Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.442-448

УДК 519.17

О новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске

© **О. О. Развенская**[1]

Аннотация. Классическая NP-трудная задача о взвешенной вершинной раскраске состоит в минимизации количества цветов в раскрасках вершин задаваемого графа так, что для каждой вершины назначаются цвета, количество которых равно задаваемому весу вершины, причем смежным вершинам назначаются различные цвета. Соответствующее наименьшее количество цветов называется взвешенным хроматическим числом графа. Известно несколько полиномиальных алгоритмических приемов для построения эффективных алгоритмов для задачи о взвешенной вершинной раскраске. Например, стандартными приемами такого рода являются модульное разложение графов и разложение графов посредством разделяющих клик. В данной статье предлагаются новые полиномиальные способы редукции графов в форме удаления избыточных вершин и пересчета весов остальных вершин так, что взвешенное хроматическое число изменяется контролируемым образом. Приводится способ сведения задачи о взвешенной вершинной раскраске к ее невзвешенному варианту и его приложение. Эта работа вносит вклад в алгоритмическую теорию графов.

Ключевые слова: задача о взвешенной вершинной раскраске, эффективный алгоритм, вычислительная сложность

1. Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. непомеченные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Поэтому полный термин «обыкновенный граф» будет кратко называться «граф».

Вершинной раскраской графа $G = (V, E)$ называется произвольное отображение $c: V \longrightarrow \mathbb{N}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V$. *Хроматическое число графа* G, которое обозначается через $\chi(G)$, – это минимальное число цветов в раскрасках вершин графа G. Хроматическое число графа опредиляется как наименьшее количество множеств попарно несмежных вершин (*независимых множеств*), на которые можно разбить множество его вершин. *Задача о вершинной раскраске* (*задача* ВР) для заданного графа состоит в вычислении его хроматического числа.

Для данного графа $G = (V, E)$ и функции $w : V \longrightarrow \mathbb{N}_0$ пара (G, w) называется *взвешенным графом.* Для взвешенного графа (G, w) задача *о взвешенной вершинной раскраске* (далее, кратко задача ВВР) состоит в нахождении минимального числа k, обозначаемого через $\chi_w(G)$, такого, что существует функция $c : V \longrightarrow 2^{\{1,2,\ldots,k\}}$, где $|c(v)| = w(v)$ для любой $v \in V$ и $c(v_1) \cap c(v_2) = \emptyset$ для любого ребра v_1v_2 графа G. При этом предполагается, что вершины нулевого веса не окрашиваются, и поэтому их можно удалить из графа G. Элементы множества $\bigcup\limits_{v \in V} c(v)$ называются *цветами.* Множество вершин, содержащих общий цвет, называется *цветовым классом.* Число $\chi_w(G)$

[1]**Развенская Ольга Олеговна**, аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, ФГАОУ ВО «НИУ ВШЭ» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0002-1440-9910, olga-olegov@yandex.ru

называется *взвешенным хроматическим числом* взвешенного графа (G, w). Для любого графа G имеем $\chi_w(G) = \chi(G)$, где w задает вес каждой вершины, равный 1. Таким образом, задача ВВР обобщает задачу ВР. Задачи ВР и ВВР являются классическими NP-трудными задачами на графах.

Известно несколько полиномиальных алгоритмических приемов для построения эффективных алгоритмов для задачи ВВР. Например, стандартными такого рода приемами являются модульное разложение графов и разложение графов посредством разделяющих клик, которые подробно описываются в разделах 3.1-3.2 данной работы. В этой статье предлагаются новые полиномиальные способы редукции графов в форме удаления избыточных вершин и пересчета весов остальных вершин так, что взвешенное хроматическое число изменяется контролируемым образом. Приводится способ сведения задачи ВВР к задаче ВР и его приложение. Они представлены в разделах 3.4-3.6.

2. Некоторые обозначения

Пусть $G = (V, E)$ — граф и $V' \subseteq V$. Через $\overline{G}$ обозначается граф, дополнительный к G, через $G(V')$ обозначается подграф G, порожденный подмножеством V', а через $G \setminus V'$ обозначается результат удаления из G всех элементов V' (вместе со всеми инцидентными им ребрами).

3. Алгоритмические приемы построения эффективных алгоритмов для задачи ВВР

3.1. Модульное разложение графов

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество $M \subseteq V$ называется *модулем* графа G, если для любой $x \in V \setminus M$ вершина x либо смежна со всеми вершинами M, либо не смежна ни с одной из них. Модуль графа называется *тривиальным*, если он содержит либо одну вершину, либо все вершины исходного графа. В противном случае он называется *нетривиальным*. Граф, не содержащий нетривиальных модулей, называется *примарным*. Например, 4-путь, в отличие от 4-цикла, является примарным.

