

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.352-367

УДК 517.9, 532.5, 539.3

**Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах**© П. А. Вельмисов<sup>1</sup>, Ю. А. Тамарова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье рассматриваются начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, представляющие собой математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления», которая предназначена для измерения давления в газожидкостных средах. На основе предложенных моделей исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющего датчик с камерой сгорания двигателя. Для описания движения рабочей среды используются линейные модели механики жидкости и газа, для описания динамики чувствительного элемента применяются как линейные, так и нелинейные модели механики твердого деформируемого тела. Решения указанных начально-краевых задач проводятся на основе метода Галеркина и конечно-разностного метода.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, аэроупругость, трубопровод, датчик давления, упругий элемент, динамика, метод конечных разностей, метод Галеркина

**1. Введение**

Развитие техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления, характеризующихся экстремными условиями эксплуатации. Описанию датчиков измерительных систем, принципов их работы, технических характеристик посвящены работы [1]-[8].

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию температур и виброускорений. Влияние нестационарной температуры измеряемой среды на погрешность измерения рассмотрено в [9], вопросам повышения виброустойчивости датчиков, выбора конструкционных и функциональных материалов посвящена работа [10]. Размещение датчика давления непосредственно на двигателе принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, при этом на датчики давления действуют большие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

Таким образом, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления», в которой датчик расположен на некотором расстоянии от

<sup>1</sup>**Вельмисов Петр Александрович**, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

<sup>2</sup>**Тамарова Юлия Александровна**, соискатель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, [kazakovaua@mail.ru](mailto:kazakovaua@mail.ru)

двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод) и деформацию упругого элемента датчика (расположенного на выходе из трубопровода), и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод – датчик давления» в случае несжимаемости рабочей среды рассматривались в работах [11]–[16]. Совокупность моделей и методов исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» представлена в монографиях [17],[18].

В данной работе исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе на основе двумерных и трехмерных моделей, представляющих собой начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений. Динамика рабочей среды в трубопроводе описывается дифференциальным уравнением с частными производными, соответствующим линейной теории движения жидкостей или газов в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. С помощью приближенного метода решения, основанного на введении усредненных характеристик, исследование указанных начально-краевых задач сведено к исследованию одномерной задачи, в которой для описания динамики чувствительного элемента используется модель, основой которой является обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс одномассовой системы. Исследование указанной одномерной начально-краевой задачи основано на методе Галеркина и конечно-разностном методе [19],[20].

## 2. Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления»

### 2.1. Двумерная плоская модель системы «трубопровод-датчик давления»

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей плоской модели механической системы «трубопровод – датчик давления», имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, h), \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(l, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.3)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.4)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, t) - P_* = L(w(y, t)), \quad y \in (0, h). \quad (2.5)$$

Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор в уравнении (2.5), описывающем динамику упругого элемента, может быть задан по разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(y, t)) = L^*(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(\dot{w}, w); \quad (2.6)$$

$$L(w(y, t)) \equiv L^*(w(y, t)) - w'' \left( \mu \int_0^l w'^2 dy + \eta \frac{d}{dt} \int_0^l w'^2 dy \right); \quad (2.7)$$

$$L(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + \left[ Dw'' \left( 1 - \frac{3}{2} w'^2 \right) \right]'' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(\dot{w}, w); \quad (2.8)$$

$$L(w(y, t)) \equiv mw_{tt} + \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + Nw_{yy} + \beta \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yyt} + f(\dot{w}, w). \quad (2.9)$$

В модели (2.7) учтена нелинейность продольной силы, возникающей вследствие удлинения трубопровода из-за его деформации; модель (2.8) учитывает нелинейность изгибающего момента; в модели (2.9) предполагаются нелинейными упругие силы и их демпфирование.

В (2.1)-(2.9)  $\varphi(x, y, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с прямолинейными стенками  $y = 0$ ,  $y = h$ ;  $w(y, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $a_0$  - плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды;  $P(y, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ;  $P_*$  - внешнее воздействие на упругий элемент;  $m$  и  $D$  - погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента;  $N$  - сжимающее (растягивающее) элемент усилие;  $\beta$ ,  $\eta$  - коэффициенты внутреннего демпфирования;  $\mu$  - коэффициент, зависящий от прочностных и геометрических характеристик элемента и типа его закрепления;  $f(\dot{w}, w)$  - некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации  $w(y, t)$  и скорости деформации  $\dot{w}(y, t)$ ; индексы  $x$ ,  $y$ ,  $t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x$ ,  $y$  и времени  $t$ , точка сверху - частную производную по  $t$ , штрих - частную производную по  $y$ .

Уравнение (2.1) описывает движение идеального газа в трубопроводе; (2.2), (2.3) - условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.4) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.5) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, y, t)$ ,  $w(y, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для  $w(y, t)$  при  $y = 0$ ,  $y = h$ , соответствующие типу закрепления концов элемента (например,  $w = w_y = 0$  для жесткого защемления,  $w = w_{yy} = 0$  для шарнирного закрепления).

