс второго порядка следующего вида

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau}\right) + \lambda\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \mu[Ay_n - f] = 0, \quad n = 1, 2, \ \dots\ , \tag{1.4}$$

[1]**Рязанцева Ирина Прокофьевна**, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru

где элементы $y_{-1}$, $y_0$ из $H$ задаются, $\tau$, $\lambda$ и $\mu$ – некоторые положительные постоянные. Методы вида (1.4) рассматривались ранее в предположении, что $\lambda = \lambda_n$, $\tau = \tau_n$, где $\{\lambda_n\}$ и $\{\tau_n\}$ – бесконечно малые последовательности (см., например, [3]; регуляризованный вариант в [4]).

Уравнение (1.4) перепишем в следующем виде:

$$\mu\tau A y_n + \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right) y_n = \mu\tau f + \frac{2y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} + \lambda y_{n-1}. \tag{1.5}$$

Таким образом, для нахождения элемента $y_n$ при любом $n \geq 1$ имеем уравнение с сильно монотонным непрерывным оператором. Следовательно (см., например, [1–2]), элемент $y_n$ определяется из (1.4) однозначно при всех $n \geq 1$.

В данной работе получены достаточные условия сильной сходимости в $H$ процесса (1.4) к решению (1.1) и установлена оценка скорости его сходимости, которая выше, чем для итерационного процесса с переменным коэффициентом $\lambda = \lambda_n$ и переменным $\tau = \tau_n$, изученного в [3].

## 2. Вспомогательные утверждения

В данном разделе построим оценки сверху для решений разностных числовых неравенств первого и второго порядка.

Здесь и далее $\{\omega_k\}$ и $\{b_k\}$ – последовательности неотрицательных чисел; $\tau$ – положительное число.

Справедливо утверждение (см. [5]).

**Л е м м а 2.1** *Пусть члены последовательности $\{\omega_k\}$ удовлетворяют разностному неравенству первого порядка вида*

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d\omega_k \leq b_k, \qquad d < 0, \quad b_k \geq 0,$$

*где элемент $\omega_0 \geq 0$ задаётся, тогда*

$$\omega_k \leq \omega_0 \exp(-ck) + \tau \sum_{i=1}^{k} b_i \exp(c(i-k)), \quad k \geq 1, \qquad c = \frac{d\tau}{d\tau - 1}. \tag{2.6}$$

Пусть теперь члены последовательности $\{\omega_n\}$ удовлетворяют разностному неравенству второго порядка следующего вида

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau}(1 + p\tau) - \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau} + q\tau\omega_k \leq b_k\tau, \quad k \geq 1, \tag{2.7}$$

где $\tau_0 > 0$; и неотрицательные значения $\omega_0$ и $\omega_{-1}$ задаются; $p$ и $q$ – некоторые действительные числа.
Предположим, что квадратное уравнение

$$s^2 + ps + q = 0 \tag{2.8}$$

имеет различные отрицательные корни $d_1$ и $d_2$, тогда $p = -(d_1 + d_2)$, $q = d_1 d_2$, и неравенство (2.7) перепишем в следующей форме:

$$\left(\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d_1\omega_k\right)(1 - d_2\tau) \leq \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau} - d_1\omega_{k-1} + b_k\tau. \tag{2.9}$$

Введём обозначение

$$u_k = \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d_1\omega_k, \quad k \geq 1, \tag{2.10}$$

тогда (2.9) примет вид

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} - d_2 u_k \leq b_k, \quad k \geq 1.$$

Отсюда, предположив, что $u_k \geq 0$ при $k \geq 1$, на основании Леммы 2.1 имеем

$$u_k \leq u_0 \exp(-h_2 k) + \tau \sum_{i=1}^{k} b_i \exp(h_2(i-k)), \qquad k \geq 1, \;\; h_j = \frac{d_j\tau}{d_j\tau - 1}, \;\; j = 1, 2. \tag{2.11}$$

Далее, из (2.10) с учетом установленной оценки (2.11) имеем

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d_1\omega_k \leq |u_0| \exp(-h_2 k) + \tau \sum_{i=1}^{k} b_i \exp(h_2(i-k)), \qquad k \geq 1.$$

Это неравенство тем более верно, если какие-то $u_k \leq 0$. Теперь Лемма 2.1 приводит к неравенству

$$\begin{aligned} &\omega_k \leq \omega_0 \exp(-h_1 k) + \\ + \quad &\tau \sum_{i=1}^{k} \left[ |u_0| \exp(-h_2 i) + \tau \sum_{j=1}^{i} b_j \exp(h_2(j-i)) \right] \exp(h_1(i-k)). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Таким образом, установлено утверждение.

