DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.280-305

УДК 517.9

Об асимптотике спектра дифференциального оператора четного порядка, потенциалом которого является дельта-функция

© **С. И. Митрохин**[1]

Аннотация. В работе предлагается новый метод изучения дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами. Рассматривается последовательность дифференциальных операторов шестого порядка с кусочно-гладкими коэффициентами. Пределом последовательности потенциалов этих операторов является дельта-функция Дирака. Граничные условия являются разделёнными. Для корректного определения решений дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами в точках разрыва требуются условия «склейки». Асимптотические решения выписаны при больших значениях спектрального параметра, с помощью них изучены условия «склейки» и исследованы граничные условия. В результате выведено уравнение на собственные значения изучаемого дифференциального оператора, которое представляет собой целую функцию. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения, она представляет собой правильный шестиугольник. В различных секторах индикаторной диаграммы методом последовательных приближений найдена асимптотика собственных значений изучаемых дифференциальных операторов. Предел асимптотики спектра задаёт спектр оператора шестого порядка, потенциалом которого является дельта-функция.

Ключевые слова: дифференциальный оператор с разрывными коэффициентами, асимптотика решений, кусочно-гладкий потенциал, дельта-функция Дирака, асимптотика собственных значений, спектр оператора

1. Введение. Постановка задачи

В данной статье мы изучим асимптотику спектра семейства дифференциальных операторов, задаваемых на отрезке дифференциальным уравнением

$$\vec{y}_n^{(6)}(x) + Q_n(x)\vec{y}(x) = \lambda a^6 \vec{y}_n(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad a > 0,$$

с некоторыми граничными условиями, где $Q_n(x)$ — потенциал; λ — спектральный параметр; $\rho(x) = a^6$ — весовая функция, при этом потенциал $Q_n(x)$ представляет собой последовательность кусочно-гладких функций, дающих в пределе δ-функцию.

Рассмотрим дифференциальный оператор, задаваемый на отрезке $[0, \pi]$ дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(6)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^6 y_1(x), \ 0 \leqslant x < x_{1n}, \quad a > 0; \tag{1.1}$$

$$y_2^{(6)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda a^6 y_2(x), \ x_{1n} \leqslant x \leqslant x_2; \tag{1.2}$$

$$y_3^{(6)}(x) + q_3(x)y_3(x) = \lambda a^6 y_3(x), \ x_2 < x \leqslant x_{3n}; \tag{1.3}$$

$$y_4^{(6)}(x) + q_4(x)y_4(x) = \lambda a^6 y_4(x), \ x_{3n} < x \leqslant \pi, \tag{1.4}$$

[1]**Митрохин Сергей Иванович**, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Россия, г. Москва, Ленинские Горы, д. 6), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1896-0563, mitrokhin-sergey@yandex.ru

с граничными условиями

$$y_1(0) = y_1''(0) = y_1^{(4)}(0) = y_4(\pi) = y_4''(\pi) = y_4^{(4)}(\pi) = 0, \tag{1.5}$$

при этом потенциал удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{gathered} q_1(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, x_{1n}); \quad q_4(x) = 0, \quad x \in (x_{3n}, \pi]; \\ q_{2(x)} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (x_{1n}, x_2); \quad q_3(x) > 0, \quad x \in (x_2, x_{3n}); \\ \lim_{n\to+\infty} x_{1n} = x_2; \quad \lim_{n\to+\infty} x_{3n} = x_2; \quad \lim_{x\to x_{1n}} q_2(x) = 0; \quad \lim_{x\to x_{3n}} q_3(x) = 0; \\ \lim_{x\to x_2} q_2(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to x_2} q_3(x) = +\infty; \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t)dt = H_{2n}; \quad \int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t)dt = H_{3n}; \quad H_{2n} + H_{3n} = 1, \tag{1.7}$$

также выполняются следующие условия гладкости:

$$q_2(x) \in C^5(x_{1n}, x_2); \quad q_3(x) \in C^5(x_2, x_{3n}). \tag{1.8}$$

Таким образом, в предельном случае получим:

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(x) = \delta(x - x_2), \tag{1.9}$$

поэтому перепишем уравнение (1.1)–(1.4) в виде

$$\vec{y}^{(6)}(x) + \delta(x - x_2)\vec{y}(x) = \lambda a^6 \vec{y}_n(x), \quad 0 \leqslant x < \pi, \quad a > 0,$$

где λ — спектральный параметр.

Кроме того, для корректности решения уравнений (1.1)–(1.4), необходимо выполнение условий «склейки» в точках x_{1n}, x_2, x_{3n} разрыва коэффициентов

$$y_1(x_{1n} - 0) = y_2(x_{1n} + 0); \quad y_1^{(m)}(x_{1n} - 0) = y_2^{(m)}(x_{1n} + 0), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5; \tag{1.10}$$

$$y_2(x_2 - 0) = y_3(x_2 + 0); \quad y_2^{(m)}(x_2 - 0) = y_3^{(m)}(x_2 + 0), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5; \tag{1.11}$$

$$y_3(x_{3n} - 0) = y_4(x_{3n} + 0); \quad y_3^{(m)}(x_{3n} - 0) = y_4^{(m)}(x_{3n} + 0), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{1.12}$$

Приведем пример последовательности потенциалов, пределом которых является дельта-функция $\delta(x - x_2)$: x_2 — фиксированная точка, $x_2 \in (0, \pi)$; $x_{1n} = x_2 - \dfrac{1}{n}$, $x_{3n} = x_2 + \dfrac{2}{n}$ — достаточно большое число, чтобы выполнялись неравенства $x_{1n} > 0$, $x_{3n} < \pi$; $q_1(x) = 0$ при $x \in [0, x_{1n})$; $q_2(x)$ — прямая, соединяющая точки $A_{1n}(x_2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $B_{1n}(x_2, 2n)$, ее уравнение $y = q_2(x) = (2n^2 - 1)x + (1 - 2n^2)x_2 + 2n$; $q_3(x)$ — прямая, соединяющая точки $D_{1n}(x_2, \frac{n}{2} + \frac{5}{2n})$ и $G_{1n}(x_2 + \frac{2}{n}, \dfrac{2}{n})$, ее уравнение $y = q_3(x) = (-\frac{1}{4} - \dfrac{n^2}{4})x + (\dfrac{n^2}{4} - \dfrac{1}{4})x_2 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{5}{2n}$; $q_4(x) = 0$ при $x \in (x_{3n}, \pi]$. Функции $q_2(x)$ и $q_3(x)$ удовлетворяют условиям (1.6) и (1.7):

$$\int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t)dt = \int_{x_2 - \frac{1}{n}}^{x_2} [(2n^2 - 1)t + (1 - 2n^2)x_2 + 2n)]dt = H_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2},$$

$$\int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t)dt = \int_{x_2}^{x_2 + \frac{2}{n}} \left[\left(-\frac{n^2}{4} - \frac{1}{4}\right)t + \left(\frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}\right)x_2 + \frac{n}{2} + \frac{5}{2n}\right] = H_{3n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2},$$

$H_{2n} + H_{3n} = 1$, поэтому при $n \to \infty$ потенциал в пределе дает дельта-функцию $\delta(x - x_2)$.

2. Из истории вопроса

Идея статьи заключается в рассмотрении дифференциального оператора шестого порядка с потенциалом дельта-функцией Дирака как предела последовательности операторов с кусочно-гладкими потенциалами. В работе [1] было дано строгое обоснование метода дельта-потенциалов, используемого в физике, – например, для изучения модели нерелятивистского электрона, движущегося в жесткой кристаллической решетке, а также для описания короткодействующих примесей, дефектов и аналогичных явлений в различных системах. В этой работе была использована формула М. Г. Крейна для описания резольвенты дифференциального оператора второго порядка с точечными возмущениями (фактически с дельта-функциями). Модель точечных потенциалов, модель нерелятивистского электрона широко применяются в ядерной и атомной физике [2–5].

Спектральная теория дифференциальных операторов развивается в сторону уменьшения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, определяющих такие операторы. Дифференциальные операторы второго порядка с негладкими коэффициентами, заданные на отрезке, в разрезе спектральной теории (с кусочно-гладкими потенциалами или кусочно-гладкой весовой функцией) рассмотрены в работах [6–10].

Следующим этапом понижения гладкости потенциалов было рассмотрение дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами. В работе [11] найдена асимптотика собственных значений и асимптотика собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом с различными краевыми условиями.

В работах [12–15] автором предложен другой метод для изучения спектральных свойств операторов четвертого порядка и выше с разделенными либо неразделенными граничными условиями (с суммируемыми коэффициентами).

Различные дифференциальные операторы второго порядка с сингулярными потенциалами (в т. ч. и операторы с дельта-потенциалами), изучались в работах [16–21]. В работах [17–19] была получена формула первого регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля, потенциалом которого являлась дельта-функция Дирака. Операторы порядка выше второго с дельта-потенциалами до сих пор не были изучены, в нашей статье мы пытаемся устранить этот пробел.

3. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1.1)–(1.4) при больших значениях спектрального параметра λ

Введем следующие обозначения: $\lambda = s^6$, $s = \sqrt[6]{\lambda}$, при этом для корректности дальнейших вычислений зафиксируем ту ветвь арифметического корня шестой степени, для которой $\sqrt[6]{1} = +1$. Пусть ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ — различные корни шестой степени из единицы:

$$\omega_k^6 = 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{6}(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6;$$
$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi i}{6}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$
$$\omega_4 = -1; \quad \omega_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \omega_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$
$$\omega_4 = -\omega_1; \quad \omega_5 = -\omega_2; \quad \omega_6 = -\omega_3; \quad \omega_5 = \bar{\omega}_3,$$
$$\omega_6 = \bar{\omega}_2; \quad \omega_1 = \bar{\omega}_1; \quad \omega_4 = \bar{\omega}_4. \tag{3.1}$$

Числа ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ делят единичную окружность на шесть равных частей и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{k=1}^{6} \omega_k^m = 0,\ m = 1, 2, 3, 4, 5;\ \sum_{k=1}^{6} \omega_k^m = 6,\ m = 0,\ m = 6. \tag{3.2}$$

Методами, примененными в монографии [22, с. 2], с учетом условий гладкости (1.8) устанавливаются следующие утверждения.