Модульное разложение графа — это алгоритм, в основе которого лежит следующий результат Т. Галлаи о разложении (см. работу [1]):

Лемма 3.1 *Пусть $G = (V, E)$ — граф, содержащий минимум две вершины. Тогда только в точности одно из следующих утверждений верно:*

1) G — несвязный;

2) $\overline{G}$ — несвязный;

3) G и $\overline{G}$ — связные графы и существует множество вершин V', содержащее не менее четырех вершин, а также единственное разбиение $P(G)$ множества V такое, что:

a) $G(V')$ — максимальный примарный порожденный подграф графа G;

b) для любого $V'' \in P(G)$ множество V'' является модулем (возможно, тривиальным) графа G и $|V'' \cap V'| = 1$.

Согласно Лемме 3.1, существует три типа операций разложения. Первый: если G — несвязный граф, то разложим его на компоненты связности $G_1, \ldots, G_p$. Второй: если $\overline{G}$ имеет компоненты связности $\overline{G_1}, \ldots, \overline{G_q}$, то разложим G на $G_1, \ldots, G_q$. Третий: если G и $\overline{G}$ — связные графы, то максимальные модули попарно не пересекаются, т. е. не имеют общих вершин, и порождают разбиение $P(G)$. Таким образом, граф G разложен на подграфы $\{G(V'') : V'' \in P(G)\}$. Кроме того, стянем каждый элемент разбиения $P(G)$ в вершину и получим граф, изоморфный $G(V')$. Другими словами, $G(V')$ — порожденный подграф графа G, полученный путем взятия по одной вершине из каждого элемента $P(G)$.

Процесс разбиения, описанный выше, может быть представлен в виде дерева, определенного единственным образом, называемого *деревом модульного разложения* и обозначаемого через $T(G)$ для графа G. Его вершины соответствуют порожденным подграфам графа G. Для первых двух типов операций разложения корень дерева $T(G)$, соответствущий графу G, имеет детей, соответствующих каждой компоненте связности графа G или $\overline{G}$ соответственно. Для третьего типа операции разложения дети этой вершины соответствуют графам из $\{G(V'') : V'' \in P(G)\}$. Кроме этого, ассоциируем граф $G(V')$ с корнем дерева $T(G)$. Иными словами, $G(V')$ — «правило», по которому графы, соответствующие детям корневого узла дерева $T(G)$, будут связываться в граф, соответствующий корню $T(G)$. Дерево модульного разложения может быть построено за время $O(n+m)$ для любого графа на n вершинах с m ребрами [2].

Очевидно, что для любой функции w имеем $\chi_w(G) = \max\limits_i(\chi_w(G_i))$, где $G_1, \ldots, G_p$ — компоненты связности графа G. Аналогично, если $\overline{G_1}, \ldots, \overline{G_q}$ — компоненты связности графа $\overline{G}$, то $\chi_w(G) = \sum\limits_{i=1}^{q} \chi_w(G_i)$.

Л е м м а 3.2 *Пусть (G, w) — взвешенный граф и $P(G)$ — его модульное разложение. Тогда $\chi_w(G) = \chi_{w^*}(G(V'))$, где $w^*(v) = \chi_w(G(V''))$ для любых вершины $v \in V'$ и множества $V'' \in P(G)$, где $\{v\} = V' \cap V''$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стягивание множества $V'' \in P(G)$ в вершину v и присвоение $w(v) = \chi_w(G(V''))$ порождает взвешенный подграф графа G, чье взвешенное хроматическое число не превышает $\chi_w(G)$. Для этого подграфа любой элемент из $N(v)$ не может иметь цвет, совпадающий с одним из $\chi_w(G(V''))$ цветов вершины v. Следовательно, взвешенное хроматическое число подграфа имеет значение не менее, чем $\chi_w(G)$. Таким образом, $\chi_w(G) = \chi_{w^*}(G(V'))$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Пусть $[\mathcal{X}]_P$ — множество всех графов, у которых каждый их примарный порожденный подграф принадлежит классу $\mathcal{X}$. Далее приводится Лемму, которая следует из Леммы 3.2 и возможности построения дерева модульного разложения за линейное время [2]:

Л е м м а 3.3 *Задача* ВВР *для графов из $[\mathcal{X}]_P$ сводится за полиномиальное время к той же задаче для графов из класса $\mathcal{X}$.*

3.2. Разложение посредством разделяющих клик

Разделяющей кликой в графе называется подмножество его вершин, порождающее полный подграф, удаление которого приводит к увеличению количества компонент связности. Например, результат удаления из n-вершинного полного графа одного ребра имеет разделяющую клику на $(n-2)$ вершинах.