**Л е м м а 2.2** *Пусть p и q в (2.7) таковы, что уравнение (2.8) имеет различные отрицательные корни $d_1$ и $d_2$. Тогда имеет место оценка (2.12).*

## 3. Сходимость итеративного метода

Уравнение (1.4) с учётом (1.3) перепишем в виде

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau}\right) + \lambda \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \mu[Ay_n - Ax] = 0, \quad n = 1, 2, \; \dots \,. \tag{3.13}$$

Умножив (3.13) скалярно на $y_n - x$, придем к равенству

$$\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau}, y_n - x\right) + \lambda(y_n - y_{n-1}, y_n - x) + \mu\tau(Ay_n - Ax, y_n - x) = 0. \tag{3.14}$$

Пусть

$$r_n = \frac{\|y_n - x\|^2}{2}, \quad \xi_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}, \quad \rho_n = \frac{\|\xi_n\|^2}{2}.$$

Используя неравенство

$$(\varphi'(v), v - u) \geq \varphi(v) - \varphi(u) \quad \forall u, v \in H, \tag{3.15}$$

для выпуклого дифференцируемого функционала $\varphi(u) = \|u\|^2/2$, получим

$$(y_n - x, y_n - y_{n-1}) \geq \frac{\|y_n - x\|^2}{2} - \frac{\|y_{n-1} - x\|^2}{2} = r_n - r_{n-1}. \tag{3.16}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} &(y_n - x, y_{n-2} - y_{n-1}) = (y_{n-2} - x, y_{n-2} - y_{n-1}) + \\ + \quad &(y_n - y_{n-2}, y_{n-2} - y_{n-1}) \geq \frac{\|y_{n-2} - x\|^2}{2} - \frac{\|y_{n-1} - x\|^2}{2} + \\ + \quad &(y_n - y_{n-2}, y_{n-2} - y_{n-1}) = r_{n-2} - r_{n-1} + (y_n - y_{n-2}, y_{n-2} - y_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Теперь, приняв во внимание свойство (1.1) оператора $A$, (3.16)–(3.17) и числовое неравенство $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, от (3.14) приходим к оценке

$$\begin{aligned} \frac{r_n - r_{n-1}}{\tau} \quad &- \quad \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{\tau} + \lambda(r_n - r_{n-1}) + 2\mu M \tau r_n \leq \\ &\leq \quad \frac{1}{\tau}(y_n - y_{n-2}, y_{n-1} - y_{n-2}) = \tau \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}, \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} \right) + \\ &+ \quad \tau \left\| \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} \right\|^2 \leq \tau(\rho_n + 3\rho_{n-1}) = F_n. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Следовательно, для получения из последнего неравенства оценки сверху для $r_n$ на основе Леммы 2.2 необходимо исключить из (3.18) величины $\rho_n$ и $\rho_{n-1}$. Используя величину $\xi_n$, равенство (3.13) перепишем в следующей форме:

$$\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\tau} + \lambda \xi_n + \mu(Ay_n - Ax) = 0.$$

Умножив последнее равенство скалярно на $\xi_n$, с учетом условия Липшица (1.2) получим

$$\frac{1}{\tau}(\xi_n - \xi_{n-1}, \xi_n) + 2\lambda\rho_n \leq \mu L \|y_n - x\| \, \|\xi_n\|. \tag{3.19}$$

Вновь используя (3.15), имеем

$$(\xi_n - \xi_{n-1}, \xi_n) \geq \rho_n - \rho_{n-1},$$

и применив в правой части (3.19) приведённое выше числовое неравенство, установим следующую оценку:

$$\frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\tau} + 2\lambda\rho_n \leq \mu L(r_n + \rho_n),$$