Рассмотрим один из способов решения задачи (2.1)-(2.5). Введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \int_0^h \varphi(x, y, t) dy, & \xi(t) &= \int_0^h w(y, t) dy, \\ G(t) &= \int_0^h P(y, t) dy, & Q(w) &= \int_0^h L(w(y, t)) dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда, проводя в (2.1)-(2.5) интегрирование по  $y$  в пределах от 0 до  $h$ , с учетом граничных условий (2.2), получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (2.11)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (2.12)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (2.13)$$

$$(P_0 - P_*)h - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w). \quad (2.14)$$

Положим  $w(y, t) = g(y)\theta(t)$ ,  $w_0 = \int_0^h g(y) dy$ , где функция  $g(y)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента (например,

в случае шарнирного закрепления обоих концов можно задать  $g(y) = \sin \frac{\pi y}{h}$ . Тогда  $\xi(t) = w_0 \theta(t)$ .

Пусть, например,  $L(w(y, t)) = m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + \alpha\dot{w} + \gamma w$ , где  $\alpha, \gamma$  - коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. Тогда

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \quad (2.15)$$

где  $m_0 = m \int_0^h g(y) dy$ ,  $\alpha_0 = \alpha \int_0^h g(y) dy + \beta \int_0^h g''''(y) dy$ ,  $\gamma_0 = D \int_0^h g''''(y) dy + N \int_0^h g''(y) dy + \gamma \int_0^h g(y) dy$ . Таким образом, решение задачи (2.1)-(2.5) сведено к исследованию одномерной системы (2.11)-(2.14) для функций  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.15), а  $\xi(t) = w_0 \dot{\theta}(t)$ .

## 2.2. Двумерная осесимметричная модель

Приведем математическую постановку, соответствующую осесимметричной модели механической системы «трубопровод-датчик давления»

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left( \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (2.16)$$

$$\varphi_r(x, R, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.17)$$

$$\varphi_x(l, r, t) = \dot{w}(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (2.18)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, t) = P(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (2.19)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, t) - P_* = L(w(r, t)), \quad r \in (0, R). \quad (2.20)$$

Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор в уравнении (2.20), описывающем динамику упругого элемента, может быть задан по разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(r, t)) = m\ddot{w} + D \nabla^4 w + N \nabla^2 w + \beta \nabla^4 \dot{w} + f(\dot{w}, w), \quad (2.21)$$

где  $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$ ,  $\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}$ .

В (2.16)-(2.21)  $\varphi(x, r, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе;  $w(r, t)$  - деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(r, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ;  $R$  - радиус упругого элемента, представляющего собой круглую деформируемую пластину; индексы  $x, r, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, r$  и времени  $t$ , точка сверху - производную по  $t$ .

Уравнение (2.16) описывает движение идеального газа (жидкости) в трубопроводе; (2.17), (2.18) - условия непротекания стенки  $r = R$  трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.19) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.20) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, r, t)$ ,  $w(r, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для  $w(r, t)$  при  $r = R$ , соответствующие типу закрепления элемента (например,  $w(R, t) = w_r(R, t) = 0$  для жесткого защемления,  $w(R, t) = w_{rr}(R, t) = 0$  для шарнирного закрепления).

Для решения задачи (2.16)-(2.20) введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \int_0^R r\varphi(x, r, t)dr, & \xi(t) &= \int_0^R rw(r, t)dr, \\ G(t) &= \int_0^R rP(r, t)dr, & Q(w) &= \int_0^R rL(w(r, t))dr.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Тогда, проводя в (2.16)-(2.20) интегрирование по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ , с учетом граничного условия (2.17), получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2\Phi_{xx} = 0,\tag{2.23}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t),\tag{2.24}$$

$$-\rho_0\Phi_t(0, t) = G(t),\tag{2.25}$$

$$(P_0 - P_*)\frac{R^2}{2} - \rho_0\Phi_t(l, t) = Q(w).\tag{2.26}$$

Положим  $w(r, t) = g(r)\theta(t)$ ,  $w_0 = \int_0^R rg(r)dr$ , где функция  $g(r)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента (например, в случае жесткого защемления упругого элемента в точках его границы  $r = R$  можно задать  $g(r) = 1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3$ ). Тогда  $\xi(t) = w_0\theta(t)$ .

Пусть, например,  $L(w(r, t)) = m\ddot{w} + D\nabla^4 w + N\nabla^2 w + \beta\nabla^4 \dot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w$ . Тогда

$$Q(w) = m_0\ddot{\theta}(t) + \alpha_0\dot{\theta}(t) + \gamma_0\theta(t),\tag{2.27}$$

где  $m_0 = m \int_0^R rg(r)dr$ ,  $\alpha_0 = \alpha \int_0^R rg(r)dr + \beta \int_0^R r \nabla^4 g(r)dr$ ,  $\gamma_0 = D \int_0^R r \nabla^4 g(r)dr + N \int_0^R r \nabla^2 g(r)dr + \gamma \int_0^R rg(r)dr$ . Таким образом, для дальнейшего решения задачи (2.16)-(2.20) необходимо исследовать одномерную систему (2.23)-(2.26) для функций  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.27), а  $\xi(t) = w_0\dot{\theta}(t)$ .