Если граф $G = (V, E)$ имеет разделяющую клику Q, тогда $V \setminus Q$ может быть разбито произвольным образом на непустые подмножества A и B так, что каждая вершина из A не смежна ни с какой вершиной из B. Пусть $G_1 = G(A \cup Q)$ и $G_2 = G(B \cup Q)$. Продолжим процесс декомпозиции до тех пор, пока это возможно. Весь этот процесс может быть представлен в виде бинарного дерева, которое определяется не единственным образом. Листья этого дерева соответствуют некоторым порожденным подграфам графа G без разделяющих клик. Существует алгоритм, имеющий вычислительную сложность $O(m \cdot n)$, для построения некоторого такого бинарного дерева для любого графа на n вершинах с m ребрами [3].

Лемма 3.4 *Для любого взвешенного графа* (G, w) *имеем*

$$\chi_w(G) = \max(\chi_w(G_1), \chi_w(G_2)).$$

Доказательство. Пусть c_1 и c_2 — оптимальные взвешенные раскраски графов $(G_1 = (V_1, E_1), w)$ и $(G_2 = (V_2, E_2), w)$ соответственно. Пусть $\bigcup\limits_{v \in V_1} c_1(v) = \{col_1, \ldots, col_p\}$ и $\bigcup\limits_{u \in V_2} c_2(u) = \{col'_1, \ldots, col'_q\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $q \geq p$, что для любой вершины v из множества Q имеем $c_1(v) = \{col_{i_1^{(v)}}, \ldots, col_{i_k^{(v)}}\}$ и $c_2(v) = \{col'_{i_1^{(v)}}, \ldots, col'_{i_k^{(v)}}\}$. Определим вершинную раскраску c графа (G, w) следующим образом. Для любой вершины $x \in V_2$ положим $c(x) = c_2(x)$. Для любых $y \in V_1 \setminus V_2$ и $i \in \{1, \ldots, p\}$ имеем $col'_i \in c(y)$ тогда и только тогда, когда $col_i \in c_1(y)$. Таким образом, граф (G, w) может быть раскрашен в $\chi_w(G_2)$ цветов, поэтому $\chi_w(G) = \chi_w(G_2)$.
Доказательство завершено.

Для данного графа любой его максимальный порожденный подграф, не имеющий собственной разделяющей клики, называется *C-блоком* графа. Листья бинарного дерева разложения посредством разделяющих клик любого графа соответствуют его C-блокам. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс графов. Если любой C-блок некоторого графа принадлежит классу $\mathcal{X}$, то говорим, что этот граф принадлежит *C-замыканию класса* $\mathcal{X}$, обозначаемому через $[\mathcal{X}]_C$.

Лемма 3.5 *Задача* ВВР *для графов из* $[\mathcal{X}]_C$ *сводится за полиномиальное время к той же задаче для графов из класса* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Каждый C-блок любого графа $G \in [\mathcal{X}]_C$ принадлежит классу $\mathcal{X}$. Дерево разложения посредством разделяющих клик для графа $G = (V, E)$ может быть построено за время $O(|V| \cdot |E|)$. Таким образом, по Лемме 3.4 имеет место обозначенное выше сведение.
Доказательство завершено.

3.3. Атомарные графы и их значение

Связный примарный граф без разделяющих клик называется *атомарным*. *Наследственный класс* графов — множество графов, замкнутое относительно удаления вершин. Из Лемм 3.3 и 3.5 следует справедливость следующего утверждения:

Лемма 3.6 *Для любого наследственного класса графов задача* ВВР *сводится за полиномиальное время к той же задаче для его атомарных графов.*

3.4. Неприводимые графы и их значение

Анти-окрестностью вершины $v \in V$ назовем множество $V \setminus N(v)$, обозначаемое через $\overline{N(v)}$.

