DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.268-279

УДК 517.977.1

Стабилизация многосвязной управляемой непрерывно-дискретной системы с неперекрывающимися декомпозициями по части переменных

© **Е. А. Каледина**[1]

Аннотация. В работе рассматривается многосвязная управляемая динамическая система с неперекрывающимися декомпозициями. Учитывая, что большинство законов управления реализуется на цифровых регуляторах, управление системы реализуется в виде кусочно-постоянной функции. Многосвязность системы, в свою очередь, приводит к определенным трудностям в применении централизованного управления. Каждая изолированная подсистема должна работать устойчиво, а межсистемные связи могут осуществлять дестабилизирующее воздействие. В этом случае кусочно-постоянное управление строится двухуровневым, т. е. в виде суммы локального и глобального управления. Локальное управление стабилизирует положения равновесия отдельных линейных подсистем, а глобальное управление действует на межсистемные связи. Получены условия, при выполнении которых локальное управление стабилизирует линейные подсистемы, а положение равновесия исходной многосвязной системы будет асимптотически устойчиво по части переменных.

Ключевые слова: Многосвязная динамическая система, кусочно-постоянное управление, двухуровневое управление, асимптотическая устойчивость по части переменных, стабилизация

1. Введение и постановка задачи

В настоящее время большое внимание уделяется задаче стабилизации непрерывных систем кусочно-постоянным управлением. Данная задача возникает в объектах, где дискретные регулирующие устройства (компьютеры, микропроцессоры и просто пороговые устройства) сочетаются с непрерывными по своей природе объектами управления, то есть сочетается непрерывное и дискретное время [1–3]. Основная часть исследований посвящена построению кусочно-постоянных управлений для линейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями с запаздыванием [4–5].

Отметим, что современные управляемые динамические объекты представляют собой комплекс подсистем, взаимосвязанных и взаимодействующих друг с другом. Примерами таких объектов являются исполнительные системы роботов, газотурбинные двигатели, летательные аппараты и т. д. Математические модели подобных объектов представляют собой многосвязные системы, состоящие из отдельных подсистем, объединяемых в единую систему посредством внутрисистемных связей [6–7]. При управлении такими объектами необходимо учитывать тот факт, что большинство законов управления реализуется на цифровых регуляторах [8]. В связи с этим задача синтеза

[1]**Каледина Елена Александровна**, старший преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0992-9540, elena.lizina@gmail.com

непрерывно-дискретных систем управления многосвязными объектами является актуальной, а её решение востребованным.

В настоящей работе исследуется задача стабилизации многосвязной системы с помощью кусочно-постоянного управления по части переменных.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, A – постоянная матрица размерности $n \times n$; b – постоянный вектор размерности $(n \times 1)$. Управление u зависит от дискретных моментов времени и представляет собой кусочно-постоянную функцию, т. е. $u(t) = u(ph)$, $t \in [ph, (p+1)h]$. Здесь $h > 0$ – шаг квантования; $p = 0, 1, ...$; $x(0) = x_0$ – начальное условие, характеризующее начальное отклонение от программного режима.

Положим, что матрица A допускает неперекрывающуюся декомпозицию вида

$$\dot{x}_s = A_s x_s + \sum_{j=1, j\neq s}^{q} A_{sj} x_j + b_s u_s, s = \overline{1, q}, \tag{1.2}$$

где $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, A_s – постоянные матрицы размерности $n_s \times n_s$; A_{sj} — постоянные матрицы размерности $(n_s \times n_j)$, $\sum_{s=1}^{q} n_s = n$. Ни одна из компонент вектора x_s не является одновременно компонентой какого-либо другого вектора x_j другой подсистемы. Матрица A_s отражает динамические свойства s-й подсистемы (1.2), а слагаемые $\sum_{j=1, j\neq s}^{q} A_{sj} x_j$ содержат все остальные фазовые переменные x_j, $j = \overline{1, q}$ и указывают на связи между подсистемами.