### 2.3. Трехмерная модель в декартовой системе координат

Рассмотрим математическую постановку, соответствующую трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления», в которой сечение трубопровода  $D$  имеет прямоугольную форму

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b),\tag{2.28}$$

$$\varphi_y(x, 0, z, t) = \varphi_y(x, a, z, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad z \in (0, b),\tag{2.29}$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = \varphi_z(x, y, b, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a),\tag{2.30}$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b),\tag{2.31}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b),\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 L(w(y, z, t)) &\equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = \\
 &= P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \\
 \text{где } \Delta w &= w_{yy} + w_{zz}, \quad \Delta^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

В (2.28)-(2.33)  $\varphi(x, y, z, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе прямоугольной формы;  $w(y, z, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(y, z, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ; индексы  $x, y, z, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, y, z$  и времени  $t$ .

Уравнение (2.28) описывает движение идеального газа в трубопроводе с сечением прямоугольной формы; (2.29)-(2.30) - условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.32) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.33) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, y, z, t)$ ,  $w(y, z, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для  $w(y, z, t)$ .

Одним из способов решения задачи (2.28)-(2.33) является введение усредненных характеристик основных величин динамической системы

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, t) &= \iint_D \varphi(x, y, z, t) dS, \quad \xi(t) = \iint_D w(y, z, t) dS, \\
 G(t) &= \iint_D P(y, z, t) dS, \quad Q(w) = \iint_D L(w(y, z, t)) dS,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

где область интегрирования  $D = \{(y, z) : 0 \leq y \leq a; 0 \leq z \leq b\}$ ,  $dS = dydz$ . Тогда, проведя в (2.28)-(2.33) интегрирование по области  $D$ , получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \tag{2.35}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \tag{2.36}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \tag{2.37}$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w), \tag{2.38}$$

где  $S = ab$  - площадь сечения  $D$ . Положим  $w(y, z, t) = \theta(t)g(y, z)$ ,  $w_0 = \iint_D g(y, z) dS$ , где функция  $g(y, z)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда  $\xi(t) = w_0 \theta(t)$ .

Если, например,  $L(w(y, z, t)) = mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w$ , то

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \tag{2.39}$$

где  $m_0 = m \iint_D g(y, z) dS$ ,  $\alpha_0 = \alpha \iint_D g(y, z) dS + \beta \iint_D \Delta^2 g(y, z) dS$ ,  $\gamma_0 = D \iint_D \Delta^2 g(y, z) dS + N \iint_D \Delta g(y, z) dS + \gamma \iint_D g(y, z) dS$ . Таким образом, решение задачи (2.28)-(2.33) сведено к исследованию одномерной системы (2.35)-(2.38) для  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.39), а  $\dot{\xi}(t) = w_0 \dot{\theta}(t)$ .

## 2.4. Трехмерная модель в цилиндрической системе координат

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления» в цилиндрических координатах для трубопровода с поперечным сечением в виде сектора, имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left( \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.40)$$

$$\varphi_r(x, R, \theta, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.41)$$

$$\varphi_\theta(x, r, \theta_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (2.42)$$

$$\varphi_x(l, r, \theta, t) = w_t(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.43)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, \theta, t) = P(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.44)$$

$$L(w(r, \theta, t)) \equiv m w_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta (\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, \theta, t) - P_*, \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.45)$$

где  $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ ,  $\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ .

В (2.40)-(2.45)  $\varphi(x, r, \theta, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора, ограниченного плоскостями  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$ ;  $w(r, \theta, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(r, \theta, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ; индексы  $x, r, \theta, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, r, \theta$  и времени  $t$ .

Уравнение (2.40) описывает движение идеального газа в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора; (2.41)-(2.43) - условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.44) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.45) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, r, \theta, t)$ ,  $w(r, \theta, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для  $w(r, \theta, t)$ .

Для решения задачи (2.40)-(2.45) введем усредненные характеристики

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \iint_D \varphi(x, r, \theta, t) r dr d\theta, & \xi(t) &= \iint_D w(r, \theta, t) r dr d\theta, \\ G(t) &= \iint_D P(r, \theta, t) r dr d\theta, & Q(w) &= \iint_D L(w(r, \theta, t)) r dr d\theta, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где область интегрирования  $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ . Тогда, проводя в (2.40)-(2.45) интегрирование по области  $D$ , получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (2.47)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (2.48)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (2.49)$$

$$(P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w). \quad (2.50)$$

Положим  $w(r, \theta, t) = \psi(t)g(r, \theta)$ ,  $w_0 = \iint_D rg(r, \theta)drd\theta$ , где функция  $g(r, \theta)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда  $\xi(t) = w_0\psi(t)$ .