т. е.

$$\frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\tau} + \mu_1 \rho_n \leq \mu L r_n, \quad \mu_1 = 2\lambda - \mu L. \tag{3.20}$$

Далее считаем, что $\mu_1 > 0$.
Пусть

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 \tau + 1}.$$

Теперь Лемма 2.1 на основании (3.20) позволяет записать оценку

$$\rho_n \leq c_1 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L \tau \sum_{k=1}^{n} r_k \exp(\tilde{\mu}_1 (k - n)). \tag{3.21}$$

Здесь $c_1$ – некоторая положительная постоянная. Далее через $c_k$ обозначаем положительные постоянные при $k = 1, 2, 3, \ \dots$ . Применив к последнему слагаемому в правой части (3.21) теорему Штольца, приходим к оценке

$$\rho_n = c_1 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L \tau \alpha_1 \lambda_1 r_n, \quad \alpha_1 > 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{1 - \exp(-\tilde{\mu}_1)}. \tag{3.22}$$

Используя (3.22), получим следующую оценку сверху для величины $F_n$ (см. (3.18)):

$$F_n \le c_2 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L \tau^2 \alpha_1 \lambda_1 (r_n + 3r_{n-1}).$$

Теперь от (3.18) приходим к неравенству

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{\tau} - \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{\tau} + \lambda(r_n - r_{n-1}) + 2\mu M \tau r_n \le c_2 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L \tau^2 \alpha_1 \lambda_1 (r_n + 3r_{n-1})$$

или

$$\begin{aligned} \frac{r_n - r_{n-1}}{\tau} &- \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{\tau} + (\lambda + 3\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2)(r_n - r_{n-1}) + \\ &+ (2\mu M \tau - 4\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2) r_n \le c_2 \exp(-\tilde{\mu}_1 n). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Пусть

$$p = \lambda + 3\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2, \quad q = 2M\mu\tau - 4\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2, \tag{3.24}$$

тогда корни квадратного уравнения (2.8) определяются равенствами

$$s_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad s_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

и если $q > 0$, $p^2 - 4q > 0$, то $s_1 < 0$, $s_2 < 0$, $s_1 \ne s_2$. Неравенство $p^2 - 4q > 0$ выполняется при достаточно больших $\lambda$, а неравенство $q > 0$ справедливо при достаточно малом $\tau$.

Используя Лемму 2.2, из (3.23) получим оценку вида

$$\begin{aligned} r_n &\le r_0 \exp(-\sigma_1 n) + \\ &+ \tau \sum_{i=1}^{n} \left[ c_3 \exp(-\sigma_2 i) + c_2 \tau \sum_{j=1}^{i} \exp(-\tilde{\mu}_1 j) \exp(\sigma_2 (j - i)) \right] \exp(\sigma_1 (i - n)), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$\sigma_k = \frac{s_k \tau}{s_k \tau - 1}, \ \ k = 1, 2, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2.$$

Применив теорему Штольца к членам правой части последнего неравенства, содержащим суммы, получим

$$r_n \le r_0 \exp(-\sigma_1 n) + c_4 \exp(-\sigma_2 n) + c_5 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) \le c_6 \exp(-\sigma n), \quad \sigma = \min\{\sigma_1, \tilde{\mu}_1\} > 0. \tag{3.26}$$

Следовательно, в рассматриваемых предположениях доказана сходимость последовательности $\{r_n\}$ к нулю при $n \to \infty$, т. е. $y_n \to x$ при $n \to +\infty$.

Сформулируем полученный результат.