Т е о р е м а 3.1 *Общее решение дифференциального уравнения* (1.1) *при выполнении условия* (1.6) $(q_1(x) = 0,\ x \in [0, x_{1n}))$ *имеет следующий вид:*

$$y_1(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{1k} y_{1k}(x,s); \quad y_1^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 5, \tag{3.3}$$

где C_{1k} $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ *— произвольные постоянные,*

$$y_{1k}(x,s) = e^{a\omega_k s x}; \quad y_{1k}^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6; \quad m = 1, 2, \ldots, 5. \tag{3.4}$$

Т е о р е м а 3.2 *Общее решение дифференциального уравнения* (1.2) *имеет вид*

$$y_2(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{2k} y_{2k}(x,s); \quad y_2^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 5, \tag{3.5}$$

где C_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ *— произвольные постоянные. При этом для фундаментальной системы решений* $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{6}$ *справедливы следующие асимптотические разложения и оценки:*

$$y_{2k}(x,s) = e^{a\omega_k s x}\left[1 + \frac{\omega_k A_5(x)}{s^5} + \frac{A_6^0(x)}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^7}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 6; \tag{3.6}$$

$$y_{2k}^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x}\left[1 + \frac{\omega_k A_5(x)}{s^5} + \frac{A_6^m(x)}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^7}\right)\right], \tag{3.7}$$

$$k = 1, 2, \ldots, 6, \quad m = 1, 2, \ldots, 5.$$

$$A_5(x) = -\frac{1}{6a^5}\int_{x_{1n}}^{x} q_2(t)dt; \quad A_5(x_{1n}) = 0; \quad A_5'(x) = -\frac{q_2(x)}{6a^5}; \tag{3.8}$$

$$A_6^0(x) = \frac{5q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^1(x) = \frac{3q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^2(x) = \frac{q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6};$$
$$A_6^3(x) = \frac{-q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^4(x) = \frac{-3q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^5(x) = \frac{-5q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}. \tag{3.9}$$

При этом справедливо следующее свойство:

$$\sum_{k=0}^{5} A_6^k(x) = \sum_{k=0}^{5} A_6^k(x_{1n}) = \sum_{k=0}^{5} A_6^k(x_2) = D_6 = \frac{(-5)q_2(x_{1n})}{2a^6}. \tag{3.10}$$

Т е о р е м а 3.3 *Общее решение дифференциального уравнения* (1.3) *представимо в виде*

$$y_3(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{3k} y_{3k}(x,s); \quad y_3^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{3k} y_{3k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 5, \tag{3.11}$$

где C_{3k} $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ *— произвольные постоянные. При этом для фундаментальной системы решений* $\{y_{3k}(x,s)\}_{k=1}^{6}$ *справедливы следующие асимптотические разложения и оценки:*

$$y_{3k}(x,s) = e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^0(x)}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^7}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 6, \tag{3.12}$$

$$y_{3k}^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k B_5(x)}{s^5} + \frac{B_5^m(x)}{s^5} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^7}\right)\right], \tag{3.13}$$

$$k = 1, 2, \ldots, 6, \quad m = 1, 2, \ldots, 5.$$

$$B_5(x) = -\frac{1}{6a^5}\int_{x_2}^{x} q_3(t)dt; \quad B_5(x_2) = 0; \quad B_5'(x) = -\frac{q_3(x)}{6a^5}; \tag{3.14}$$

$$B_6^0(x) = \frac{5q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; \quad B_6^1(x) = \frac{3q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; \quad B_6^2(x) = \frac{q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6};$$
$$B_6^3(x) = \frac{-q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; \quad B_6^4(x) = \frac{-3q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; \quad B_6^5(x) = \frac{-5q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; \tag{3.15}$$

$$\sum_{k=0}^{5} B_6^k(x) = \sum_{k=0}^{5} B_6^k(x_2) = \sum_{k=0}^{5} B_6^k(x_{3n}) = E_6 = \frac{-5q_3(x_2)}{2a^6}. \tag{3.16}$$

Теорема 3.4 *Общее решение дифференциального уравнения* (1.4) *при выполнении условия* (1.6) $(q_4(x) = 0,\ x \in (x_{3n}, \pi])$ *имеет следующий вид:*

$$y_4(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{4k} y_{4k}(x,s); \quad y_4^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{4k} y_{4k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 5, \tag{3.17}$$

где C_{4k} $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ *— произвольные постоянные,*

$$y_{4k}(x,s) = e^{a\omega_k sx}; \quad y_{4k}^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}, \tag{3.18}$$
$$k = 1, 2, \ldots, 6; \quad m = 1, 2, \ldots, 5.$$

Наличие асимптотических формул (3.3)–(3.18) позволяет изучить условия «склейки» (1.10)–(1.12).

4. Изучение условий «склейки» (1.11)

Из условий «склейки» (1.11) в фиксированной точке x_2 разрыва коэффициентов, применив формулы (3.5) и (3.11), получим:

$$y_3(x_2+0,s) \overset{(1.11)}{=} y_2(x_2-0,s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{3k} y_{3k}(x_2+0,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{2k} y_{2k}(x_2-0,s); \tag{4.1}$$

$$\frac{y_3^{(m)}(x_2+0,s)}{(as)^m} \overset{(1.11)}{=} \frac{y_2^{(m)}(x_2-0,s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{3k}\frac{y_{3k}^{(m)}(x_2+0,s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^{6} C_{2k}\frac{y_{2k}^{(m)}(x_2-0,s)}{(as)^m},$$
$$m = 1, 2, \ldots, 5. \tag{4.2}$$

Рассмотрим систему (4.1)—(4.2) как систему из шести линейных уравнений с шестью неизвестными $C_{31}, C_{32}, \ldots, C_{36}$, при этом $C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{26}$ — параметры. Из теоремы Крамера следует, что решение этой системы единственно и представляется в виде

$$C_{3n} = \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_{03}(s) \neq 0}, \quad n = 1, 2, \ldots, 6, \tag{4.3}$$

где $\Delta_{03}(x) = \Delta_{03}(x, s)$ (не зависит от x) — определитель Вронского фундаментальной системы функций $\{y_{31}(x, s); y_{32}(x, s), \ldots, y_{36}(x, s)\}$, и определители Δ_{3n} $(n = 1, 2, \ldots, 6)$ получаются из определителя $\Delta_{03}(x_2, s)$ заменой n-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{6} C_{2k} y_{2k}(x_2 - 0, s); \quad \sum_{k=1}^{6} C_{2k} \frac{y'_{2k}(x_2 - 0, s)}{as}; \ldots; \sum_{k=1}^{6} C_{26} \frac{y^{(5)}_{2k}(x_2 - 0, s)}{(as)^5}\right)^*. \tag{4.4}$$

Таким образом, определитель Вронского $\Delta_{03}(s) = \Delta_{03}(x, s) = \Delta_{03}(x_2, s)$ имеет вид

$$\Delta_{04}(s) = \begin{vmatrix} y_{31}(x,s) & y_{32}(x,s) & \ldots & y_{35}(x,s) & y_{36}(x,s) \\ \dfrac{y'_{31}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{32}(x,s)}{as} & \ldots & \dfrac{y'_{35}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{36}(x,s)}{as} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{y^{(5)}_{31}(x,s)}{(as)^5} & \dfrac{y^{(5)}_{32}(x,s)}{(as)^5} & \ldots & \dfrac{y^{(5)}_{35}(x,s)}{(as)^5} & \dfrac{y^{(5)}_{36}(x,s)}{(as)^5} \end{vmatrix}, \tag{4.5}$$

а определитель Δ_{31} из (4.3)— (4.4) записывается в следующем виде:

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{6} C_{2k} y_{2k}(x_2 - 0, s) & y_{32}(x,s) & \ldots & y_{35}(x,s) & y_{36}(x,s) \\ \sum\limits_{k=1}^{6} C_{2k} \dfrac{y'_{2k}(x_2 - 0, s)}{as} & \dfrac{y'_{32}(x,s)}{as} & \ldots & \dfrac{y'_{35}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{36}(x,s)}{as} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{6} C_{2k} \dfrac{y^{(5)}_{2k}(x_2 - 0, s)}{(as)^5} & \dfrac{y^{(5)}_{32}(x,s)}{(as)^5} & \ldots & \dfrac{y^{(5)}_{35}(x,s)}{(as)^5} & \dfrac{y^{(5)}_{36}(x,s)}{(as)^5} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Подставив формулы (3.12)–(3.16) в формулу (4.5), учитывая свойства определителей, вынесем из каждого столбца множитель $e^{a\omega_k sx}$, запишем определитель $\Delta_{03}(s)$ в виде

$$\Delta_{03}(s) = e^{a\omega_1 sx} e^{a\omega_2 sx} (\ldots) e^{a\omega_5 sx} e^{a\omega_6 sx} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} 1 \cdot \left[1 + \dfrac{\omega_1 B_5(x)}{s^5} + \dfrac{B_6^0(x)}{s^6} + \ldots\right] & b_{12} & \ldots & 1 \cdot \left[1 + \dfrac{\omega_6 B_5(x)}{s^5} + \dfrac{B_6^0(x)}{s^6} + \ldots\right] \\ \omega_1 \cdot \left[1 + \dfrac{\omega_1 B_5(x)}{s^5} + \dfrac{B_6^1(x)}{s^6} + \ldots\right] & b_{22} & \ldots & \omega_6 \left[1 + \dfrac{\omega_6 B_5(x)}{s^5} + \dfrac{B_6^1(x)}{s^6} + \ldots\right] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^5 \cdot \left[1 + \dfrac{\omega_1 B_5(x)}{s^5} + \dfrac{B_6^5(x)}{s^6} + \ldots\right] & b_{62} & \ldots & \omega_6^5 \left[1 + \dfrac{\omega_6 B_5(x)}{s^5} + \dfrac{B_6^5(x)}{s^6} + \ldots\right] \end{vmatrix}, \tag{4.7}$$

где «$+\dots$» означает «$+\underline{O}(\frac{1}{s^7})$», при этом

$$(b_{12};b_{22};\dots;b_{62})^* = \left(1\cdot\left[1+\frac{\omega_2B_5(x)}{s^5}+\frac{B_6^0(x)}{s^6}+\dots\right];\right.$$
$$\left.\omega_2\left[1+\frac{\omega_2B_5(x)}{s^5}+\frac{B_6^1(x)}{s^6}+\dots\right];\dots;\omega_2^5\left[1+\frac{\omega_2B_5(x)}{s^5}+\frac{B_6^5(x)}{s^6}+\dots\right]\right)^*.$$

Из формулы (3.2) следует, что $\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_5+\omega_6 = 0$, поэтому $e^{a\omega_1sx}e^{a\omega_2sx}(\dots)e^{a\omega_5sx}e^{a\omega_6sx}=e^0=1$.