Пусть, например,  $L(w(r, \theta, t)) = mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w$ , тогда

$$Q(w) = m_0\ddot{\psi}(t) + \alpha_0\dot{\psi}(t) + \gamma_0\psi(t), \tag{2.51}$$

где  $m_0 = m \iint_D g(r, \theta)rdrd\theta$ ,  $\alpha_0 = \alpha \iint_D g(r, \theta)rdrd\theta + \beta \iint_D \Delta^2 g(r, \theta)rdrd\theta$ ,  $\gamma_0 = D \iint_D \Delta^2 g(r, \theta)rdrd\theta + N \iint_D \Delta g(r, \theta)rdrd\theta + \gamma \iint_D g(r, \theta)rdrd\theta$ . Таким образом, решение задачи (2.40)-(2.45) сведено в исследованию одномерной системы (2.47)-(2.50)  $\Phi(x, t)$ ,  $\psi(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.51), а  $\dot{\xi}(t) = w_0\dot{\psi}(t)$ .

### 2.5. Трехмерная модель для трубопровода с сечением произвольной формы

Приведем математическую постановку, соответствующую трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления» для трубопровода, сечение которого имеет форму  $D$ , ограниченную произвольным контуром  $L$  с уравнением  $G(y, z) = 0$ , например, состоящим из кривых  $y = f(z)$ ,  $y = g(z)$ ,  $z_1 \leq z \leq z_2$  :

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad (y, z) \in D, \tag{2.52}$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad (y, z) \in D, \tag{2.53}$$

$$\varphi_n = 0, \quad x \in (0, l), \quad (y, z) \in L, \tag{2.54}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad (y, z) \in D, \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} L(w(y, z, t)) &\equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) \\ &= P_0 - \rho_0\varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad (y, z) \in D. \end{aligned} \tag{2.56}$$

В (2.52)-(2.56)  $\varphi(x, y, z, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с сечением произвольной формы;  $w(y, z, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(y, z, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ; индексы  $x, y, z, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, y, z$  и времени  $t$ .

Уравнение (2.52) описывает движение идеального газа в трубопроводе с сечением произвольной формы; (2.53),(2.54) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.55) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.56) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, y, z, t)$ ,  $w(y, z, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для  $w(y, z, t)$ .

Введем усредненные характеристики

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \iint_D \varphi(x, y, z, t)dydz, \quad \xi(t) = \iint_D w(y, z, t)dydz, \\ G(t) &= \iint_D P(y, z, t)dydz, \quad Q(w) = \iint_D L(w(y, z, t))dydz. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Проинтегрируем (2.52)-(2.56) по области  $D$ , используя формулу Грина и граничное условие (2.54). Тогда получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (2.58)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (2.59)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (2.60)$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w), \quad (2.61)$$

где  $S = \int_{z_1}^{z_2} (f(z) - g(z))dz$  - площадь сечения  $D$ . Положим  $w(y, z, t) = \theta(t)v(y, z)$ ,  $w_0 = \iint_D v(y, z)dS$ , где функция  $v(y, z)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда  $\xi(t) = w_0\theta(t)$ .

Если, например,  $L(w(y, z, t)) = mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha \dot{w} + \gamma w$ , то

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \quad (2.62)$$

где  $m_0 = m \iint_D v(y, z)dydz$ ,  $\alpha_0 = \alpha \iint_D v(y, z)dydz + \beta \iint_D \Delta^2 v(y, z)dydz$ ,  $\gamma_0 = D \iint_D \Delta^2 v(y, z)dydz + N \iint_D \Delta v(y, z)dydz + \gamma \iint_D v(y, z)dydz$ . Таким образом, решение задачи (2.52)-(2.56) сведено в исследованию одномерной системы (2.58)-(2.61) для  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.62), а  $\dot{\xi}(t) = w_0 \dot{\theta}(t)$ .

### 3. Исследование одномерной модели механической системы «трубопровод-датчик давления»

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей одномерной модели механической системы «трубопровод – датчик давления», к исследованию которой сводятся все рассмотренные выше задачи, имеет вид

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \varphi_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, t) = P(t), \quad (3.2)$$

$$\varphi_x(l, t) = \dot{w}(t), \quad (3.3)$$

$$L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + \alpha \dot{w} + \gamma w = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, t) - P_*. \quad (3.4)$$

Рассмотрим некоторые способы исследования одномерной задачи (3.1)-(3.4).