Л е м м а 3.7 *Пусть (G, w) — взвешенный граф, содержащий вершину v такую, что $\overline{N(v)} = \{v, v_1, \ldots, v_k\}$ является независимым множеством. Тогда $\chi_w(G) = \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$, где $w'(u) = w(u)$ для любой вершины $u \notin \overline{N(v)}$ и $w'(u) = \max(w(u) - w(v), 0)$ для любой вершины $u \neq v$, принадлежащей множеству $\overline{N(v)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\overline{N(v)}$ является независимым, то любой цвет, используемый для v, может быть также использован для каждой вершины из $\overline{N(v)} \setminus \{v\}$ с сохранением допустимости раскраски и общего количества используемых цветов. Таким образом, достаточно рассматривать такие раскраски графа (G, w), в которых для любой вершины $u \in \overline{N(v)}$ некоторые из $\min(w(v), w(u))$ цветов для u совпадают с некоторыми из $\min(w(v), w(u))$ цветов для v. Удаление v из G и уменьшение $w(u)$ на $\min(w(v), w(u))$ для каждого $u \in \overline{N(v)} \setminus \{v\}$ приводит к взвешенному графу $(G \setminus \{v\}, w')$, который может быть раскрашен в $\chi_w(G) - w(v)$ цветов. Следовательно, $\chi_w(G) \geq \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$. С другой стороны, любая раскраска $(G \setminus \{v\}, w')$ может быть дополнена до раскраски (G, w) путем использования новых $w(v)$ цветов для окрашивания вершины v и добавления любых новых $w(u) - w'(u)$ цветов для окрашивания каждой вершины $u \in \overline{N(v)} \setminus \{v\}$. Следовательно, $\chi_w(G) \leq \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Атомарный граф назовем *неприводимым*, если анти-окрестность каждой его вершины не является независимым множеством. Из Лемм 3.6 и 3.7 следует справедливость следующего результата:

Л е м м а 3.8 *Для любого наследственного класса графов задача* ВВР *сводится за полиномиальное время к той же задаче для его неприводимых графов.*

3.5. Переборная элиминация вершин специального типа и ее значение

Переборный аналог Леммы 3.7 для случая, когда $\overline{N(v)} \setminus \{v\}$ является кликой, представлен в следующем очевидном утверждении:

Л е м м а 3.9 *Пусть (G, w) — взвешенный граф, содержащий вершину v такую, что $\overline{N(v)} \setminus \{v\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ является кликой. Пусть Ω — совокупность таких назначений w' весов вершинам графа $G \setminus \{v\}$, что:*

- *$w'(u) = w(u)$ для любой вершины $u \notin \overline{N(v)}$;*
- *для некоторых целых неотрицальных чисел $w_1, w_2, \ldots, w_k$, в сумме дающих $w(v)$, имеем $w'(v_i) = \max(w(v_i) - w_i, 0)$ для любого $1 \leq i \leq k$.*

Тогда $\chi_w(G) = \min\limits_{w' \in \Omega} \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$.

В Лемме 3.9 переменная w_i означает количество общих цветов у вершин v и v_i. Количество решений уравнения $w_1 + w_2 + \cdots + w_k = w(v)$ в целых неотрицательных числах равно $\binom{k}{w(v)+k-1}$. Следовательно, задача ВВР для пары (G, w) сводится к $\binom{k}{w(v)+k-1}$ задачам ВВР, каждая на графе $G \setminus \{v\}$, причем переход к каждой такой задаче выполняется за полиномиальное время.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, где $|V| \geq 2$. Образуем по нему новый граф $G' = (V', E')$ следующим образом. Добавляются вершины v_1, v_2, u_1, u_2 и все ребра вида vv_i, где $v \in V, i \in \{1, 2\}$, а также ребра v_1u_1, u_1u_2, u_2v_2. Очевидно, что G' содержит в точности один порожденный 4-путь, в котором две внутренние вершины имеют в G степень 2. Таким образом, восстановить G по G' можно за время $O(|V'|^4)$.

Л е м м а 3.10 *Для любой функции* $w : V' \longrightarrow \mathbb{N}_0$ *имеет место соотношение:*

$$\chi_w(G') = \min_{x \leq w(v_2)} (w(v_1) + w(v_2) - x + \max(\chi_w(G), \chi'_x)),$$

где $\chi'_x = \max(w(u_1) - w(v_2) + x, 0) + \max(w(u_2) - w(v_1) + x, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соображений симметрии можно считать, что $w(v_1) \geq w(v_2)$. Пусть x означает количество общих цветов вершин v_1 и v_2 в рассматриваемой вершинной раскраске взвешенного графа (G', w). Таким образом, имеется в точности $w(v_1) + w(v_2) - x$ различных цветов для окрашивания вершин $\{v_1, v_2\}$, каждый из которых нельзя использовать для окрашивания вершин графа G. Чтобы минимизировать общее количество цветов, используемых для $\{u_1, u_2\}$, каждый из оставшихся $w(v_1) - x$ цветов для v_1 можно использовать для окрашивания u_2. Аналогично, каждый из оставшихся $w(v_2) - x$ цветов для v_2 можно использовать для окрашивания u_1. Следовательно, для окрашивания u_1 и u_2 необходимо χ'_x цветов. Таким образом, справедливо соотношение:

$$\chi_w(H) = \min_{x \leq w(v_2)} (w(v_1) + w(v_2) - x + \max(\chi_w(G), \chi'_x)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3.6. Юнитизация весов и ее значение