Пусть Δ_{00} — определитель Вандермонда чисел $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_6$ из (3.1):

$$\Delta_{00}=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\ \omega_1&\omega_2&\omega_3&\dots&\omega_6\\ \omega_1^2&\omega_2^2&\omega_3^2&\dots&\omega_6^2\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \omega_1^5&\omega_2^5&\omega_3^5&\dots&\omega_6^5\end{vmatrix}=\prod_{\substack{k>m;\\ k,m=1,2,\dots,6}}(\omega_k-\omega_m)=\Delta_{00}\neq 0. \tag{4.8}$$

Обозначим через (δ_{mk}) $(m,k=1,2,\dots,6)$ матрицу алгебраических миноров к элементам b_{mn} определителя Δ_{00} из (4.8). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1

$$(\delta_{mk})=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\dots&\delta_{16}\\ \delta_{21}&\delta_{22}&\dots&\delta_{26}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ \delta_{61}&\delta_{62}&\dots&\delta_{66}\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{\Delta_{00}}{6}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1&-1\\ -\omega_1^{-1}&\omega_2^{-1}&-\omega_3^{-1}&\omega_4^{-1}&-\omega_5^{-1}&\omega_6^{-1}\\ \omega_1^{-2}&-\omega_2^{-2}&\omega_3^{-2}&-\omega_4^{-2}&\omega_5^{-2}&-\omega_6^{-2}\\ -\omega_1^{-3}&\omega_2^{-3}&-\omega_3^{-3}&\omega_4^{-3}&-\omega_5^{-3}&\omega_6^{-3}\\ \omega_1^{-4}&-\omega_2^{-4}&\omega_3^{-4}&-\omega_4^{-4}&\omega_5^{-4}&-\omega_6^{-4}\\ -\omega_1^{-5}&\omega_2^{-5}&-\omega_3^{-5}&\omega_4^{-5}&-\omega_5^{-5}&\omega_6^{-5}\end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Доказательство теоремы 4.1 приведено в работе автора [23].

Разложим определитель $\Delta_{03}(s)$ из (4.7) на сумму определителей по столбцам, получим:

$$\Delta_{03}(x,s)=\Delta_{03}(s)=e^0\left[\Delta_{00}+\frac{\Delta_{03,5}}{s^5}+\frac{\Delta_{03,6}}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right], \tag{4.10}$$

при этом найдем $\Delta_{03,5}$ и $\Delta_{03,6}$, используя формулы (4.8)– (4.9):

$$\Delta_{03,5} = \omega_1 B_5(x)\Delta_{00} + \omega_2 B_5(x)\Delta_{00} + \dots + \omega_6 B_5(x)\Delta_{00} =$$

$$= (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_6) B_5(x)\Delta_{00} \overset{(3.2)}{=} 0 \cdot B_5(x)\Delta_{00} = 0; \qquad (4.11)$$

$$\Delta_{03,6} = B_6^0(x)[1\cdot\delta_{11} - 1\cdot\delta_{12} + 1\cdot\delta_{13} - \dots - 1\cdot\delta_{16}] +$$
$$+ B_6^1(x)[-\omega_1\delta_{21} + \omega_2\delta_{22} - \omega_3\delta_{23} + \dots + \omega_6\delta_{26}] +$$
$$+ B_6^2(x)[\omega_1^2\delta_{31} - \omega_2^2\delta_{32} + \omega_3^2\delta_{33} - \dots - \omega_6^2\delta_{36}] + \dots +$$
$$+ B_6^5(x)[-\omega_1^5\delta_{61} + \omega_2^5\delta_{62} - \omega_3^5\delta_{63} + \dots + \omega_6^5\delta_{66}] =$$
$$= B_6^0(x)\Delta_{00} + B_6^1(x)\Delta_{00} + B_6^2(x)\Delta_{00} + \dots + B_6^5(x)\Delta_{00} =$$
$$= \Delta_{00}\sum_{k=0}^{5} B_6^k(x) \overset{(3.16)}{=} \Delta_{00}E_6. \qquad (4.12)$$

Таким образом, из формул (4.10)–(4.12) выведем:

$$\Delta_{03}(s) = \Delta_{00}\left[1 + \frac{0}{s^5} + \frac{E_6}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right]. \qquad (4.13)$$

Из формул (4.6), (4.3)–(4.4) и свойств определителя следует, что

$$C_{3n} = \frac{1}{\Delta_{03}(s) \neq 0}\sum_{k=1}^{6} C_{2k}\Delta_{3nk}, \quad n = 1, 2, \dots, 6. \qquad (4.14)$$

Подставив в формулу (4.6) формулы (3.6)–(3.10) и (3.12)–(3.16), вынеся из столбцов соответствующие множители, выпишем подробно определитель Δ_{311} из (4.14):

$$\Delta_{311} = e^{a\omega_1 s x_2}(e^{a\omega_2 s x_2} e^{a\omega_3 s x_2}(\dots) e^{a\omega_6 s x_2}) \times$$
$$\times \begin{vmatrix} 1\cdot\left[1 + \frac{\omega_1 A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2)}{s^6} + \dots\right] & b_{12} & \dots & 1\cdot\left[1 + \frac{\omega_1 B_5(x_2)}{s^5} + \frac{B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots\right] \\ \omega_1\left[1 + \frac{\omega_1 A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2)}{s^6} + \dots\right] & b_{22} & \dots & \omega_6\left[1 + \frac{\omega_6 B_5(x_2)}{s^5} + \frac{B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^5\left[1 + \frac{\omega_1 A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2)}{s^6} + \dots\right] & b_{62} & \dots & \omega_6^5\left[1 + \frac{\omega_6 B_5(x_2)}{s^5} + \frac{B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots\right] \end{vmatrix}, \qquad (4.15)$$

столбец $(b_{12}; b_{22}; \dots; b_{62})^*$ определен формулой (4.7).

Разложив по столбцам определитель Δ_{311} из (4.15), перегруппируем получившиеся слагаемые:

$$\Delta_{311} = e^{a\omega_1 s x_2} e^{-a\omega_1 s x_2}\left[\Delta_{00} + \frac{\Delta_{311,5}}{s^5} + \frac{\Delta_{311,6}}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right], \tag{4.16}$$

$$\Delta_{311,5} = \omega_1 A_5(x_2)\Delta_{00} + (\omega_2+\omega_3+\dots+\omega_6)B_5(x_2) \overset{(3.14)}{=} \Delta_{00}\omega_1 A_5(x_2); \tag{4.17}$$

$$\Delta_{311,6} = [A_6^0(x_2)\cdot 1\cdot\delta_{11} - A_6^1(x_2)\omega_1\delta_{21} + A_6^2(x_2)\omega_1^2\delta_{31} - \dots - A_6^5(x_2)\omega_1^5\delta_{61}] +$$
$$+B_6^0(x_2)[-1\cdot\delta_{12} + 1\cdot\delta_{13} - \dots - 1\cdot\delta_{16}] + B_6^1(x_2)[\omega_2\delta_{22} - \omega_3\delta_{23} + \dots + \omega_6\delta_{26}] +$$
$$+B_6^2(x_2)[-\omega_2^2\delta_{32} + \omega_3^2\delta_{33} - \dots - \omega_6^2\delta_{36}] + \dots + B_6^5(x_2)[\omega_2^5\delta_{62} - \omega_3^5\delta_{63} + \dots + \omega_6^5\delta_{66}] \overset{(4.9)}{=}$$
$$= \frac{\Delta_{00}}{6}\sum_{k=0}^{5} A_6^k(x_2) + \frac{\Delta_{00}}{6}\cdot 5\cdot\sum_{k=0}^{5} B_6^k(x_2) \overset{(3.10),(3.16)}{=} \frac{\Delta_{00}}{6}[D_6 + 5E_6]. \tag{4.18}$$

Определители Δ_{31k} $(k = 2, 3, \dots, 6)$ из (4.14) получим из определителя из Δ_{311} из (4.15) (после выноса из первого множителя $e^{a\omega_k s x_2}$) заменой первого столбца на столбец

$$\Bigg(1\cdot\left[1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2)}{s^6} + \dots\right];$$
$$\omega_k\left[1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2)}{s^6} + \dots\right]; \dots; \omega_k^5\left[1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2)}{s^6} + \dots\right]\Bigg)^*. \tag{4.19}$$

Вычтем в определителе Δ_{31k} $(k = 2, 3, \dots, 6)$, полученном с помощью формул (4.15) и (4.19), из первого столбца k-ый столбец; получим, учитывая, что $B_5(x_2) \overset{(3.14)}{=} 0$:

$$\Delta_{31k} = e^{a\omega_k s x_2}(e^{a\omega_2 s x_2} e^{a\omega_3 s x_2}(\dots) e^{a\omega_6 s x_2}) \times$$
$$\times\begin{vmatrix} 1\cdot\left[0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2) - B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots\right] & b_{12} & \dots & 1\cdot\left[1 + \frac{B_5^0(x_2)}{s^6} + \dots\right] \\ \omega_k\left[0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2) - B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots\right] & b_{22} & \dots & \omega_6\left[1 + \frac{B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^5\left[0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2) - B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots\right] & b_{62} & \dots & \omega_6^5\left[1 + \frac{B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots\right] \end{vmatrix}, \tag{4.20}$$

$$k = 2, 3, \dots, 6.$$

столбец $(b_{12}; b_{22}; \dots; b_{62})^*$ определен формулой (4.7).

Разложив определитель Δ_{31k} $(k = 2, 3, \dots, 6)$ из (4.20) по первому столбцу, получим

$$\Delta_{31k} = e^{a\omega_k s x_2} e^{-a\omega_1 s x_2}\left[0 + \frac{\Delta_{31k,5}}{s^5} + \frac{\Delta_{31k,6}}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right], \tag{4.21}$$
$$k = 2, 3, \dots, 6;$$

$$\Delta_{31k,5} = \omega_k A_5(x_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k & \omega_2 & \dots & \omega_6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^5 & \omega_2^5 & \dots & \omega_6^5 \end{vmatrix} = \omega_k A_5(x_2)\cdot 0 = 0, \tag{4.22}$$
$$k = 2, 3, \dots, 6,$$

т. к. у определителя из (4.22) при $k = 2, 3, \ldots, 6$ обязательно есть два совпадающих столбца (первый и k-ый),

$$\Delta_{31k,6} = (A_6^0(x_2) - B_6^0(x_2)) \cdot 1 \cdot \delta_{11} - (A_6^1(x_2) - B_6^1(x_2))\omega_k \delta_{21} +$$
$$+(A_6^2(x_2) - B_6^2(x_2))\omega_k^2 \delta_{31} - \cdots - (A_6^5(x_2) - B_6^5(x_2))\omega_k^5 \delta_{61} \overset{(4.9)}{=}$$
$$= \frac{\Delta_{00}}{6} \left\{ (A_6^0(x_2) - B_6^0(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^0 + (A_6^1(x_2) - B_6^1(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^1 + \right.$$
$$\left. +(A_6^2(x_2) - B_6^2(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + (A_6^5(x_2) - B_6^5(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5 \right\}. \tag{4.23}$$

Применив формулы (3.9) и (3.15), из (4.23) найдем:

$$\Delta_{31k,6} = \frac{\Delta_{00}}{6} \frac{1}{12a^6} \left\{ -5q_2(x_{1n}) \left[1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5 \right] + \right.$$
$$\left. +5q_3(x_2)[1 + \omega_5 + \omega_k^2 + \cdots + \omega_k^5] - \Delta\widetilde{q}(x_2) G_k \right\}, \tag{4.24}$$

$$G_k = 5\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^0 + 3\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^3 - 3\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^4 - 5\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5, \tag{4.25}$$
$$k = 2, 3, \ldots, 6.$$

При этом

$$1 + \frac{\omega_k}{\omega_1} + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5 = 1 + \omega_k + \omega_k^2 + \cdots + \omega_k^5 = \frac{1 - \omega_k^6}{1 - \omega_k} = \frac{1 - 1}{1 - \omega_k} = 0$$

как сумма первых шести членов геометрической прогрессии ($b_1 = 1$, $q = \frac{\omega_k}{\omega_1}$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_6 = \dfrac{b_1(1 - q^6)}{1 - q \neq 0}$); при этом из формулы (3.1) следует, что

$$G_2 \overset{(4.25)}{=} 5 + 3\omega_2 + \omega_2^2 - \omega_2^3 - 3\omega_2^4 - 5\omega_2^5 = 5 + 3\omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - 3\omega_5 - 5\omega_6 = 6 + 6\sqrt{3}i;$$
$$G_3 = 6 + 2\sqrt{3}i; \quad G_4 = 6; \quad G_5 = \bar{G}_3 = 6 - 2\sqrt{3}i; \quad G_6 = \bar{G}_2 = 6 - 6\sqrt{3}i. \tag{4.26}$$

В формуле (4.24) введено обозначение

$$\Delta\widetilde{q}(x_2) = q_3(x_2 + 0) - q_2(x_2 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_2 \\ x > x_2}} q_3(x) - \lim_{\substack{x \to x_2 \\ x < x_2}} q_2(x), \tag{4.27}$$

где $\Delta\widetilde{q}(x_2)$ — «скачок» потенциала $\vec{Q}(x)$ в точке разрыва x_2.

В результате из формул (4.21)–(4.27) следует, что

$$\Delta_{31k} = e^{a\omega_k s x_2} e^{-a\omega_1 s x_2} \Delta_{00} \left[0 + \frac{0}{s^5} - \frac{G_k \Delta\widetilde{q}(x_2)}{6 \cdot 12a^6 s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right], \quad k = 2, 3, \ldots, 6. \tag{4.28}$$

Определитель Δ_{322} из (4.14) получается из определителя $\Delta_{03}(s)$ из (4.7) заменой второго столбца на столбец (4.19) при $k = 2$. Значит, у определителя Δ_{322} и определителя Δ_{311} из (4.15) отличаются только первые два столбца: первый столбец определителя Δ_{322} — это первый столбец определителя $\Delta_{03}(s)$, второй столбец определителя

Δ_{322} — столбец (4.19) при $k=2$, третий, четвертый, пятый и шестой столбцы определителей $\Delta_{311}, \Delta_{03}(s)$ и Δ_{322} совпадают. Аналогично вычислению определителя Δ_{311} из (4.15)–(4.18) для определителя Δ_{322} выведем:

$$\Delta_{322} = e^{a\omega_2 sx_2} e^{-a\omega_2 sx_2}\left[\Delta_{00} + \frac{\Delta_{322,5}}{s^5} + \frac{\Delta_{322,6}}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right], \tag{4.29}$$

$$\Delta_{322,5} = \omega_2 A_5(x_2)\Delta_{00} + (\omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6)B_5(x_2)\Delta_{00} = \Delta_{00}\omega_2 A_5(x_2), \tag{4.30}$$

$$\Delta_{322,6} = \frac{\Delta_{00}}{6}[D_6 + 5E_6] \overset{(4.18)}{=} \Delta_{311,6}. \tag{4.31}$$

Определители Δ_{32k} $(k=1,3,4,5,6)$ из (4.14) получаются из определителя Δ_{322} (после выноса из второго столбца множителя $e^{a\omega_k sx_2}$) заменой второго столбца на столбец (4.19).

Вычитая в определителе Δ_{32k} $(k=1,3,4,5,6)$ из второго столбца k-ый столбец $(k \neq 2)$, учтем, что $B_5(x_2)=0$; получим:

$$\Delta_{32k} = e^{a\omega_k sx_2}(e^{a\omega_1 sx_2} e^{a\omega_3 sx_2}(\dots)e^{a\omega_6 sx_2})\times$$
$$\times\begin{vmatrix} 1\cdot\left[1+\dfrac{B_6^0(x_2)}{s^6}+\dots\right] & a_{12} & 1\cdot\left[1+\dfrac{B_6^0(x_2)}{s^6}+\dots\right] & \dots & 1\cdot\left[1+\dfrac{B_6^0(x_2)}{s^6}+\dots\right] \\ \omega_1\left[1+\dfrac{B_6^1(x_2)}{s^6}+\dots\right] & a_{22} & \omega_3\left[1+\dfrac{B_6^1(x_2)}{s^6}+\dots\right] & \dots & \omega_6\left[1+\dfrac{B_6^1(x_2)}{s^6}+\dots\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^5\left[1+\dfrac{B_6^5(x_2)}{s^6}+\dots\right] & a_{62} & \omega_3^5\left[1+\dfrac{B_6^5(x_2)}{s^6}+\dots\right] & \dots & \omega_6^5\left[1+\dfrac{B_6^5(x_2)}{s^6}+\dots\right] \end{vmatrix}, \tag{4.32}$$

при этом

$$(a_{12}; a_{22}; \dots; a_{62})^* = \left(1\cdot\left[0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2)-B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots\right];\right.$$
$$\omega_k\left[0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2)-B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots\right]; \dots;$$
$$\left.\omega_k^5\left[0 + \frac{\omega_k B_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2)-B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots\right]\right)^*.$$

Разложим определитель Δ_{32k} из (4.32) по второму столбцу на сумму определителей:

$$\Delta_{32k} = e^{a\omega_k sx_2} e^{-a\omega_2 sx_2}\left[0 + \frac{0}{s^5} + \frac{\Delta_{32k,6}}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right], \quad k=1,3,4,5,6, \tag{4.33}$$

при этом аналогично выводу формул (4.21)–(4.28) найдем

$$\Delta_{32k,6} = \frac{\Delta_{00}}{6}\frac{1}{12a^6}\left\{5[q_3(x_2)-q_2(x_{1n})]\left[1+\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2 + \dots +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^5\right] - \Delta\widetilde{q}(x_2)H_k\right\}, \quad k=1,3,4,5,6; \quad k\neq 2; \tag{4.34}$$

$$H_k = 5\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^0 + 3\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^3 - 3\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^4 - 5\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^5, \quad k=1,3,4,5,6. \tag{4.35}$$

При этом из формул (3.1)–(3.2) следует, что

$$1+\frac{\omega_k}{\omega_2}+\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2+\dots+\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^5=0;\quad H_k=G_{k-1}=H_{k+6},\quad H_1=G_6,\quad k=1,3,4,5,6. \tag{4.36}$$

Аналогичным образом вычисляются определители Δ_{3mk} ($m=3,4,5,6$; $k=1,2,\dots,6$) из (4.14). Формулу (4.14) удобно записывать в матричном виде:

$$\vec{C}_{3m}=\frac{1}{\Delta_{03}(s)}T_3\vec{C}_{2k};\quad \vec{C}_{3m}=(C_{31},C_{32},\dots,C_{36})^*,\quad \vec{C}_{2k}=(C_{21},C_{22},\dots,C_{26})^*, \tag{4.37}$$

при этом матрица

$$T_3=(\Delta_{3mk})=\begin{pmatrix}\Delta_{311} & \Delta_{312} & \dots & \Delta_{316}\\ \Delta_{321} & \Delta_{322} & \dots & \Delta_{326}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \Delta_{361} & \Delta_{362} & \dots & \Delta_{366}\end{pmatrix}$$

в силу формул (4.15)–(4.35) выписывается в следующем виде:

$$\Delta_{3kk}=e^{a\omega_k sx_2}e^{-a\omega_k sx_2}\Delta_{00}\left[1+\frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5}+\frac{F_6}{s^6}+\dots\right],\quad k=1,2,\dots,6;$$
$$\Delta_{3km}=e^{a\omega_m sx_2}e^{-a\omega_k sx_2}\Delta_{00}\left[0+\frac{0}{s^5}-\frac{P_{7+m+k}}{s^6}+\dots\right],$$
$$k\neq m;\quad k,m=1,2,\dots,6;\quad P_{k\pm6}=P_k; \tag{4.38}$$

при этом в формуле (4.38) введены следующие обозначения:

$$F_6=\frac{D_6+5E_6}{6},\quad D_6\overset{(3.10)}{=}-\frac{5q_2(x_{1n})}{2a^6},\quad E_6=-\frac{5q_3(x_2)}{2a^6};$$
$$P_k=\frac{G_k\Delta\widetilde{q}(x_2)}{6\cdot 12a^6},\quad k=2,3,\dots,6;\quad \Delta\widetilde{q}(x_2)=q_3(x_2+0)-q_2(x_2-0). \tag{4.39}$$

5. Изучение условий «склейки» (1.10)

Из условий «склейки» (1.10) в точке разрыва x_{1n} с помощью формул (3.3)–(3.5) имеем

$$y_2(x_{1n}+0,s)\overset{(1.10)}{=}y_1(x_{1n}-0,s)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{6}C_{2k}y_{2k}(x_{1n}+0,s)=\sum_{k=1}^{6}C_{1k}y_{1k}(x_{1n}-0,s); \tag{5.1}$$

$$\frac{y_2^{(m)}(x_{1n}+0,s)}{(as)^m}\overset{(1.10)}{=}\frac{y_1^{(m)}(x_{1n}-0,s)}{(as)^m}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{6}C_{2k}\frac{y_{2k}^{(m)}(x_{1n}+0,s)}{(as)^m}=\sum_{k=1}^{6}C_{1k}\frac{y_{1k}^{(m)}(x_{1n}-0,s)}{(as)^m},$$
$$m=1,2,\dots,5. \tag{5.2}$$

Аналогично решению системы (4.1)–(4.2) из метода Крамера следует, что система (5.1), (5.2) имеет единственное решение:

$$C_{21}=\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(s)\neq 0};\quad C_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(s)};\dots;C_{26}=\frac{\Delta_{26}}{\Delta_{02}(s)}, \tag{5.3}$$

где $\Delta_{02}(s)$ — определитель Вронского фундаментальной системы $\{y_{21}(x,s);$ $y_{22}(x,s);\ldots;y_{26}(x,s)\}$ дифференциального уравнения (1.2)

$$\Delta_{02}(s)=\Delta_{02}(x,s)=\det \mathrm{Wr}[y_{21}(x,s);y_{22}(x,s);\ldots;y_{26}(x,s)]=$$
$$=\begin{vmatrix} y_{21}(x,s) & y_{22}(x,s) & \ldots & y_{25}(x,s) & y_{26}(x,s)\\ \dfrac{y'_{21}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x,s)}{as} & \ldots & \dfrac{y'_{25}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{26}(x,s)}{as}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{y^{(5)}_{21}(x,s)}{(as)^5} & \dfrac{y^{(5)}_{22}(x,s)}{(as)^5} & \ldots & \dfrac{y^{(5)}_{25}(x,s)}{(as)^5} & \dfrac{y^{(5)}_{26}(x,s)}{(as)^5}\end{vmatrix}, \tag{5.4}$$

определители Δ_{2n} $(n=1,2,\ldots,6)$ из (5.3) получаются из определителя $\Delta_{02}(s)$ из (5.4) заменой n-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{6}C_{1k}y_{1k}(x_{1n}-0,s);\quad \sum_{k=1}^{6}C_{1k}\frac{y'_{1k}(x_{1n}-0,s)}{as};\ldots;\sum_{k=1}^{6}C_{1k}\frac{y^{(5)}_{1k}(x_{1n}-0,s)}{(as)^5}\right)^{*}. \tag{5.5}$$

Проделав вычисления, аналогичные формулам (4.7)–(4.39), доказывается следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.1 *Для вектор-столбцов $\vec{C}_{2m}=(C_{21},C_{22},\ldots,C_{26})^{*}$ и $\vec{C}_{2k}=(C_{11},$ $C_{12},\ldots,C_{16})^{*}$ из (5.3)–(5.5) справедливо следующее равенство:*

$$\vec{C}_{2m}=\frac{1}{\Delta_{02}(s)\neq 0}T_2\vec{C}_{1k}, \tag{5.6}$$

при этом матрицу

$$T_2=(\Delta_{2mk})=\begin{pmatrix}\Delta_{211} & \Delta_{212} & \ldots & \Delta_{216}\\ \Delta_{221} & \Delta_{222} & \ldots & \Delta_{226}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Delta_{261} & \Delta_{262} & \ldots & \Delta_{266}\end{pmatrix}$$

представим в следующем виде:

$$\Delta_{2kk}=\Delta_{00}e^{a\omega_k sx_{1n}}e^{-a\omega_k sx_{1n}}\left[1+\frac{0}{s^5}+\frac{R_6}{s^6}+\ldots\right],\quad k=1,2,\ldots,6;$$
$$\Delta_{2km}=e^{a\omega_m sx_{1n}}e^{-a\omega_k sx_{1n}}\Delta_{00}\left[0+\frac{0}{s^5}-\frac{U_{7+m-k}}{s^6}+\ldots\right],$$
$$k\neq m;\quad k,m=1,2,\ldots,6;\quad U_{k\pm 6}=U_k; \tag{5.7}$$
$$R_6=\frac{5D_6}{6},\quad D_6=-\frac{5q_2(x_{1n})}{2a^6};\quad U_k=\frac{G_k q_2(x_{1n})}{6\cdot 12a^6},\quad k=2,3,\ldots,6. \tag{5.8}$$

Величины G_k определены формулами (4.25)– (4.26)*, для определителя $\Delta_{02}(s)$ из* (5.4) *справедлива формула*

$$\Delta_{02}(s)=\Delta_{00}\left[1+\frac{0}{s^5}+\frac{D_6}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right]\neq 0. \tag{5.9}$$

6. Изучение условий «склейки» (1.10)

Из условий «склейки» (1.12) в точке разрыва x_{3n} с помощью формул (3.11), (3.17), (3.18) получим следующую систему уравнений:

$$y_4(x_{3n}+0,s) \overset{(1.12)}{=} y_3(x_{3n}-0,s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{4k} y_{4k}(x_{3n}+0,s) = \sum_{k=1}^{6} C_{3k} y_{3k}(x_{3n}-0,s); \quad (6.1)$$

$$\frac{y_4^{(m)}(x_{3n}+0,s)}{(as)^m} \overset{(1.12)}{=} \frac{y_3^{(m)}(x_{3n}-0,s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{4k} \frac{y_{4k}^{(m)}(x_{3n}+0,s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^{6} C_{3k} \frac{y_{3k}^{(m)}(x_{3n}-0,s)}{(as)^m},$$
$$m = 1, 2, \ldots, 5. \quad (6.2)$$

В силу формул (3.17)–(3.18) определитель $\Delta_{04}(s)$ системы (6.1)–(6.2) равен определителю Вронского фундаментальной системы функций $\{y_{41}(x,s); y_{42}(x,s); \ldots; y_{46}(x,s)\}$:

$$\Delta_{04}(s) = \Delta_{04}(x,s) = \det \mathrm{Wr}[y_{41}(x,s); y_{42}(x,s); \ldots; y_{46}(x,s)] =$$
$$= \begin{vmatrix} e^{a\omega_1 sx} & e^{a\omega_2 sx} & \ldots & e^{a\omega_5 sx} & e^{a\omega_6 sx} \\ \omega_1 e^{a\omega_1 sx} & \omega_2 e^{a\omega_2 sx} & \ldots & \omega_5 e^{a\omega_5 sx} & \omega_6 e^{a\omega_6 sx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^5 e^{a\omega_1 sx} & \omega_2^5 e^{a\omega_2 sx} & \ldots & \omega_5^5 e^{a\omega_5 sx} & \omega_6^5 e^{a\omega_6 sx} \end{vmatrix} \overset{(3.2),(4.8)}{=} e^0 \Delta_{00} = \Delta_{00} \neq 0. \quad (6.3)$$

Система (6.1)–(6.2) – система из шести линейных уравнений с шестью неизвестными $C_{41}, C_{42}, \ldots, C_{46}$ (при этом $C_{31}, C_{32}, \ldots, C_{36}$ — параметры), определитель данной системы $\Delta_{04}(s) = \Delta_{00}$ не равен нулю, поэтому решение этой системы единственно и находится по формуле

$$C_{41} = \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{04}(s) \neq 0}; \quad C_{42} = \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{04}(s)}; \ldots; C_{46} = \frac{\Delta_{46}}{\Delta_{04}(s)}, \quad (6.4)$$

определители Δ_{4n} $(n = 1, 2, \ldots, 6)$ получаются из определителя $\Delta_{04}(s)$ из (6.3) заменой n-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{6} C_{3k} y_{3k}(x_{3n}-0,s); \quad \sum_{k=1}^{6} C_{3k} \frac{y'_{3k}(x_{3n}-0,s)}{as}; \ldots; \sum_{k=1}^{6} C_{3k} \frac{y_{3k}^{(5)}(x_{3n}-0,s)}{(as)^5} \right)^*. \quad (6.5)$$

Аналогично выводу формул (5.6)–(5.9) и (4.7)–(4.39) доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 6.1 *Для вектор-столбцов* $\vec{C}_{4m} = (C_{41}, C_{42}, \ldots, C_{46})^*$ *и* $\vec{C}_{3k} = (C_{31}, C_{32}, \ldots, C_{36})^*$ *из* (6.4)–(6.5) *справедливо равенство*

$$\vec{C}_{4m} = \frac{1}{\Delta_{04} \neq 0} T_4 \vec{C}_{3k}, \quad (6.6)$$

при этом матрица

$$T_4 = (\Delta_{4mk}) = \begin{pmatrix} \Delta_{411} & \Delta_{412} & \ldots & \Delta_{416} \\ \Delta_{421} & \Delta_{422} & \ldots & \Delta_{426} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{461} & \Delta_{462} & \ldots & \Delta_{466} \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$\Delta_{4kk} = \Delta_{00} e^{a\omega_k s x_{3n}} e^{-a\omega_k s x_{3n}} \left[1 + \frac{\omega_k B_5(x_{3n})}{s^5} + \frac{E_6}{6s^6} + \ldots \right], \quad k = 1, 2, \ldots, 6;$$

$$\Delta_{4km} = \Delta_{00} e^{a\omega_m s x_{3n}} e^{-a\omega_k s x_{3n}} \left[0 + \frac{0}{s^5} + \frac{\Phi_{7+m-k}}{s^6} + \ldots \right],$$

$$k \neq m; \quad k, m = 1, 2, \ldots, 6; \quad \Phi_{k\pm 6} = \Phi_k; \tag{6.7}$$

$$E_6 = -\frac{5q_3(x_2)}{2a^6}; \quad \Phi_k = \frac{-G_k q_3(x_{3n})}{72a^6}, \quad k = 2, 3, \ldots, 6. \tag{6.8}$$

7. Изучение граничных условий (1.5)

Применив формулы (3.3)–(3.4), из первых трех граничных условий (1.5) получим:

$$\frac{y_1^{(2m)}(0,s)}{(as)^{2m}} \overset{(1.5)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(2m)}(0,s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{1k} \omega_k^{2m} e^0 = 0, \quad m = 0, 1, 2. \tag{7.1}$$

Из граничных условий (1.5) в точке $x = \pi$ с помощью формул (3.17)–(3.18) найдем:

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi,s)}{(as)^{2m}} \overset{(1.5)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{4k} \frac{y_{4k}^{(m)}(\pi,s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{4k} \omega_k^{2m} e^{a\omega_s \pi} = 0, \quad m = 0, 1, 2. \tag{7.2}$$

Применив формулы (6.4)–(6.8), из (7.2) запишем:

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi,s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{4k} \omega_k^{2m} e^{a\omega_k s\pi} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} \frac{\Delta_{4k}}{\Delta_{04}(s) \neq 0} \omega_k^{2m} e^{a\omega_k s\pi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} \left(\sum_{n=1}^{6} \Delta_{4kn} C_{3n} \right) \omega_k^{2m} e^{a\omega_k s\pi} \Delta_{00} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{3k} \psi_{3k,m}(\pi,s) = 0, \tag{7.3}$$

$$m = 0, 1, 2;$$

$$\psi_{3k,m}(\pi,s) = \sum_{n=1}^{6} \Delta_{4nk} \omega_n^{2m} e^{a\omega_n s\pi}, \quad m = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots, 6. \tag{7.4}$$

Подставив формулы (5.3)–(5.9) в (7.3)–(7.4) и сделав необходимые преобразования, получим:

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi,s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{3k} \psi_{3k,m}(\pi,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_{03}(s) \neq 0} \psi_{3k,m}(\pi,s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} \left(\sum_{n=1}^{6} \Delta_{3kn} C_{2n} \right) \psi_{3k,m}(\pi,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_{2k} \varphi_{2k,m}(\pi,s) = 0, \quad m = 0, 1, 2; \tag{7.5}$$

$$\varphi_{2k,m}(\pi,s) = \sum_{n=1}^{6} \Delta_{3nk} \psi_{3n,m}(\pi,s), \quad m = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots, 6. \tag{7.6}$$

Подставив в (7.5)–(7.6) формулы (5.3)–(5.9), выведем

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi,s)}{(as)^{2m}}=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{6}C_{2k}\varphi_{2k,m}(\pi,s)=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{6}\frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s)\neq 0}\varphi_{2k,m}(\pi,s)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{6}\left(\sum_{n=1}^{6}\Delta_{2kn}C_{1n}\right)\varphi_{2k,m}(\pi,s)=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{6}C_{1k}h_{1k,m}(\pi,s)=0,\quad m=0,1,2; \tag{7.7}$$

$$h_{1k,m}(\pi,s)=\sum_{n=1}^{6}\Delta_{2nk}\varphi_{2n,m}(\pi,s),\quad m=0,1,2;\quad k=1,2,\ldots,6. \tag{7.8}$$

Объединив граничные условия (1.5) из (7.1) и (7.7)–(7.8) в одну систему, получим однородную систему из шести уравнений с шестью неизвестными $C_{11},C_{12},\ldots,C_{16}$, которая имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1 *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1.1)–(1.8) *имеет следующий вид:*

$$f(s)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_5^2 & \omega_6^6\\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \ldots & \omega_5^4 & \omega_6^4\\ h_{11,0}(\pi,s) & h_{12,0}(\pi,s) & \ldots & h_{15,0}(\pi,s) & h_{16,0}(\pi,s)\\ h_{11,1}(\pi,s) & h_{12,1}(\pi,s) & \ldots & h_{15,1}(\pi,s) & h_{16,1}(\pi,s)\\ h_{11,2}(\pi,s) & h_{12,2}(\pi,s) & \ldots & h_{15,2}(\pi,s) & h_{16,2}(\pi,s)\end{vmatrix}=0. \tag{7.9}$$

Подставив формулы (7.6) в (7.8), применив формулы (5.7) и (4.38), оставим только главные по росту s величины; произведя вычисления с точностью до $\underline{O}\left(\frac{1}{s^6}\right)$, из (7.9) получим следующие асимптотические формулы для $h_{1k,m}(\pi,s)$:

$$h_{1k,m}(\pi,s)=\sum_{k=1}^{6}\Delta_{2nk}\varphi_{2n,m}(\pi,s)=\sum_{k=1}^{6}\Delta_{2nk}\left(\sum_{p=1}^{6}\Delta_{3pn}\psi_{3p,m}(\pi,s)\right)=$$

$$=\Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\psi_{3k,m}(\pi,s)+\Delta_{2kk}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}\Delta_{3pk}\psi_{3p,m}(\pi,s)+\Delta_{3kk}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}\Delta_{2pk}\psi_{3p,m}(\pi,s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{12}}\right),$$

$$k=1,2,\ldots,6;\quad m=0,1,2. \tag{7.10}$$

Аналогично, подставив в (7.10) величины $\psi_{3p,m}(\pi,s)$ из (7.4), выведем следующие формулы:

$$h_{1k,m}(\pi,s)=\Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\Delta_{4kk}\omega_k^m e^{a\omega_k s\pi}+\Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}\Delta_{4pk}\omega_p^m e^{a\omega_p s\pi}+$$

$$+\Delta_{2kk}\Delta_{4kk}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}\Delta_{3pk}\omega_p^m e^{a\omega_p s\pi}+\Delta_{3kk}\Delta_{4kk}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}\Delta_{2pk}\omega_p^m e^{a\omega_p s\pi}+$$

$$+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{12}}\right),\quad k=1,2,\ldots,6;\quad m=0,1,2. \tag{7.11}$$

В формуле (7.11) первое слагаемое представляет собой величину порядка $\underline{O}(1)$, второе, третье и четвертое – величины порядка $\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^6}\right)$.

Определитель $f(s)$ из уравнения (7.9) по теореме Лапласа разложим по последним трем строкам на сумму определителей, в результате чего получим

$$f(s)=\begin{vmatrix} h_{11,0} & h_{12,0} & h_{13,0}\\ h_{11,1} & h_{12,1} & h_{13,1}\\ h_{11,2} & h_{12,2} & h_{13,2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \omega_4^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2\\ \omega_4^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} h_{12,0} & h_{13,0} & h_{14,0}\\ h_{12,1} & h_{13,1} & h_{14,1}\\ h_{12,2} & h_{13,2} & h_{14,2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2\\ \omega_1^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4\end{vmatrix}+$$
$$+\begin{vmatrix} h_{13,0} & h_{14,0} & h_{15,0}\\ h_{13,1} & h_{14,1} & h_{15,1}\\ h_{13,2} & h_{14,2} & h_{15,2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_6^2\\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_6^4\end{vmatrix}-\dots=0. \qquad (7.12)$$

При этом

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \omega_4^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_4^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}=(\omega_3^2-\omega_2^2)(\omega_3^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-\omega_1^2)=\Phi_{30}\neq 0. \qquad (7.13)$$

Для нахождения корней уравнения (7.12) необходимо изучить индикаторную диаграмму [24, с. 12] этого уравнения, т. е. в силу (7.11) требуется изучить выпуклую оболочку множества точек $\{\omega_k+\omega_m+\omega_n,\ k\neq m,\ k\neq n,\ m\neq n,\ k,m,n=1,2,\dots,6\}$.

Индикаторная диаграмма уравнения (7.12) имеет следующий вид:

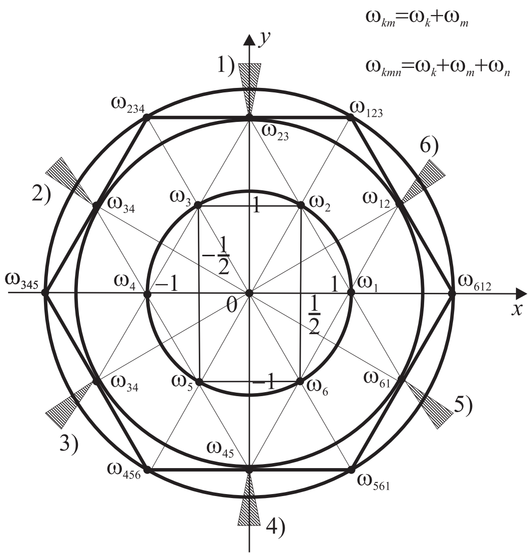

Рис. 7.1. Индикаторная диаграмма уравнения (7.12)

На представленной на рисунке диаграмме видно, что на асимптотику корней уравнения (7.12)–(7.13) влияют только экспоненты с показателями $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_2+\omega_3+\omega_4$, $\omega_3+\omega_4+\omega_5$, $\omega_4+\omega_5+\omega_6$ $\omega_5+\omega_6+\omega_1$ и $\omega_6+\omega_1+\omega_2$, индикаторная диаграмма — правильный шестиугольник, показатели $\omega_1+\omega_3+\omega_4$, $\omega_1+\omega_2+\omega_4,\dots,$ $\omega_m+\omega_k+\omega_p$ при условии $|m-k|\geqslant 2$, $|m-p|\geqslant 2$, $|k-p|\geqslant 2$ попадают внутрь индикаторной диаграммы и на асимптотику корней уравнения не влияют, их можно отбросить; корни уравнения

$f(s)$ из (7.12) находятся в шести секторах бесконечно малого раствора, биссектрисами которых являются серединные перпендикуляры к отрезкам $[\omega_1+\omega_2+\omega_3;\omega_2+\omega_3+\omega_4]$, $[\omega_2+\omega_3+\omega_4;\omega_3+\omega_4+\omega_5],\ldots,[\omega_6+\omega_1+\omega_2;\omega_1+\omega_2+\omega_3]$.

8. Асимптотика собственных значений в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 7.1

Чтобы найти асимптотику корней уравнения (7.12) в секторе 1), в данном уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ и $\omega_2+\omega_3+\omega_4$. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 8.1 *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1.1)–(1.8) *в секторе* 1) *имеет следующий вид:*

$$g_1(s)=\begin{vmatrix}h_{11,0}&h_{12,0}&h_{13,0}\\h_{11,1}&h_{12,1}&h_{13,1}\\h_{11,2}&h_{12,2}&h_{13,2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_4^2&\omega_5^2&\omega_6^2\\\omega_4^4&\omega_5^4&\omega_6^4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}h_{12,0}&h_{13,0}&h_{14,0}\\h_{12,1}&h_{13,1}&h_{14,1}\\h_{12,2}&h_{13,2}&h_{14,2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_1^2&\omega_5^2&\omega_6^2\\\omega_1^4&\omega_5^4&\omega_6^4\end{vmatrix}=0, \tag{8.1}$$

где величины $h_{1k,m}(\pi,s)$ определены формулой (7.11).

Аналогично формуле (7.13) из (3.1) получим:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_4^2&\omega_5^2&\omega_6^2\\\omega_4^4&\omega_5^4&\omega_6^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_1^2&\omega_5^2&\omega_6^2\\\omega_1^4&\omega_5^4&\omega_6^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_1^2&\omega_2^2&\omega_3^2\\\omega_1^4&\omega_2^4&\omega_3^4\end{vmatrix}=\Phi_{30}\neq 0,$$

поэтому уравнение (8.1) разделим на $\Phi_{30}\neq 0$, применим свойства определителей, перепишем его в виде

$$\begin{vmatrix}h_{11,0}(\pi,s)-h_{14,0}(\pi,s)&h_{12,0}(\pi,s)&h_{13,0}(\pi,s)\\h_{11,1}(\pi,s)-h_{14,1}(\pi,s)&h_{12,1}(\pi,s)&h_{13,1}(\pi,s)\\h_{11,2}(\pi,s)-h_{14,2}(\pi,s)&h_{12,2}(\pi,s)&h_{13,2}(\pi,s)\end{vmatrix}=0, \tag{8.2}$$

где величины $h_{1k,m}(\pi,s)$ определены формулами (7.11), (6.7), (5.7) и (4.38). При этом необходимо оставить в уравнении только экспоненты с показателями $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ и $\omega_2+\omega_3+\omega_4$. Применив формулы (4.8), (5.7), (6.7), (7.11), получим:

$$\Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\Delta_{4kk}=\left[1+\frac{\omega_kA_5(x_2)}{s^5}+\frac{F_6}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right]\left[1+\frac{R_6}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right]\times$$
$$\times\left[1+\frac{\omega_kB_5(x_{3n})}{s^5}+\frac{E_6}{6s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right]=1+\frac{\omega_kW_5}{s^5}+\frac{W_6}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right);$$
$$W_5=A_5(x_2)+B_5(x_{3n});$$
$$W_6=F_6+R_6+\frac{E_6}{6}=\frac{D_8+5E_6}{6}+\frac{5D_6}{6}+\frac{E_6}{6}=D_6+E_6,\quad k=1,2,\ldots,6. \tag{8.3}$$
$$h_{1k,m}(\pi,s)=\left[1+\frac{\omega_kW_5}{s^5}+\frac{W_6}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)\right]\omega_k^{2m}e^{a\omega_ks\pi}+\frac{T_{k6,m}}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right),$$
$$T_{k6,m}=T_{k6,m,3}-T_{k6,m,1}-T_{k6,m,2};$$
$$T_{k6,m,3}=\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}\Phi_{7+k-p}e^{a(\omega_k-\omega_p)sx_{3n}}\omega_p^{2m}e^{a\omega_ps\pi};\quad\Phi_{k+6}=\Phi_k,\quad k=1,2,\ldots,6;$$

$$T_{k6,m,2}=\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}U_{7+k-p}e^{a(\omega_k-\omega_p)sx_{1n}}\omega_p^{2m}e^{a\omega_p s\pi};$$

$$T_{k6,m,1}=\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{6}P_{7+k-p}e^{a(\omega_k-\omega_p)sx_2}\omega_p^{2m}e^{a\omega_p s\pi};$$

$$U_{k+6}=U_k,\quad P_{k+6}=P_k,\quad k=1,2,\ldots,6;\quad m=0,1,2. \tag{8.4}$$

Подставив формулы (8.3)–(8.4) в уравнение (8.2), разложим определитель $g_1(s)$ по столбцам на сумму определителей:

$$g_1(s)=g_{1,0}(s)+\frac{g_{1,5}(s)}{s^5}+\frac{g_{1,6,1}(s)}{s^6}+\frac{g_{1,6,2}(s)}{s^6}\underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right)=0, \tag{8.5}$$

$$g_{1,0}(s)=e^{a\omega_1 s\pi}\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_1^2&\omega_2^2&\omega_3^2\\\omega_1^4&\omega_2^4&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}-e^{a\omega_4 s\pi}\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_4^2&\omega_2^2&\omega_3^2\\\omega_4^4&\omega_2^4&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}, \tag{8.6}$$

при этом входящие в данное выражение определители равны Φ_{30} по формуле (7.13):

$$g_{1,5}(s)=\omega_1W_5e^{a\omega_1 s\pi}\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_1^2&\omega_2^2&\omega_3^2\\\omega_1^4&\omega_2^4&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}- \tag{8.7}$$

$$-\omega_4W_5e^{a\omega_4 s\pi}\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega_4^2&\omega_2^2&\omega_3^2\\\omega_4^4&\omega_2^4&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}+$$

$$+\omega_2W_5e^{a\omega_2 s\pi}\Phi_{30}e^{a\omega_1 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}-\omega_2W_5e^{a\omega_2 s\pi}\Phi_{30}e^{a\omega_4 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}+ \tag{8.8}$$

$$+\omega_3W_5e^{a\omega_3 s\pi}\Phi_{30}e^{a\omega_1 s\pi}e^{a\omega_2 s\pi}--\omega_3W_5e^{a\omega_3 s\pi}\Phi_{30}e^{a\omega_4 s\pi}e^{a\omega_2 s\pi};$$

$$g_{1,6,1}(s)=W_6\Phi_{30}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}[e^{a\omega_1 s\pi}-e^{a\omega_4 s\pi}]+W_6\Phi_{30}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}[e^{a\omega_1 s\pi}-e^{a\omega_4 s\pi}]+$$

$$+W_6e^{a\omega_3 s\pi}\Phi_{30}e^{a\omega_1 s\pi}e^{a\omega_2 s\pi}-W_6e^{a\omega_3 s\pi}\Phi_{30}e^{a\omega_4 s\pi}e^{a\omega_2 s\pi}. \tag{8.9}$$

$$g_{1,6,2}(s)=\begin{vmatrix}T_{16,0}&1&1\\T_{16,1}&\omega_2^2&\omega_3^2\\T_{16,2}&\omega_2^4&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}-\begin{vmatrix}T_{46,0}&1&1\\T_{46,1}&\omega_2^2&\omega_3^2\\T_{46,2}&\omega_2^4&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_2 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}+$$

$$+\begin{vmatrix}1&T_{26,0}&1\\\omega_1^2&T_{26,1}&\omega_3^2\\\omega_1^4&T_{26,2}&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_1 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}-\begin{vmatrix}1&T_{26,0}&1\\\omega_4^2&T_{26,1}&\omega_3^2\\\omega_4^4&T_{26,2}&\omega_3^4\end{vmatrix}e^{a\omega_4 s\pi}e^{a\omega_3 s\pi}+$$

$$+\begin{vmatrix}1&1&T_{36,0}\\\omega_1^2&\omega_2^2&T_{36,1}\\\omega_1^4&\omega_2^4&T_{36,2}\end{vmatrix}e^{a\omega_1 s\pi}e^{a\omega_2 s\pi}-\begin{vmatrix}1&1&T_{36,0}\\\omega_4^2&\omega_2^2&T_{36,1}\\\omega_4^4&\omega_2^4&T_{36,2}\end{vmatrix}e^{a\omega_4 s\pi}e^{a\omega_2 s\pi}. \tag{8.10}$$

Разделим уравнения (8.5)–(8.10) на $\Phi_{30}e^{a(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi}\neq 0$, сделаем необходимые преобразования, приведем его к виду

$$g_1(s) = [e^{a(\omega_1-\omega_4)s\pi} - 1] + \frac{W_5}{s^5}[(\omega_1+\omega_2+\omega_3)e^{a(\omega_1-\omega_4)s\pi} - (\omega_2+\omega_3+\omega_4)]+$$

$$+\frac{3W_6}{s^6}[e^{a(\omega_1-\omega_4)s\pi} - 1] - \frac{g_{1,6,2}(s)e^{-a(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi}}{\Phi_{30}s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) = 0, \qquad (8.11)$$

$$g_{1,6,2}(s) = e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3)s\pi}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_4^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix}[\Phi_4 e^{-a(\omega_1-\omega_4)sx_{3n}} - \qquad (8.12)$$

$$-P_4 e^{-a(\omega_1-\omega_4)sx_2} - U_4 e^{-a(\omega_1-\omega_4)sx_{1n}}]-$$

$$-e^{a(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix}[\Phi_4 e^{a(\omega_1-\omega_4)sx_{3n}} - P_4 e^{a(\omega_1-\omega_4)sx_2} - U_4 e^{a(\omega_1-\omega_4)sx_{1n}}];$$

$$\Phi_4 \overset{(6.8)}{=} -\frac{G_4 q_3(x_{3n})}{72a^6}; \quad G_4 \overset{(4.26)}{=} 6; \quad P_4 \overset{(4.39)}{=} \frac{G_4\Delta\widetilde{q}(x_2)}{72a^6}; \quad U_4 \overset{(5.8)}{=} \frac{G_4 q_2(x_{1n})}{72a^6}. \qquad (8.13)$$

Основное приближение уравнения (8.11), (8.13) имеет вид

$$e^{a(\omega_1-\omega_4)s\pi} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{a(\omega_1-\omega_4)s\pi} = 1 = e^{2\pi ik} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2ik}{a(\omega_1-\omega_4)}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Вид асимптотики корней уравнения (8.11), (8.13) следует из общей теории нахождения корней квазимногочленов вида (8.11), (8.13) [24, с. 12], [25]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.2 *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1.1)–(1.8) *в секторе* 1) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2i}{a(\omega_1-\omega_4)}\left[k + \frac{d_{5k,1}}{k^5} + \frac{d_{6k,1}}{k^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)\right], \qquad (8.14)$$
$$\omega_1 = 1, \quad \omega_4 = -1, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Применив формулу Маклорена и подставив $s_{k,1}$ из (8.14) в уравнение (8.11), (8.13), получим

$$\left[1 + \frac{2\pi i d_{5k,1}}{k^5} + \frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)\right] - 1+$$

$$+\frac{W_5}{k^5}\frac{a^5(\omega_1-\omega_4)^5}{2^5 i^5}\left[(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right)\right) - (\omega_2+\omega_3+\omega_4)\right]+$$

$$+\frac{3W_6}{k^6}\frac{a^6(\omega_1-\omega_4)^6}{2^6 i^6}\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) - 1\right]-$$

$$-\frac{a^6(\omega_1-\omega_4)^6}{\Phi_3 k^6}\frac{g_{1,6,2}(s)}{2^6 i^6}\bigg|_{s_{k,1}} e^{-a(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi}\bigg|_{s_{k,1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) = 0. \qquad (8.15)$$

В формуле (8.15) при k^0 имеем верное равенство $1 - 1 = 0$, что свидетельствует о правильности выбора асимптотики вида (8.14). При k^{-5} в (8.15) получим

$$d_{5k,1} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{W_5 a^5(\omega_1-\omega_4)^6}{2^5 i^5} = \frac{a^5 W_5}{\pi} \overset{(8.3)}{=} \frac{a^5}{\pi}[A_5(x_2) + B_5(x_{3n})],$$

откуда, применив формулы (3.8) и (3.14), выведем формулу

$$d_{5k,1} = d_{5k,1}(n) = \frac{a^5}{\pi}\Big(-\frac{1}{6a^5}\Big)\Big[\int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t)dt + \int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t)dt\Big] =$$
$$= -\frac{1}{6\pi}\Big[\int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t)dt + \int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t)dt\Big], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8.16}$$

Применив формулу (1.7), из (8.16) получим:

$$d_{5k,1} = d_{5k,1}(n) = -\frac{1}{6\pi}[H_{2n} + H_{3n}] = -\frac{1}{6\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8.17}$$

Таким образом, коэффициент $d_{5k,1}$ формулы (8.14) от n не зависит, и такое же значение будет иметь коэффициент $d_{5k,1}(n)$ формулы (8.14) у предельного оператора (при $n \to +\infty$), потенциалом которого является дельта-функция Дирака $\delta(x - x_2)$.