#### 3.1. Метод Галеркина

а) Потенциал скорости  $\varphi(x, t)$  представим в виде отрезка ряда по полной на отрезке  $[0, l]$  системе функций  $g_m(x) = \sin \lambda_m x$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям  $g_m(0) = 0$ ,  $g_m(l) = 0$ , соответствующим условиям (3.2), (3.4)

$$\varphi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{l}. \quad (3.5)$$

Удовлетворяя условиям (3.2), (3.4), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad \dot{b} = -\frac{1}{\rho_0 l} (P_* - P_0 + L(w(t)) - P(t)). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5),(3.6) в (3.1),(3.3), получим

$$\sum_{m=1}^M \left[ \ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \lambda_m^2 \psi_m(t) \right] \sin \lambda_m x = \frac{1}{\rho} \dot{P}(t) + \frac{x}{\rho_0 l} (\dot{L}(w(t)) - \dot{P}(t)), \quad (3.7)$$

$$P_* - P_0 + L(w(t)) - P(t) - \rho_0 l \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \lambda_m \cos \lambda_m l + \rho_0 l \ddot{w}(t) = 0. \quad (3.8)$$

Согласно методу Галеркина, выполняя условие ортогональности невязки уравнения (3.7) к базисным функциям  $\{\sin \lambda_k x\}_{k=1, \overline{M}}$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \lambda_k^2 \psi_k(t) &= \frac{2}{l \rho_0} \dot{P}(t) \int_0^l \sin \lambda_k x dx + \\ &+ \frac{2}{\rho_0 l^2} (\dot{L}(w(t)) - \dot{P}(t)) \int_0^l x \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1 \div M. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Продифференцируем уравнение (3.8):

$$\dot{L}(w(t)) - \dot{P}(t) - \rho_0 l \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \lambda_m \cos \lambda_m l + \rho_0 l \ddot{w}(t) = 0. \quad (3.10)$$

Дополняя начальными условиями систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.9),(3.10) для функций  $w(t), \psi_k(t), k = 1 \div M$ , получим задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

б) Представим потенциал скорости  $\varphi(x, t)$  в виде отрезка ряда по полной на отрезке  $[0, l]$  системе функций  $g_m(x) = \sin \nu_m x$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям  $g_m(0) = 0, g'_m(l) = 0$ , соответствующим условиям (3.2),(3.3)

$$\varphi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \nu_m x, \quad \nu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2l}. \quad (3.11)$$

Удовлетворяя условиям (3.2),(3.3), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad b = \dot{w}(t). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.11),(3.12) в (3.1),(3.4), получим

$$\sum_{m=1}^M \left[ \ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \nu_m^2 \psi_m(t) \right] \sin \nu_m x = \frac{1}{\rho} \dot{P}(t) - \ddot{w}(t)x, \quad (3.13)$$

$$P(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l = P_* - P_0 + L(w(t)). \quad (3.14)$$

Выполняя условие ортогональности невязки уравнения (3.13) к базисным функциям  $\{\sin \nu_k x\}_{k=1, \overline{M}}$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \nu_k^2 \psi_k(t) = \frac{2}{l \rho_0 \nu_k} \dot{P}(t) - 2\ddot{w}(t) \frac{\sin(\nu_k l)}{l \nu_k^2}, k = 1 \div M. \quad (3.15)$$

Дифференцируя уравнение (3.14), получим

$$\dot{P}(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l = m \ddot{w}(t) + \alpha \ddot{w}(t) + \gamma_1 \dot{w}(t). \quad (3.16)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.15), (3.16) для функций  $w(t), \psi_k(t), k = 1 \div M$ , дополненная начальными условиями, представляет собой задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

### 3.2. Метод конечных разностей

Дополним задачу (3.1)-(3.4) начальными условиями:

$$w(0) = S, \quad \dot{w}(0) = Q, \quad (3.17)$$

$$\varphi(x, 0) = \psi_1(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \psi_2(x). \quad (3.18)$$

Проведем численное исследование задачи (3.1)-(3.4), (3.17), (3.18) методом конечных разностей. Разобьем отрезок  $[0, l]$  на  $N$  частей точками  $x_n = h_x n, n = 0, 1, \dots, N$ , где  $h_x = l/N$ , отрезок  $[0, T]$  - на  $K$  частей точками  $t_k = h_t k, k = 0, 1, \dots, K$ , где  $h_t = T/K$ .

Введем обозначения  $\varphi(x_n, t_k) = \varphi_n^k, w(t_k) = w^k$ .

Явная конечно-разностная аппроксимация уравнений и условий (3.1) - (3.4), (3.17), (3.18) имеет вид

$$\frac{\varphi_n^{k+1} - 2\varphi_n^k + \varphi_n^{k-1}}{h_t^2} - a_0^2 \frac{\varphi_{n+1}^k - 2\varphi_n^k + \varphi_{n-1}^k}{h_x^2} = 0, \quad (3.19)$$

$$-\frac{\rho_0}{h_t} (\varphi_0^{k+1} - \varphi_0^k) = P(t_k), \quad (3.20)$$

$$\frac{\varphi_N^{k+1} - \varphi_N^{k-1}}{h_x} = \frac{w^{k+1} - w^k}{h_t}, \quad (3.21)$$

$$\frac{m(w^{k+1} - 2w^k + w^{k-1}))}{h_t^2} + \frac{\alpha(w^k - w^{k-1})}{h_t} + \gamma w^k = P_0 - P_* - \frac{\rho_0(\varphi_N^k - \varphi_N^{k-1})}{h_t}, \quad (3.22)$$

$$w^0 = S, \quad w^1 = w^0 + h_t Q, \quad (3.23)$$

$$\varphi_n^0 = \psi_1(x_n), \quad \varphi_n^1 = \psi_1(x_n) + h_t \psi_2(x_n). \quad (3.24)$$