Для взвешенного графа $(G' = (V', E'), w')$, где $V' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, определим операцию *юнитизации весов*. Результатом данной операции будет граф $G_{w'}$ с множеством вершин, разбитым на клики $Q_1, \ldots, Q_n$, где $|Q_i| = w'_i$ для любого $1 \leq i \leq n$. Для любых i и j каждая вершина клики Q_i смежна (и, соответственно, не смежна) с каждой вершиной клики Q_j тогда и только тогда, когда $v'_i v'_j \in E'$ (соответственно, $v'_i v'_j \notin E'$). Будем говорить, что операция юнитизации весов *сохраняет класс графов* $\mathcal{X}$, если для любых графа $G' \in \mathcal{X}$ и весовой функции w' справедливо $G_{w'} \in \mathcal{X}$. Очевидно, что справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 3.11 *Для любого класса графов, сохраняемого при юнитизации весов, задача* ВВР *сводится за полиномиальное от суммы весов вершин время к задаче* ВР *для графов из того же класса.*

Идея сохранения класса графов при юнитизации весов также используется при доказательстве следующего утверждения:

Л е м м а 3.12 *Задача* ВВР *для любого графа* $(G = (V, E), w)$ *без трех попарно несмежных вершин может быть решена за время* $O((\sum\limits_{v \in V} w(v))^3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим невзвешенный граф $G' = (V', E')$ на $\sum\limits_{v \in V} w(v)$ вершинах путем применения операции юнитизации весов к графу $(G = (V, E), w)$. Очевидно, что $\chi_w(G) = \chi(G')$ и что G' является графом без трех попарно несмежных вершин. Более того, $\chi(G') = |V'| - \pi(G')$, где $\pi(G')$ — количество ребер в наибольшем паросочетании графа G'. Это количество может быть найдено за время $O(|V'|^3)$ (см. работу [4]).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Список литературы

1. Gallai T. Transitiv orientierbare graphen. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1967. vol. 18, pp. 25–66.
2. Cournier A., Habib M. A new linear algorithm for modular decomposition. Lecture Notes in Computer Science. 1994. vol. 787, pp. 68–84.
3. Tarjan R. Decomposition by clique separators. Discrete Mathematics. 1985. vol. 55, pp. 221–232.
4. Edmonds J. Paths, trees, and flowers. Canadian Journal of Mathematics. 1965. vol. 17, pp. 449–467.

Поступила 11.09.2020

MSC2020 05C15

On new algorithmic techniques for the weighted vertex coloring problem

© **O. O. Razvenskaya**[1]

Abstract. The classical NP-hard weighted vertex coloring problem consists in minimizing the number of colors in colorings of vertices of a given graph so that, for each vertex, the number of its colors equals a given weight of the vertex and adjacent vertices receive distinct colors. The weighted chromatic number is the smallest number of colors in these colorings. There are several polynomial-time algorithmic techniques for designing efficient algorithms for the weighted vertex coloring problem. For example, standard techniques of this kind are the modular graph decomposition and the graph decomposition by separating cliques. This article proposes new polynomial-time methods for graph reduction in the form of removing redundant vertices and recomputing weights of the remaining vertices so that the weighted chromatic number changes in a controlled manner. We also present a method of reducing the weighted vertex coloring problem to its unweighted version and its application. This paper contributes to the algorithmic graph theory.

Key Words: weighted vertex coloring problem, efficient algorithm, computational complexity

References

1. T. Gallai, "Transitiv orientierbare graphen", *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **18** (1967), 25–66.
2. A. Cournier, M. Habib., "A new linear algorithm for modular decomposition", *Discrete Mathematics*, **787** (1994), 68–84.
3. R. Tarjan, "Decomposition by clique separators", *Discrete Mathematics*, **55** (1985), 221–232.
4. E. Edmonds, "Paths, trees, and flowers", *Canadian Journal of Mathematics*, **17** (1965), 449–467.

Submitted 11.09.2020

[1]**Olga O. Razvenskaya**, graduate student, Department of Applied Mathematics and Information Science, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1440-9910, olga-olegov@yandex.ru