**Т е о р е м а 3.1** *Пусть $H$ – вещественное гильбертово пространство, оператор $A : H \to H$ обладает свойствами (1.1)–(1.2). Тогда уравнение (1.4) при любых элементах $y_{n-1}$, $y_{n-2}$ из $H$ и любых положительных постоянных $\lambda, \mu, \tau$ однозначно разрешимо относительно элемента $y_n$. Пусть коэффициенты уравнения $\lambda, \mu$ и параметр $\tau$ удовлетворяют условиям $q > 0$, $p^2 - 4q > 0$, где $p$ и $q$ определяются равенствами (3.24), тогда последовательность $\{y_n\}$, определяемая из уравнения (3.13), сходится по норме пространства $H$ при $n \to +\infty$ к единственному решению уравнения (1.4).*

В работе [3], как уже отмечалось, метод вида (1.4) изучался при $\lambda = \lambda_n$, где $\{\lambda_n\}$ – бесконечно малая, и $\tau = \tau_n$, причём последовательность $\{\tau_n\}$ обладает некоторыми свойствами, где вместо (3.26) была получена оценка

$$r_n \leq O\left(\exp(-\beta\lambda_n T_n)\right), \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k,$$

$\beta$ – некоторая положительная постоянная. Метод типа (1.4) изучался в [4], при этом оценка скорости его сходимости не была установлена. Оценки, полученные в Леммах 2.1 и 2.2, позволили в данной работе построить более простую схему доказательства сходимости итеративного метода (1.4), чем в [4], и получить оценку скорости сходимости метода.

Применяя простые расчёты для $M = 1, L = 2, \alpha_1 = 1.2$ найдём, например, $\sigma = 0.0000631$ при $\lambda = 15,\ \mu = 9,\ \tau = 0.01$ и $\sigma = 0.000934$ при $\lambda = 39,\ \mu = 25,\ \tau = 0.1$.

Заметим, что принять $\tau = 1$ (что упростило бы (1.4)) не удаётся, т. к. в условиях доказанной теоремы $\tau$ должно быть достаточно мало.

## Список литературы


1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.

2. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer. 2006. 410 p.

3. Рязанцева И. П. Итеративные процессы второго порядка для монотонных включений в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика. 2013. №7. С. 52-61.

4. Рязанцева И. П. Метод второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2014. Т.50, №9. С. 1264-1275.

5. Апарцин А. С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве // Труды по прикладной математике и кибернетике. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1972. С. 7-14.


*Поступила 10.10.2020*

*MSC2020 65J15*

# Continuous method of second order with constant coefficients for monotone equations in Hilbert space

© **I. P. Ryazantseva**[1]

**Abstract.** Convergence of an implicit second-order iterative method with constant coefficients for nonlinear monotone equations in Hilbert space is investigated. For non-negative solutions of a second-order difference numerical inequality, a top-down estimate is established. This estimate is used to prove the convergence of the iterative method under study. The convergence of the iterative method is established under the assumption that the operator of the equation on a Hilbert space is monotone and satisfies the Lipschitz condition. Sufficient conditions for convergence of proposed method also include some relations connecting parameters that determine the specified properties of the operator in the equation to be solved and coefficients of the second-order difference equation that defines the method to be studied. The parametric support of the proposed method is confirmed by an example. The proposed second-order method with constant coefficients has a better upper estimate of the convergence rate compared to the same method with variable coefficients that was studied earlier.

**Key Words:** hilbert space, strongly monotone operator, Lipschitz condition, difference equation, second-order iterative process, top-down estimate of the solution of a second-order numerical difference inequality, Stolz's theorem, convergence

## References

1. M. M. Vainberg, *[Variational methods and method of monotone operators in theory of nonlinear equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 416 p.
2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Publ., Dordrecht, 2006 (In Neth.), 410 p.
3. I. P. Ryazantseva, "[Second-order iterative process of monotone inclusions in a Hilbert space]", *Izvestiya vuzov. Matematika*, **7** (2013), 52–61 (In Russ).
4. I. P. Ryazantseva, "[Second-order iterative process for monotone inclusions in a Banach space]", *Differential Equation*, **50**:9 (2014), 1264–1275. (In Russ.).
5. A. S. Aparcin, *Trudy po prikladnoy matematike i kibernetike*, Irkutsk University Publ., Irkutsk, 1972 (In Russ.).

*Submitted 10.10.2020*

[1]**Irina P. Ryazantseva**, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R. E. Alekseev (24 Minina St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru