

УДК 517.9

Применение метода граничных интегральных уравнений к численному решению эллиптических краевых задач в \mathbb{R}^3

© А. Н. Тынды¹, К. А. Тимошенко²

Аннотация. В работе предлагаются численные методы решения внешних и внутренних краевых задач для уравнений Гельмгольца и Лапласа в сложных пространственных областях, основанные на их сведении к граничным интегральным уравнениям в \mathbb{R}^2 . С помощью потенциалов простого и двойного слоя получены граничные интегральные уравнения типа Фредгольма относительно неизвестной плотности для краевых задач Дирихле и Неймана. В результате применения интегральных уравнений по границе области размерность задач снижается на единицу. Для аппроксимации решений получаемых слабосингулярных уравнений Фредгольма разработан общий численный метод, основанный на сплайн-аппроксимации решений и применении адаптивных кубатур, учитывающих особенности ядер. При построении кубатурных формул построены существенно неравномерные сетки с показателем неравномерности, зависящим от гладкости входных данных. Эффективность метода подтверждается приведенными результатами решения ряда тестовых задач.

Ключевые слова: эллиптические краевые задачи, слабосингулярные интегральные уравнения Фредгольма, метод сплайн-коллокации, неравномерные сетки, аппроксимация интегралов

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца в трехмерных областях. Такого рода задачи часто возникают в математической физике. Например, известно, что моделирование распространения гармонических волн приводит к однородному уравнению Гельмгольца.

Уравнения Лапласа, Гельмгольца и Пуассона относятся к классу эллиптических задач, для решения которых разработан метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), позволяющий свести трехмерные краевые задачи к интегральным уравнениям.

Для однородного уравнения Гельмгольца такой подход исследовался разными авторами (см., например, [1] и [2]). Основная идея метода заключается в представлении решения краевой задачи в виде так называемых поверхностных потенциалов. Такое представление позволяет переформулировать краевую задачу в виде ГИУ, заданного на замкнутой поверхности, которая является границей области, в которой требуется найти решение. Это особенно актуально при решении внешних граничных задач, когда решение требуется найти в неограниченной области, т.к. метод позволяет перейти к уравнениям по конечной границе.

¹Тында Александр Николаевич, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

²Тимошенко Константин Александрович, магистрант кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6082-6558>, timoshenkov.ka@yandex.ru

В практически задачах граничные уравнения, получаемые с помощью метода потенциалов, не разрешимы аналитически. Вопрос построения численных методов решения ГИУ представляет особую сложность, поскольку граничные уравнения являются сингулярными (т.е. их ядра содержат особенности). Различные численные алгоритмы решения ГИУ для уравнений Лапласа и Гельмгольца рассматривались в работах [4], [5].

В рамках данной работы мы будем рассматривать только ГИУ, которые относятся к классу слабосингулярных. Далее будет показано, что краевые задачи Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений можно свести к слабосингулярным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Для решения уравнений данного класса в работе предлагается численный метод, основанный на применении сплайн-коллокационной техники на специальных адаптивных сетках, учитывающих сингулярности.

2. Постановки краевых задач для эллиптических уравнений в \mathbb{R}^3

В рамках настоящей работы нас прежде всего будет интересовать однородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.1)$$

где $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ — неизвестная функция Δu — оператор Лапласа, $k \in \mathbb{C}$ — волновое число, такое, что $\operatorname{Im} k \geq 0$. Если положить $k = 0$, то уравнение (2.1) перейдет в уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (2.2)$$

Решение уравнений (2.1)-(2.2) требуется найти в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$, если на границе этой области Γ задано одно из следующих краевых условий

1. Условие Дирихле: на границе известно значение функции u

$$u|_{\Gamma} = f(x). \quad (2.3)$$

2. Условие Неймана: на границе известна нормальная производная от u

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = g(x), \quad (2.4)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ — единичная внешняя нормаль к Γ .

В дальнейшем будем считать, что область G — открытая и ограниченная и через \bar{G} обозначим её замыкание. Граница Γ представляет собой замкнутую поверхность, которую будем считать достаточно гладкой. А именно, потребуем, чтобы для Γ выполнялось условие Ляпунова: в каждой точке $x \in \Gamma$ существует непрерывная по Гёльдеру нормаль $\mathbf{n}(x)$, т.е. для любых двух точек x, y , лежащих на Γ выполняется соотношение

$$|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)| \leq M_1 |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \Gamma, \quad (2.5)$$

где $M_1 > 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Как отмечалось в [1], любая замкнутая и ограниченная поверхность, входящая в класс C^2 (класс дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей), удовлетворяет условию (2.5) с показателем $\alpha = 1$. Поэтому дальше для простоты изложения будем полагать, что $\Gamma \in C^2$.

В случаях, когда решение уравнения (2.1) требуется отыскать в неограниченной области $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$ на функцию u требуется дополнительно накладывать условия Зоммерфельда

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{|x|}, \nabla u(x)\right) - iku(x) &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty; \\ \left(\frac{x}{|x|}, \nabla u(x)\right) + iku(x) &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условия (2.6) необходимы для обеспечения единственности решения краевых задач.

Для уравнения (2.1) будем рассматривать следующие краевые задачи

1. Внутренняя задача Дирихле (\mathbf{D}_1). Найти функцию $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в G и граничному условию (2.3).
2. Внутренняя задача Неймана (\mathbf{N}_1). Найти функцию $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ (для которой существует нормальная производная), удовлетворяющую уравнению (2.1) в G и граничному условию (2.4).
3. Внешняя задача Дирихле (\mathbf{D}_2). Найти функцию $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus G)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$, условиям Зоммерфельда (2.6) на бесконечности и граничному условию (2.3).
4. Внешняя задача Неймана (\mathbf{N}_2). Найти функцию $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus G)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$, условиям Зоммерфельда (2.6) на бесконечности и граничному условию (2.4).

Данные краевые задачи можно переформулировать в виде эквивалентных граничных интегральных уравнений (ГИУ). Для краевых задач эллиптического типа ГИУ можно вывести через теорию потенциала. Такой способ подробно описан в книге [2], следуя которой, ниже приведем ГИУ для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

Решение уравнений (2.1)-(2.2) можно представить в виде поверхностных потенциалов вида

$$v(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \eta(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (2.7)$$

$$w(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (2.8)$$

где $\Phi(x, y)$ — фундаментальное решение. Функция $v(x)$ называется потенциалом простого слоя с плотностью η ; функция $w(x)$ есть потенциал двойного слоя с плотностью ψ . Для уравнения Гельмгольца фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad (2.9)$$

а для уравнения Лапласа (полагая $k = 0$) получим фундаментальное решение

$$\Phi_0(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}. \quad (2.10)$$

2.1. Уравнение Лапласа

Решение задач \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 для уравнения (2.2) можно представить в виде потенциала двойного слоя (2.8) с фундаментальным решением Φ_0 и неизвестной плотностью $\psi(x)$. Для внутренней задачи \mathbf{D}_1 плотность $\psi(x)$ определяется как решение интегрального уравнения

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} K_y^0(x, y) \psi(y) ds(y) = -2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.11)$$

В случае внешней задачи \mathbf{D}_2 плотность определим из уравнения

$$\psi(x) + 2 \int_{\Gamma} K_y^0(x, y) \psi(y) ds(y) = 2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.12)$$

где ядро $K_y^0(x, y)$ имеет вид

$$K_y^0(x, y) = \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = \nabla \Phi_0 \cdot \mathbf{n}(y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - y_i) \mathbf{n}_i(y)}{|x - y|^3} = \frac{(x - y, \mathbf{n}(y))}{4\pi |x - y|^3}. \quad (2.13)$$

Решение задач \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 представим в виде потенциала простого слоя (2.7) с неизвестной плотностью $\eta(x)$. При решении задачи \mathbf{N}_1 уравнение для плотности $\eta(x)$ имеет вид

$$\eta(x) + 2 \int_{\Gamma} K_x^0(x, y) \eta(y) ds(y) = 2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.14)$$

Для внешней задачи \mathbf{N}_2 уравнение для плотности имеет вид

$$\eta(x) - 2 \int_{\Gamma} K_x^0(x, y) \eta(y) ds(y) = -2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.15)$$

Ядро $K_x^0(x, y)$ в уравнениях (2.14)-(2.15) имеет вид

$$K_x^0(x, y) = \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \nabla \Phi_0 \cdot \mathbf{n}(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{(y_i - x_i) \mathbf{n}_i(x)}{|x - y|^3} = \frac{(y - x, \mathbf{n}(x))}{4\pi |x - y|^3}. \quad (2.16)$$

2.2. Уравнение Гельмгольца

Краевые задач \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 для уравнения Гельмгольца (2.1) будем искать в виде потенциала (2.8). Для внутренней задачи \mathbf{D}_1 плотность определим из ГИУ

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} K_y(x, y) \psi(y) ds(y) = -2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.17)$$

В случае внешней задачи \mathbf{D}_2 имеем уравнение

$$\psi(x) + 2 \int_{\Gamma} K_y(x, y) \psi(y) ds(y) = 2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.18)$$

Ядро граничных уравнений (2.17)-(2.18) можно записать в виде

$$K_y(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}(y) = \frac{e^{ik|x-y|}(ik|x-y| - 1)}{4\pi|x-y|^3}(y-x, \mathbf{n}(y)). \quad (2.19)$$

Решение задач \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 представим в виде потенциала (2.7). Для внутренней задачи \mathbf{N}_1 получим ГИУ

$$\eta(x) + 2 \int_{\Gamma} K_x(x, y)\eta(y)ds(y) = 2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.20)$$

Для внешней задачи \mathbf{N}_2 ГИУ имеет вид

$$\eta(x) - 2 \int_{\Gamma} K_x(x, y)\eta(y)ds(y) = -2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.21)$$

Ядро $K_x(x, y)$ имеет вид

$$K_x(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}(x) = \frac{e^{ik|x-y|}(ik|x-y| - 1)}{4\pi|x-y|^3}(x-y, \mathbf{n}(y)). \quad (2.22)$$

3. Решение слабосингулярного интегрального уравнения Фредгольма

Полученные ранее граничные уравнения представляют собой интегральные уравнения Фредгольма второго рода с ядрами, имеющими особенность при $x = y$. В книге [2] показано, что при выполнении условия (2.5) для поверхности Γ для ядер $K_x^0(x, y)$, $K_y^0(x, y)$, $K_x(x, y)$, $K_y(x, y)$ верна оценка

$$|K(x, y)| \leq \frac{M_2}{|x-y|^{2-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Это означает, что указанные ядра содержат слабую особенность, а соответствующие им интегральные уравнения относятся к классу слабосингулярных.

Таким образом, абстрагируясь от конкретного вида ГИУ, теперь можно рассматривать интегральное уравнение со слабосингулярным ядром $K(x, y)$:

$$\psi(x) - \int_{\Gamma} K(x, y)\psi(y)ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (3.1)$$

Для того, чтобы конкретизировать уравнение (3.1), поверхность Γ будем задавать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1(\varphi_1, \varphi_2) \\ x_2 = \alpha_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad \varphi_1 \in [a_1, a_2], \varphi_2 \in [b_1, b_2] \\ x_3 = \alpha_3(\varphi_1, \varphi_2) \end{cases} \quad (3.2)$$

Учитывая представление (3.2), можно записать касательные векторы к поверхности в точке с параметрическими координатами (φ, θ)

$$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi_1} = \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi_1} \right\}, \quad x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \varphi_2} = \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_2}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi_2}, \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi_2} \right\}.$$

Единичную нормаль к Γ в точке x можно определить с помощью векторного произведения векторов x_{φ_1} и x_{φ_2} :

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{n}(\varphi, \theta) = \frac{[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}]}{\|[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}]\|} = \frac{1}{\sqrt{g}}[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}] \quad (3.3)$$

где $g = \|[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}]\|^2$. Элемент поверхности $ds(x)$ в точке определится по формуле:

$$ds(x) = ds(\varphi_1, \varphi_2) = \|[x_{\varphi_1}d\varphi_1, x_{\varphi_2}d\varphi_2]\| = \sqrt{g}d\varphi_1d\varphi_2. \quad (3.4)$$

Используя формулы (3.3) и (3.4), от поверхностного интеграла в (3.1) удобно перейти к двойному интегралу по прямоугольной области $D : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$.

$$\psi(x(\varphi_1, \varphi_2)) - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} K(x(\varphi_1, \varphi_2), y(\theta_1, \theta_2))\psi(y(\theta_1, \theta_2))d\theta_1d\theta_2 = f(x(\varphi_1, \varphi_2)) \quad (3.5)$$

С целью сокращения записи, уравнение (3.5) перепишем в виде

$$\gamma(\varphi_1, \varphi_2) - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} H(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2)\gamma(\theta_1, \theta_2)d\theta_1d\theta_2 = \beta(\varphi_1, \varphi_2), \quad (3.6)$$

где введены следующие обозначения: $\gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \psi(x(\varphi_1, \varphi_2))$, $H(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) = K(x(\varphi_1, \varphi_2), y(\theta_1, \theta_2))$, $\beta(\varphi_1, \varphi_2) = f(x(\varphi_1, \varphi_2))$.

Построим численный метод для решения слабосингулярного уравнения (3.6) на основе сплайн-коллокации. Неизвестное решение $\gamma(\varphi_1, \varphi_2)$ аппроксимируем с помощью сплайна $T(\varphi_1, \varphi_2)$. Для этого область D разобьем на $N_1 \times N_2$ подобластей Δ_{ij}

$$\Delta_{ij} = \{d_1^i \leq \varphi_1 \leq d_1^{i+1}; d_2^j \leq \varphi_2 \leq d_2^{j+1}\}$$

$$d_1^i = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1}i, \quad i = \overline{0, N_1}$$

$$d_2^j = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2}j, \quad j = \overline{0, N_2}$$

В каждой из областей Δ_{ij} аппроксимируем функцию $\gamma(\varphi_1, \varphi_2)$ интерполяционным полиномом Лагранжа $L_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$, который построим по узлам $\varphi_{ij}^{kp} \in \Delta_{ij}$, $k, p = \overline{1, R}$. В качестве узлов будем использовать систему из $R \times R$ узлов Гаусса-Лежандра ξ^k , $k = \overline{1, R}$, которые мы спроецируем в каждую из областей Δ_{ij} , тогда сетка узлов определится следующим образом:

$$\varphi_{ij}^{kp} = (\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \left\{ \frac{d_1^i - d_1^{i-1}}{2}\xi^k + \frac{d_1^i + d_1^{i-1}}{2}; \frac{d_2^j - d_2^{j-1}}{2}\xi^p + \frac{d_2^j + d_2^{j-1}}{2} \right\} \quad (3.7)$$

$$i = \overline{1, N_1}; j = \overline{1, N_2}; k, p = \overline{1, R}$$

Полином Лагранжа, аппроксимирующий решение в области Δ_{ij} записывается в виде

$$L_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k=1}^R \sum_{p=1}^R \gamma_{ij}^{kp} \Psi_k^1(\varphi_1) \Psi_p^2(\varphi_2) \quad (3.8)$$

где $\gamma_{ij}^{kp} = \gamma(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$ — неизвестные коэффициенты полинома; Ψ_k^1 — фундаментальный полином, построенный по узлам φ_{ik}^1 ; Ψ_p^2 — фундаментальный полином, построенный по узлам φ_{jp}^2 :

$$\Psi_k^1(x_1) = \prod_{l=1, l \neq k}^R \frac{\varphi_1 - \varphi_{il}^1}{\varphi_{ik}^1 - \varphi_{il}^1}; \quad \Psi_p^2(x_2) = \prod_{l=1, l \neq k}^R \frac{\varphi_2 - \varphi_{jl}^2}{\varphi_{jp}^2 - \varphi_{jl}^2}$$

В исходное уравнение (3.6) вместо функции $\gamma(\varphi_1, \varphi_2)$ подставим сплайн $T(\varphi_1, \varphi_2)$ и приравняем левую и правую часть уравнения в узлах $(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$, получим

$$T(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} H(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2, \theta_1, \theta_2) T(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \beta(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2).$$

Интеграл представим в виде суммы интегралов по областям Δ_{ij} и, учитывая что $T(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = L_{ij}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \gamma_{ij}^{kp}$, перепишем предыдущее соотношение в виде:

$$\gamma_{ij}^{kp} - \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{s=1}^{N_2} \int_{d_1^{q-1}}^{d_1^q} \int_{d_2^{s-1}}^{d_2^s} H(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2, \theta_1, \theta_2) L_{qs}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \beta_{ij}^{kp}, \quad (3.9)$$

где $\beta_{ij}^{kp} = \beta(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$. Подставим выражение для интерполяционного полинома (3.8) в (3.9) и, меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\gamma_{ij}^{kp} - \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{s=1}^{N_2} \sum_{t=1}^R \sum_{u=1}^R \gamma_{qs}^{tu}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \beta_{ij}^{kp}; \quad k, p = \overline{1, R}, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2} \quad (3.10)$$

где коэффициенты $I_{qs}^{tu}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$ выпишем отдельно

$$I_{qs}^{tu}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \int_{d_1^{q-1}}^{d_1^q} \int_{d_2^{s-1}}^{d_2^s} H(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2, \theta_1, \theta_2) \Psi_t^1(\theta_1) \Psi_u^2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.11)$$

Выражение (3.10) представляет собой систему линейных уравнений размера $N_1 N_2 R^2$ относительно неизвестных коэффициентов γ_{ij}^{kp} .

Интеграл (3.11) является сингулярным, если $q = i$ и $s = j$; в этом случае для его аппроксимации используем специальную кубатурную формулу. Если $q \neq i$ или $s \neq j$, то интеграл (3.11) не содержит особенностей и его можно аппроксимировать с помощью стандартной кубатурной формулы Гаусса.

3.1. Аппроксимация слабосингулярных интегралов

При построении численного метода для решения ГИУ возникает необходимость вычисления слабосингулярных интегралов вида

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \quad (3.12)$$

заданных в некоторой прямоугольной области $B = \{a_1 \leq \theta_1 \leq a_2; b_1 \leq \theta_2 \leq b_2\}$, и имеющие особенность при $(\varphi_1 = \theta_1, \varphi_2 = \theta_2)$. Построим кубатурную формулу, аппроксимирующую интегралы вида (3.12).

Для учета особенности построим специальную неравномерную сетку, сгущающуюся к точке (φ_1, φ_2) . Рассмотрим две сетки узлов вида:

$$s_k^1 = \varphi_1 - (\varphi_1 - a_1) \left(\frac{k}{M_1} \right)^v; \quad k = \overline{1, M_1}$$

$$s_k^2 = \varphi_1 + (a_2 - \varphi_1) \left(\frac{k}{M_2} \right)^v; \quad k = \overline{1, M_2}$$

Узлы s_k^1 сгущаются к точке φ_1 слева, а узлы s_k^2 сгущаются к φ_1 справа. Соединив узлы s_k^1 и s_k^2 , получим систему из $M_1 + M_2$ узлов для переменной θ_1 :

$$\theta_1^k = \begin{cases} s_k^1; & k = \overline{1, M_1} \\ s_{k-M_1}^2; & k = \overline{M_1 + 1, M_1 + M_2}. \end{cases}$$

Для переменной θ_2 строим аналогичную систему узлов:

$$\theta_2^l = \begin{cases} s_l^3; & l = \overline{1, M_1} \\ s_{l-M_1}^4; & l = \overline{M_1 + 1, M_1 + M_2}, \end{cases}$$

где

$$s_l^3 = \varphi_2 - (\varphi_2 - b_1) \left(\frac{l}{M_1} \right)^v; \quad l = \overline{1, M_1}$$

$$s_l^4 = \varphi_2 + (b_2 - \varphi_2) \left(\frac{l}{M_2} \right)^v; \quad l = \overline{1, M_2}$$

Параметр v определяет степень сгущения сетки; его следует выбирать, исходя из гладкости функции $F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2)$. Теоретические оценки для v можно найти в работе [3].

Заметим, что если $|\varphi_1 - a_1| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, то систему узлов s_k^1 строить нецелесообразно и данные узлы следует отбросить. С другой стороны, если $|\varphi_1 - a_2| < \varepsilon$, то нужно отбросить узлы s_k^2 . Аналогично будем поступать и с узлами s_l^3 и s_l^4 по переменной θ_2 .

Построенная сетка узлов разбивает область B на прямоугольные подобласти B_{kl} .

$$B_{kl} = \{\theta_1^k \leq \theta_1 \leq \theta_1^{k+1}; \theta_2^l \leq \theta_2 \leq \theta_2^{l+1}\}, \quad k = \overline{1, M_1 + M_2 - 1}, l = \overline{1, M_1 + M_2 - 1}$$

При этом особая точка попадает только в одну область при $k = l = M_1$, а во всех остальных областях особенностей нет. Область, содержащую особенность, будем обозначать B^* .

Разобьем интеграл (3.12) на сумму интегралов по прямоугольникам B_{kl} :

$$\begin{aligned} \iint_B F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 &= \sum_{k,l} \iint_{B_{kl}} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \\ &= \sum_{k,l; k,l \neq M_1} \iint_{B_{kl}} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 + \iint_{B^*} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поскольку особенность локализована в области B^* , в выражении (3.13) интеграл по области B^* записан отдельно от суммы. Для вычисления этого интеграла будем использовать формулу левых прямоугольников:

$$\iint_{B^*} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \approx (\theta_1^{k+1} - \theta_1^k)(\theta_2^{l+1} - \theta_2^l) F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1^k, \theta_2^l);$$

остальные интегралы, стоящие под знаком суммы, вычислим по квадратурной формуле Гаусса:

$$\iint_{B_{i,j}} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \approx \frac{\theta_1^i - \theta_1^{i-1}}{2} \frac{\theta_2^j - \theta_2^{j-1}}{2} \sum_{k=1}^Q \sum_{p=1}^Q g_k g_p F(\varphi_1, \varphi_2, \xi_1^k, \xi_2^p)$$

где Q — число узлов формулы Гаусса, g_k, g_p — весовые коэффициенты формулы, ξ_1^k, ξ_2^p — узлы Гаусса ξ_i , спроецированные на отрезки $[s_{i-1}^1, s_i^1]$ и $[s_{j-1}^2, s_j^2]$ соответственно:

$$\begin{aligned} \xi_1^k &= \frac{\theta_1^i + \theta_1^{i-1}}{2} + \frac{\theta_1^i - \theta_1^{i-1}}{2} \xi_k, & k = \overline{1, Q}, \\ \xi_2^p &= \frac{\theta_2^j + \theta_2^{j-1}}{2} + \frac{\theta_2^j - \theta_2^{j-1}}{2} \xi_p, & k = \overline{1, Q}. \end{aligned}$$

4. Численные результаты

Для реализации численных методов решения краевых задач $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ было создано приложение на языке программирования C++ (стандарт C++11) с использованием компилятора GCC в операционной системе GNU/Linux.

Работу предложенного метода проиллюстрируем на следующих модельных задачах.

4.1. Задача \mathbf{D}_1 для уравнения Лапласа на торе

Рассмотрим задачу \mathbf{D}_1 для уравнения (2.2) на торе, заданном параметрически

$$\mathbf{T}(r_m, r_t) \equiv \begin{cases} x_1 = (r_m + r_t \cos(\varphi_1)) \cos(\varphi_2) \\ x_2 = (r_m + r_t \cos(\varphi_1)) \sin(\varphi_2) \\ x_3 = r_t \sin(\varphi_1) \end{cases}, \quad \varphi_1 \in [-\pi, \pi], \varphi_2 \in [0, 2\pi]. \quad (4.1)$$

где r_m — расстояние от центра образующей окружности до оси вращения, а r_t — радиус образующей окружности. Будем решать следующую задачу:

Модельная задача: решить задачу \mathbf{D}_1 для уравнения (2.2) на торе $\mathbf{T}(1, 0.5)$ с известным точным решением для контроля погрешности

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 - x_2} \cos(\sqrt{2} x_3) - 1.$$

Для того, чтобы оценить погрешность решения данной задачи требуется выбрать множество контрольных точек z_k , в которых будем вычислять приближенное решение. Мы решаем внутреннюю задачу \mathbf{D}_1 , следовательно точки z_k должны быть расположены внутри тора \mathbf{T} .

Выберем некоторый параллелепипед \mathbf{P}_T , который вмещает тор \mathbf{T} . Затем сгенерируем массив случайных точек $z_k^* \in \mathbf{P}_T$ и отбросим те точки, которые не попадают внутрь объема тора. Оставшиеся точки z_k^* , $k = \overline{1, N_c}$ веберем в качестве контрольных. Абсолютную погрешность приближенного решения будет оценивать по формуле

$$E_{abs} = \max_k |u(z_k^*) - u^*(z_k^*)|, \tag{4.2}$$

где u^* — приближенное решение, выражаемое потенциалом (2.8).

На графике 4.1 приведены зависимости абсолютной погрешности E_{abs} от числа полиномов N_1, N_2 сплайна $T(\varphi_1, \varphi_2)$ при различных фиксированных значениях числа узлов R в каждом из полиномов L_{ij} . Параметры квадратурных формул были выбраны следующим образом: $M_1 = M_2 = 4, Q = 8, v = 4$. Число контрольных точек $N_c = 512$.

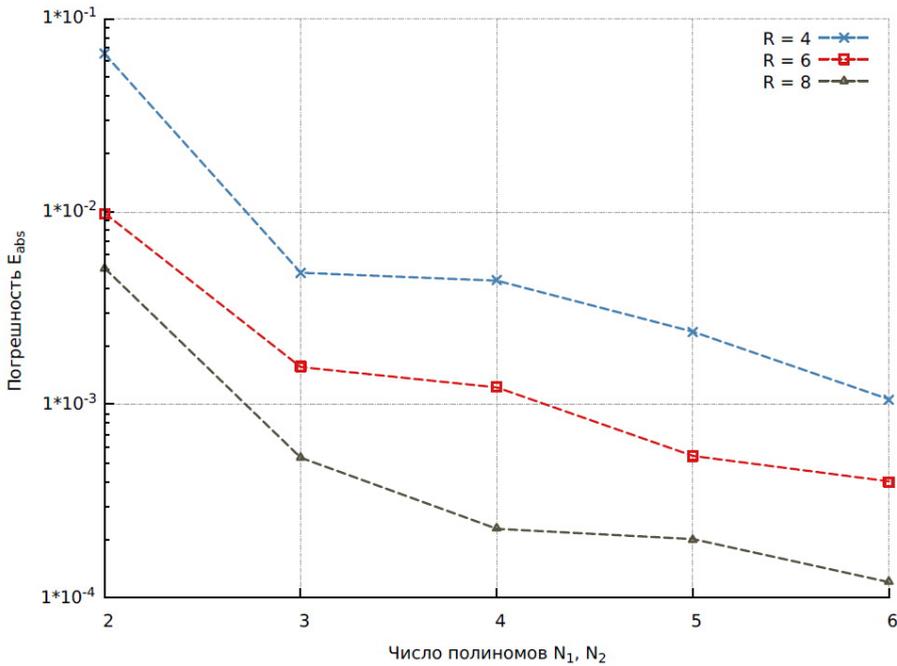


Рис. 4.1. Абсолютная погрешность решения задачи \mathbf{D}_1 для уравнения Лапласа