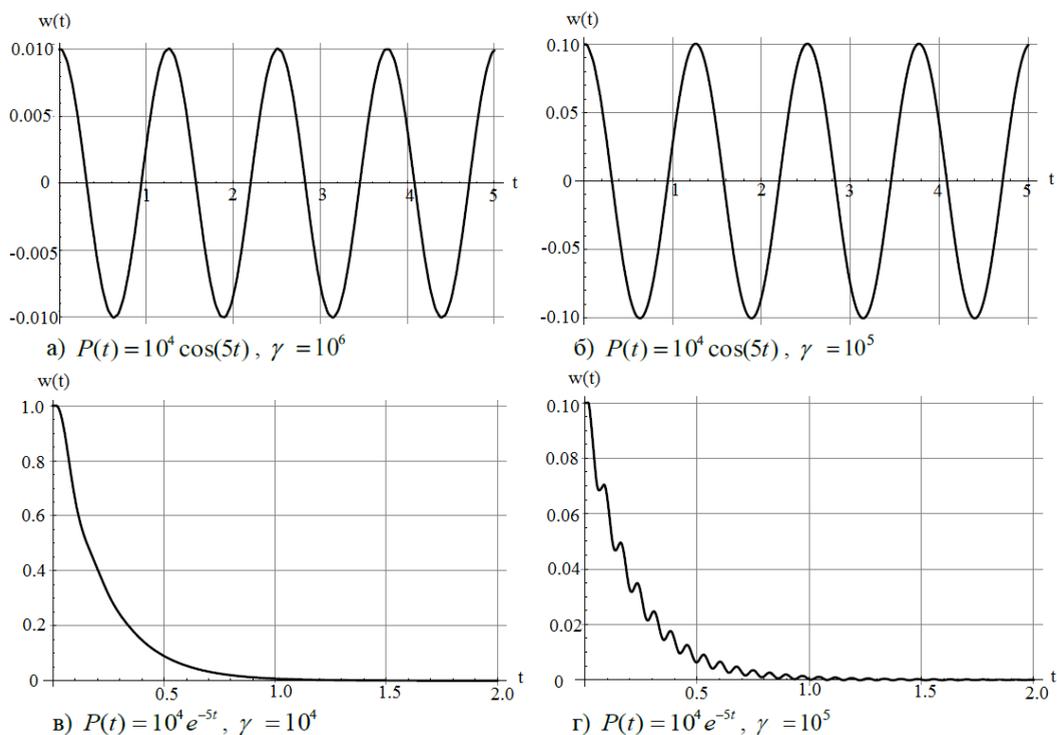
Разностная схема (3.19)-(3.24) является условно устойчивой. Исследование устойчивости проводилось с использованием спектрального признака Неймана с привлечением критерия Бабенко-Гельфанда [19].

### 3.3. Численный эксперимент

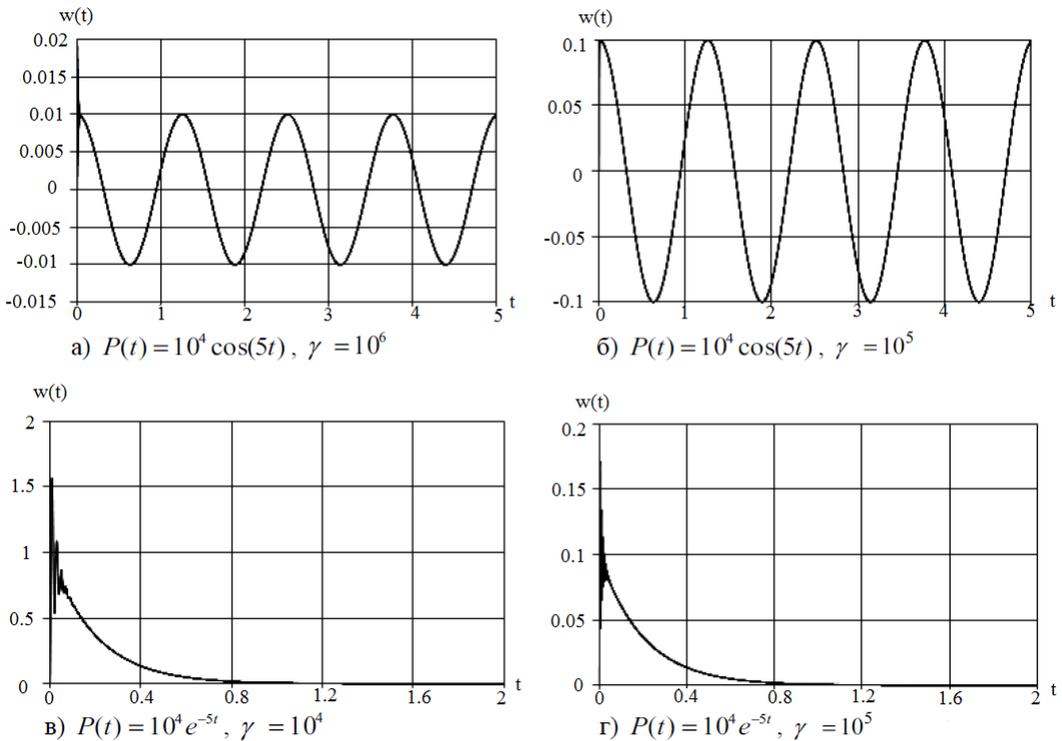
Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – воздух ( $\rho_0 = 1$ ). Параметры системы:  $P_0 = P_* = 10^5$ ,  $a_0 = 331$ ,  $l = 5$ ,  $m = 0,1$ ,  $\alpha = 200$  (все значения приведены в системе СИ).