Приравнивая в уравнении (8.15) коэффициенты при k^{-6}, найдем

$$d_{6k,1} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{a^6(\omega_1-\omega_4)^6}{2^6 i^6}\Big[3W_6(1-1) - \frac{g_{1,6,2}(s)e^{-a(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi}}{\Phi_{30}}\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}\Big] =$$
$$= \frac{a^6}{2\pi i}\Big[e^{a(\omega_1-\omega_4)s\pi}(\Phi_4 e^{-a(\omega_1-\omega_4)sx_{3n}} - P_4 e^{-a(\omega_1-\omega_4)sx_2} - U_4 e^{-a(\omega_1-\omega_4)sx_{1n}}) -$$
$$-(\Phi_4 e^{a(\omega_1-\omega_4)sx_{3n}} - P_4 e^{a(\omega_1-\omega_4)sx_2} - U_4 e^{a(\omega_1-\omega_4)sx_{1n}})\Big]\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}=\frac{ik}{a}} =$$
$$= \frac{a^6}{2\pi i}(-2i)[\Phi_4\sin(2x_{3n}k) - P_4\sin(2x_2k) - U_4\sin(2x_{1n}k)]. \tag{8.18}$$

Подставив в формулу (8.18) значения величин Φ_4, P_4 и U_4 из (8.13), получим:

$$d_{6k,1} = \frac{1}{12\pi}[q_3(x_{3n}\sin(2x_{3n}k) - \Delta\widetilde{q}(x_2)\sin(2x_2k) + q_2(x_{1n})\sin(2x_{1n}k)];$$
$$\Delta\widetilde{q}(x_2) = q_3(x_2+0) - q_2(x_2-0), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8.19}$$

Формулы (8.16)–(8.19) показывают, что коэффициенты $d_{5k,1}$ и $d_{6k,1}$ асимптотического разложения (8.14) находятся единственным образом, в статье приведены явные формулы для их вычисления, поэтому теорема 8.2 полностью доказана.

Рассматривая аналогичным образом сектора 2), 3), ..., 6) индикаторной диаграммы, получим следующий результат.

Теорема 8.3 1) *В секторах* 2), 3), ..., 6) *индикаторной диаграммы асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1.1)–(1.8) *удовлетворяет следующим формулам:*

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{6}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2}e^{\frac{2\pi i}{6}} = s_{k,1}e^{\frac{4\pi i}{6}}; \ldots; s_{k,m+1} = s_{k,m}e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{6}m},$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, 5; \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

величины $s_{k,1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *определены формулами* (8.14), (8.16)–(8.18).

2) *При этом* $\lambda_{k,p} = s_{k,p}^6$, $p = 1, 2, \ldots, 6$ $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Список литературы

1. Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.

2. Peng O. Z., Wang X., Zeng J. Y. Analytic solution to the Schrodinger equation with a harmonic oscillator potential plus δ-potential // Sci. China,. Ser. A. 1991. Vol. 34, No. 10. pp. 1215–1221.

3. Fassari S., Inglese G. On the spectrum of the harmonic oscillator with a δ-type perturbation // Helv. Phys. Acta. 1994. Vol. 67, No. 6. pp. 650–659.

4. Fassari S., Inglese G. On the spectrum of the harmonic oscillator with a δ-type perturbation. II // Annales Henri Poincare. 1997. Vol. 70, No. 6. pp. 858–865.

5. Кревчик В. Д., Зайцев Р. В. Примесное поглощение света в структурах с квантовыми точками // Физика твердого тела. 2001. Т. 43, № 3. С. 504–507.

6. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 679–698.

7. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 1986. Т. 22, № 6. С. 3–6.

8. Митрохин С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 927–931.

9. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.

10. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // ДАН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.

11. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Сер.: Матем. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108.

12. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Труды МИАН. 2010. Т. 270, С. 188–197.

13. Митрохин С. И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциального уравнения с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.

14. Митрохин С. И. Спектральные свойства дифференциальных операторов четного порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2017. Т. 17, № 4. С. 3–15.

15. Митрохин С. И. Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 136–149.

16. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

17. Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с δ-потенциалом // УМН. 2000. Т. 55, № 6. С. 155–156.

18. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 735–751.

19. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.

20. Гейлер В. А., Маргулис В. А., Чучаев И. И. Потенциалы нулевого радиуса и операторы Карлемана // Сибирский математический журнал. 1995. Т. 36, № 4. С. 828–841.

21. Борисов Д. И. О лакунах в спектре Лапласиана в полосе с периодическим дельта-взаимодействием // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 46–53.

22. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

23. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Известия вузов. Математика. 2018. № 6. С. 31–47.

24. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

25. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.

Поступила 19.06.2020

MSC2020 34L20, 34B40, 47E05

On the asymptotic behavior of the spectrum of a sixth-order differential operator, whose potential is the delta function

© **S. I. Mitrokhin**[1]

Abstract. In this paper we propose a new method for studying differential operators with discontinuous coefficients. We consider a sequence of sixth-order differential operators with piecewise-smooth coefficients. The limit of the sequence of these operators' potentials is the Dirac delta function. The boundary conditions are separated. To correctly determine solutions of differential equations with discontinuous coefficients at the points of discontinuity, "gluing" conditions are required. Asymptotic solutions were written out for large values of the spectral parameter, with the help of them the "gluing" conditions were studied and the boundary conditions were investigated. As a result, we derive an eigenvalues equation for the operator under study, which is an entire function. The indicator diagram of the eigenvalues equation, which is a regular hexagon, is investigated. In various sectors of the indicator diagram, the method of successive approximations has been used to find the eigenvalues asymptotics of the studied differential operators. The limit of the asymptotic of the spectrum determines the spectrum of the sixth-order operator, whose potential is the delta function.

Key Words: differential operator with discontinuous coefficients, asymptotic behavior of solutions, piecewise-smooth potential, Dirac delta function, asymptotic behavior of eigenvalues, spectrum of an operator

References

1. F. A. Berezin, L. D. Faddeev, "[Remarks on the Schrodinger equation with a singular potential]", *Doklady Akademii nauk SSSR*, **137**:5 (1961), 1011–1014 (In Russ.).
2. O. Z. Peng, X. Wang, J. Y. Zeng, "Analytic solution to the Schrodinger equation with a harmonic oscillator potential plus delta-potential", *Sci. China. Ser. A.*, **34**:10 (1991), 1215–1221.
3. S. Fassari, G. Inglese, "On the spectrum of the harmonic oscillator with a δ-type pertubation", *Helv. Phys. Acta.*, **67**:6 (1994), 650–659.
4. S. Fassari, G. Inglese, "On the spectrum of the harmonic oscillator with a δ-type pertubation. II", *Annales Henri Poincare*, **70**:6 (1997), 858–865.
5. V. D. Krevchik, R. V. Zaitsev, "[Impurity absorption of light in structures with quantum dots]", *Physics of the Solid State*, **43**:3 (2001), 504–507 (In Russ.).
6. V. A. Il'in, "Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator", *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, **22**:5 (1977), 670–872.
7. S. I. Mitrokhin, "[Regularized trace formulas for second-order differential operators with discontinuous coefficients]", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 1986, no. 6, 3–6 (In Russ.).

[1]**Sergey I. Mitrokhin**, senior researcher, Lomonosov Moscow State University (4, Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID:http://orcid.org/0000-0003-1896-0563, mitrokhin-sergey@yandex.ru

8. S. I. Mitrokhin, "[On trace formulas for a boundary value problem with a functional differential equation with a discontinuous coefficient]", *Differential Equations*, **22**:6 (1986), 927–931 (In Russ.).

9. V. A. Il'in, "[Necessary and sufficient conditions for being a Riesz basis of root vectors of second-order discontinuous operators]", *Differential Equations*, **22**:12 (1986), 2059–2071 (In Russ.).

10. S. I. Mitrokhin, "[On some spectral properties of second-order differential operators with discontinuous weight function]", *Doklady Akademii nauk*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russ.).

11. V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichy, "Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential", *Izvestiya: Mathematics*, **64**:4 (2000), 695–754.

12. S. I. Mitrokhin, "Spectral properties of a fourth-order differential operator with integrable coefficients", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **270** (2010), 184–193.

13. S. I. Mitrokhin, "[Spectral properties of boundary value problems for a functional differential equation with summable coefficients]", *Differential Equations*, **46**:8 (2010), 1085–1093 (In Russ.).

14. S. I. Mitrokhin, "[Spectral properties of even-order differential operators with summable coefficients]", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, **17**:4, 3–15 (In Russ.).

15. S. I. Mitrokhin, "Asymptotics of the spectrum of a periodic boundary value problem for a differential operator with a summable potential", *Trudy instituta matematiki i mekhaniki URO RAN*, **25**:1 (2019), 136–149 (In Russ.).

16. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, "Sturm-Liouville operators with singular potentials", *Mathematical Notes*, **66**:6 (1999), 741–753.

17. A. M. Savchuk, "First-order regularised trace of the Sturm-Liouville operator with δ-potential", *Russian Mathematical Surveys*, **55**:6 (2000), 1168–1169.

18. V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichy, "The asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions and a trace formula for a potential with delta functions", *Differential Equations*, **38**:6 (2002), 772–789.

19. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, "Trace formula for Sturm-Liouville Operators with singular potentials", *Mathematical Notes*, **69**:3 (2001), 387–400.

20. V. A. Geiler, V. A. Margulis, I. I. Chuchaev, "Potentials of zero radius and Carleman operators", *Siberian Mathematical Journal*, **36**:4 (1995), 714–726.

21. D. I. Borisov, "Gaps in the spectrum of the Laplacian in a strip with periodic delta interaction", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary Issues)*, **305**:suppl. 1 (2019), S16–S23.

22. M. A. Naimark, *[Linear differential operators]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 528 p.

23. S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of eigenvalues of differential operator with alternating weight function”, *Russian Mathematics*, 2018 vol 62, no. 6, 27–42.

24. R. Bellman, K. L. Cook, *Differential-difference equations*, Academic Press, London, 1963, 462 p.

25. V. A. Sadovnichyi, V. B. Lyubishkin, “[On some new results in the theory of regularized traces of differential operators]”, *Differential Equations*, **18**:1 (1982), 109–116 (In Russ.).

Submitted 19.06.2020