4.2. Задача \mathbf{N}_2 для уравнения Гельмгольца на эллипсоиде

Рассмотрим эллипсоид $\mathbf{E}(a, b, c)$ с полуосями a, b, c :

$$\mathbf{E}(a, b, c) \equiv \begin{cases} x_1 = a \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \\ x_2 = b \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \\ x_3 = c \sin(\varphi_1) \end{cases}, \quad \varphi_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \varphi_2 \in [0, 2\pi]. \tag{4.3}$$

Рассмотрим следующую задачу:

Модельная задача: решить задачу \mathbf{N}_2 для уравнения (2.1) на эллипсоиде $\mathbf{E}(0.5, 0.6, 0.8)$ с волновым числом $k = 2i$ и известным точным решением

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{r^2(x)} e^{-2r(x)} \left(1 + \frac{1}{2r(x)} \right), \quad r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

В данном случае мы решаем внешнюю задачу и контрольные точки z_k необходимо выбирать так, чтобы они располагались во внешней части пространства относительно поверхности \mathbf{E} . Для эллипсоида (4.3) точки z_k удобно выбрать следующим образом: $z_k = (z_1^{i,j,k}, z_2^{i,j,k}, z_3^{i,j,k})$, где

$$z_1^{i,j,k} = \rho_i a \cos(\varphi_{1,j}) \cos(\varphi_{2,k})$$

$$z_2^{i,j,k} = \rho_i b \cos(\varphi_{1,j}) \sin(\varphi_{2,k})$$

$$z_3^{i,j,k} = \rho_i c \sin(\varphi_{1,j})$$

$$\rho_i = 1 + \frac{i+1}{M+1}, \quad i = \overline{1, M}; \quad \varphi_{1,j} = -\frac{\pi}{2} + j \frac{\pi}{N}, \quad j = \overline{0, N-1}; \quad \varphi_{2,k} = \frac{2k\pi}{K}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

При этом точки z_k будут попадать вне эллипсоида \mathbf{E} и будут лежать на охватывающих эллипсоидах, расходящихся от \mathbf{E} .

Зависимость погрешности E_{abs} от значений N_1, N_2 приведена на графике 4.2. Параметры численного метода выбирались так же, как и в предыдущей задаче.

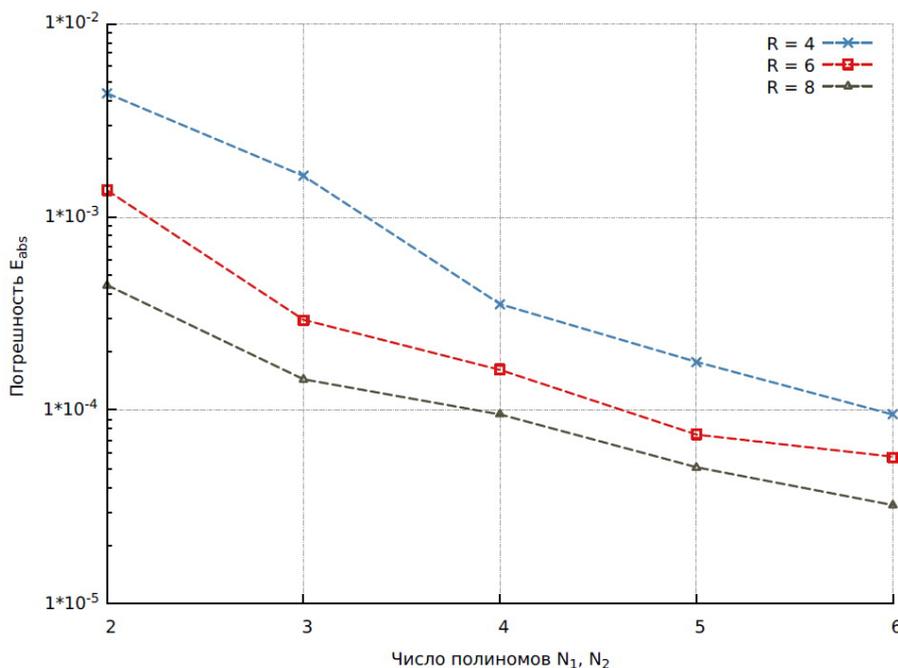


Рис. 4.2. Абсолютная погрешность решения задачи \mathbf{N}_2 для уравнения Гельмгольца