С помощью системы Mathematica численно получены решения системы (3.9),(3.10) и системы (3.15),(3.16). Начальные условия заданы в виде:  $\psi_k(0) = \dot{\psi}_k(0) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ ,  $w(0) = \frac{P(0)}{\gamma_1}$ ,  $\dot{w}(0) = \dot{w}(0) = 0$ . Ввиду того, что численные расчеты на основе системы (3.9),(3.10) полностью совпадают с расчетами для системы (3.15),(3.16), в качестве примера на рисунке 1 представлены примеры расчетов для первой системы.

Для решения на основе разностной схемы (3.19)-(3.24) разработана программа на C++, позволяющая получать графики функции  $w(t)$  при различном задании закона изменения давления  $P(t)$ . При численном эксперименте было введено разбиение  $n = 200$ ,  $K = 100000$ , начальные данные заданы в виде:  $w(0) = \dot{w}(0) = 0$ ,  $\psi_1(x) = 0$ ,  $\psi_2(x) = 0$ . На рисунке 2 представлены примеры расчетов при различном задании функции  $P(t)$  и параметра  $\gamma$ .



**Рис. 3.1.** Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод Галеркина  $M = 10$ ).



**Рис. 3.2.** Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод конечных разностей).

Из рисунков 3.1, 3.2 видно, что решение задачи (3.1)-(3.4), (3.17), (3.18), полученное по методу конечных разностей (Рис. 3.2), достаточно точно согласуется с решением, построенным с помощью метода Галеркина (Рис. 3.1). Следует отметить значительное влияние параметра  $\gamma$  на амплитуду колебаний подвижного элемента.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты №18-41-730015, №19-41-730006).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белозубов Е.М., Васильев В.А., Запевалин А.И., Чернов П.С. Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // Измерительная техника. 2011. № 1. С. 17-19.
2. Эткин Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.
3. Аш Ж. и соавторы Датчики измерительных систем: В 2-х книгах. Кн.1. Пер. с франц. М.: Мир, 1992. 480 с.
4. Аш Ж. и соавторы Датчики измерительных систем: В 2-х книгах. Кн.2. Пер. с франц. М.: Мир, 1992. 424 с.

5. Агейкин Д.И., Костина Е.Н., Кузнецова Н.Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Н. Машиностроение, 1965. 928 с.
6. Корсунов В.П. Упругие чувствительные элементы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 264 с.
7. Пирогов С.П. Манометрические трубчатые пружины. С.Петербург: Недра, 2009. 276 с.
8. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. 2-е издание. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
9. Мокров Е.А., Лебедев Д.В., Базаев В.П., Ефремов Е.В., Семина И.А., Колчин П.А. О конструктивно-технологическом совершенствовании тензорезисторных тонкопленочных датчиков давлений // Датчики и системы. 2008. № 6. С.2-7.
10. Белозубов Е.М., Мокров Е.А., Тихомиров Д.В. Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // Датчики и системы. 2004. №1. С.26-29.
11. Вельмисов П.А., Горбоконеко В.Д. Об одной математической модели системы «трубопровод – датчик давления» // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Одиннадцатой межвузовской конференции. Самара: СамГТУ, 2001. Ч. 2. С. 15-17.
12. Velmisov P.A., Garnefska L.V., Gorbokonenko V.D. An investigation of mathematical models “pipeline-pressure sensor” // Applications of Mathematics in Engineering and Economics: Proceedings of the XXVII Summer School. – Heron Press.Sofia, Bolgaria, 2002. – P. 542-548.
13. Вельмисов П. А., Горбоконеко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы "трубопровод – датчик давления" // Датчики и системы. 2003. № 6(49). С. 12–15.
14. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы "трубопровод - датчик давления" // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, №4. С.85–93.
15. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series, 2019. Vol. 1353, 012085, P. 1-6; doi: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085.
16. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V., Mizher U.J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings 2172, 030006 (2019); doi: 10.1063/1.5133495.
17. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконеко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления". Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188с.
18. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем // Ульяновск: УлГТУ. 2018. 152 с.
19. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». М., 1977. 440 с.