5. Заключение

Предложенный выше метод сплайн-коллокаций может быть применен для решения широкого класса эллиптических краевых задач. В настоящей работе рассматривались только граничные задачи Дирихле и Неймана, однако слабосингулярные ГИУ можно получить и для смешанной задачи. Такие уравнения рассматривались в работе [6]. Кроме того, отметим, что метод граничных интегральных уравнений можно применять к неоднородным эллиптическим уравнениям. Например, ГИУ для уравнения Пуассона рассмотрены в работе [7]. Реализация сплайн-коллокационных методов для решения смешанных задач и задач для уравнения Пуассона представляет интерес для дальнейших исследований.

Основываясь на результатах данной работы, можно сказать, что численный метод сходится на модельных задачах и обеспечивает неплохую точность решения. Стоит отметить недостаток метода: предложенный способ аппроксимации слабосингулярных интегралов требует построения сильно сгущающихся сеток с большими значениями параметра ν . На практике реализация таких сеток на ЭВМ может привести к возникновению ошибок округления, связанных с возникновением очень больших и очень маленьких чисел в ходе вычислений. Одним из подходов, позволяющим преодолеть такие технические ограничения, является использование математических пакетов с алгоритмами высокоточной арифметики для представления мантисс чисел с плавающей точкой произвольной разрядности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. — 512 с.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: пер. с англ. Москва: Мир, 1987. — 311 с.
3. Tynda A., Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2008. Vol. 10, No. 2. pp. 68-78.
4. Захаров Е. В., Калинин А. В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 7. С. 1197-1206.
5. Каширин А. А., Смагин С. И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1492–1505.
6. Халилов Э. Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, 7. С. 1340–1348.
7. Kublik C., Tanushev N., Tsai R. An implicit interface boundary integral method for Poisson's equation on arbitrary domains // Journal of Computational Physics. 2013. Vol. 247. pp. 279–311.

Поступила 8.07.2020

MSC2020 65R20, 35J25, 47G40

Application of boundary integral equation method to numerical solution of elliptic boundary-value problems in \mathbb{R}^3

© A. N. Tynda¹, K. A. Timoshenkov²

Abstract. In this paper we propose numerical methods for solving interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz and Laplace equations in complex three-dimensional domains. The method is based on their reduction to boundary integral equations in \mathbb{R}^2 . Using the potentials of the simple and double layers, we obtain boundary integral equations of the Fredholm type with respect to unknown density for Dirichlet and Neumann boundary value problems. As a result of applying integral equations along the boundary of the domain, the dimension of problems is reduced by one. In order to approximate solutions of the obtained weakly singular Fredholm integral equations we suggest general numerical method based on spline approximation of solutions and on the use of adaptive cubatures that take into account the singularities of the kernels. When constructing cubature formulas, essentially non-uniform graded meshes are constructed with grading exponent that depends on the smoothness of the input data. The effectiveness of the method is illustrated with some numerical experiments.

Key Words: elliptic boundary-value problems, weakly singular Fredholm integral equations, spline-collocation method, nonuniform meshes, approximation of integrals

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1981 (in Russ.).
2. D. Colton, R. Cress, *Integral equation methods in scattering theory*, A Wiley Interscience Publ., New-York, 1983.
3. A. Tynda, “Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **10:2** (2008), 68–78.
4. E. V. Zakharov, A. V. Kalinin, “Method of boundary integral equations as applied to the numerical solution of the three-dimensional Dirichlet problem for the laplace equation in a piecewise homogeneous medium”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **49:7** (2009), 1141–1150.
5. A. A. Kashirin, S. I. Smagin, “Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52:8** (2012), 1173–1185.
6. E. H. Khalilov, “Justification of the collocation method for the integral equation for a mixed boundary value problem for the Helmholtz equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56:7** (2016), 1310–1318.

¹Aleksandr N. Tynda, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

²Konstantin A. Timoshenkov, MSc student, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), timoshenkov.ka@yandex.ru

7. C. Kublik, N. Tanushev, R. Tsai, “An implicit interface boundary integral method for Poisson’s equation on arbitrary domains”, *Journal of Computational Physics*, **247** (2013), 279–311.

Submitted 8.07.2020