20. Калиткин Н.Н. Численные методы. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». М., 1978. 512 с.

Поступила 1.06.2020

MSC2020 35Q35, 35Q74, 65M06

## Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media

© P. A. Velmisov<sup>1</sup>, Yu. A. Tamarova<sup>2</sup>

**Abstract.** The article discusses the initial-boundary value problems for systems of differential equations, which are mathematical models of the mechanical system "pipeline - pressure sensor that is designed to measure pressure in gas-liquid media. On the basis of the proposed models, the joint dynamics of the pressure sensor sensitive element and of the working medium in the pipeline connecting the sensor to the combustion chamber of the engine is investigated. To describe the movement of the working medium, linear models of the mechanics of liquid and gas are used; to describe the dynamics of the sensitive element, both linear and nonlinear models of the mechanics of a solid deformable body are used. The solutions of stated initial-boundary value problems are carried out on the basis of the Galerkin method and the finite-difference method.

**Key Words:** differential equations, aeroelasticity, pipeline, pressure sensor, elastic element, dynamics, finite difference method, Galerkin method

### REFERENCES

1. E. M. Belozubov, V. A. Vasil'ev, A. I. Zapevalin, P. S. Chernov, "[Designing the elastic elements of nano- and microelectromechanical systems]", *Measuring technique*, 1 (2011), 17–19 (In Russ.).
2. L. G. Etkin, [*Vibration sensors. Theory and practice*], Publishing House of Moscow State Technical University. N.E.Bauman, M., 2004 (In Russ.), 408 p.
3. J. Ash et al, [*Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 1. Translation from fr.*], Mir, M., 1992 (In Russ.), 480 p.
4. J. Ash et al, [*Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 2. Translation from fr.*], Mir, M., 1992 (In Russ.), 424 p.
5. D. I. Agejkin, E. N. Kostina, N. N. Kuznecova, [*Sensors of control and regulation*], N. Mechanical Engineering, M., 1965 (In Russ.), 928 p.
6. V. P. Korsunov, [*Elastic sensitive elements*], Publishing house of the Saratov University, Saratov, 1980 (In Russ.), 264 p.

<sup>1</sup>**Velmisov Petr Aleksandrovich**, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Professor, Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

<sup>2</sup>**Tamarova Yuliya Aleksandrovna**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, [kazakovau@mail.ru](mailto:kazakovau@mail.ru)

7. S. P. Pirogov, [*Manometric tubular springs*], Nedra, S.Petersburg, 2009 (In Russ.), 276 p.
8. L. E. Andreeva, [*Elastic elements of devices. 2nd edition* ], Engineering, M., 1981 (In Russ.), 392 p.
9. E. A. Mokrov, D. V. Lebedev, V. P. Bazaev, E. V. Efremov, I. A. Semina, P. A. Kolchin, “[On the design and technological improvement of strain gauge thin-film pressure sensors]”, *Sensors and systems*, **6** (2008), 2–7 (In Russ.).
10. E. M. Belozubov, E. A. Mokrov, D. V. Tihomirov, “[Minimizing the error of thin-film strain gauge pressure sensors when exposed to non-stationary temperature]”, *Sensors and Systems*, **1** (2004), 26–29 (In Russ.).
11. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, “[About one mathematical model of the “pipeline – pressure sensor” system]”, *Mathematical modeling and boundary value problems: proceedings of the Eleventh Interuniversity Conference, Part2*, 2001, 15–17 (In Russ.).
12. P. A. Velmisov, L. V. Garnefska, V. D. Gorbokonenko, “An investigation of mathematical models “pipeline-pressure sensor””, *Applications of Mathematics in Engineering and Economics: Proceedings of the XXVII Summer School*, 2002, 542–548.
13. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. A. Reshetnikov, “[Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor]”, *Sensors and systems*, **6(49)** (2003), 12–15 (In Russ.).
14. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, E. S. Serebryannikova, “[Mathematical modeling of the system “pipeline - pressure sensor]”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **12:4** (2010), 85–93 (In Russ.).
15. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353** (2019), 1–6.
16. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, U. J. Mizher, “Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor””, *AIP Conference Proceedings*, **2172** (2019), 030006.
17. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. V. Pokladova, [*Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”*], UIGTU, Ulyanovsk, 2008 (In Russ.), 188 p.
18. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, [*Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems*], UIGTU, Ulyanovsk, 2018 (In Russ.), 152 p.
19. S. K. Godunov, V. S. Ryabenkij, [*Difference schemes (introduction to theory)*], The main edition of the physical and mathematical literature of the Nauka publishing house, M., 1977 (In Russ.), 440 p.
20. N. N. Kalitkin, [*Numerical methods*], The main edition of the physical and mathematical literature of the Nauka publishing house, M., 1978 (In Russ.), 512 p.

*Submitted 1.06.2020*