Рассмотрим случай, когда кусочно-постоянное управляющее воздействие формируется в виде суммы $u_s = u_s^{\Lambda} + u_s^{\Gamma}$. Здесь $u_s^{\Lambda} = u_s^{\Lambda}(ph)$ – управления на уровне подсистем (локальное управление), стабилизирующее подсистемы

$$\dot{x}_s = A_s x_s + b_s u_s, s = \overline{1, q}, \tag{1.3}$$

$u_s^{\Gamma} = u_s^{\Gamma}(ph)$ – управление на уровне исходной системы (1.2) (глобальное управление), воздействующее на межсистемные связи [9]. Пусть управления формируются по законам

$$u_s^{\Lambda} = k_s^T x_s(ph), u_s^{\Gamma} = \sum_{j=1, j\neq s}^{q} k_j^T x_j(ph), \tag{1.4}$$

где k_s – постоянный вектор размерности n_s, $s = \overline{1, q}$.

С учетом вида управлений (1.4) система (1.2) примет вид

$$\dot{x}_s = A_s x_s + b_s k_s^T x_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{q} A_{sj} x_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{q} k_j^T x_j(ph), s = \overline{1, q}. \tag{1.5}$$

Будем считать, что локальные управления построены таким образом, что действительные части характеристических чисел матриц $(A_s + b_s k_s^T)$, $s = \overline{1, q}$ — отрицательны. В этом случае исследуемую задачу стабилизации системы (1.5) по части переменных можно представить как поиск соответствующих условий, накладываемых лишь на глобальное управление.

2. Построение вспомогательной μ-системы для многосвязной управляемой системы

Представим вектор x в виде $x = (x_1, ..., x_n)^T = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)^T$, $m + p = n$. Тогда система (1.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_s = A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m} B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{m} k_j^T y_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{p} C_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1}^{p} k_j^T z_j(ph), s = \overline{1, m}, \\ \dot{z}_s = F_s z_s + b_s k_s^T z_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{p} G_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{p} k_j^T z_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m} H_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1}^{m} k_j^T y_j(ph), s = \overline{1, p}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где B_{sj}, C_{sj}, F_s G_{sj}, H_{sj} – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Для исследования задачи об асимптотической y-устойчивости положения равновесия $y_i = 0$, $z_j = 0$ $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p})$ системы (2.1) по отношению к переменным $y_1, \ldots, y_m$ воспользуемся работой В. И. Воротникова [10] и построим вспомогательную μ-систему дифференциальных уравнений.

Для этого введём новые переменные:

$$\mu_s = \sum_{j=1}^{p} C_{sj} z_j, (s = \overline{1, m_1}), \tag{2.2}$$

где коэффициенты $C_i = (C_{i1}, \ldots, C_{ip})$ $(i = 1, \ldots, m_1, m_1 \leq m)$ образуют линейно независимые столбцы в системе (2.2), а векторы $C_{m_1+1}, \ldots, C_m$ линейно выражаются через них.

При этом система (2.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_s = A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m} B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{m} k_j^T y_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj} \mu_j + \sum_{j=1}^{m_1} J_{sj} \mu_j(ph), s = \overline{1, m}, \\ \dot{\mu}_s = \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m_1} \gamma_{sj} \mu_j + \sum_{j=1, j\neq s}^{m_1} \eta_{sj} \mu_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{m} \xi_{sj} y_j(ph), s = \overline{1, m_1}, \\ \dot{z}_s = F_s z_s + b_s k_s^T z_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{p} G_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{p} k_j^T z_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m} H_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1}^{m} k_j^T y_j(ph), s = \overline{1, p}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Поведение переменных $y_1, \ldots, y_m$ системы (2.1), относительно которых рассматривается устойчивость невозмущенного движения, будет полностью описываться μ-системой:

$$\begin{aligned} \dot{y}_s = A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m} B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{m} k_j^T y_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj}\mu_j + \sum_{j=1}^{m_1} J_{sj}\mu_j(ph), s = \overline{1, m}, \\ \dot{\mu}_s = \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m_1} \gamma_{sj}\mu_j + \sum_{j=1, j\neq s}^{m_1} \eta_{sj}\mu_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{m} \xi_{sj} y_j(ph), s = \overline{1, m_1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из этого следует, что на основании анализа устойчивости непрерывно-дискретной μ-системы (2.4) по всем переменным решается вопрос об устойчивости по отношению к части переменных положения равновесия исходной системы (1.5) с двухуровневым кусочно-постоянным управлением.

В случае, когда при введении переменных (2.2) неравенства

$$\sum_{j=1}^{p} C_{sj} z_j = \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj}\mu_j$$

выполняются, допустим, лишь для первых m_2 $(m_2 < m_1)$ равенств, система будет состоять из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_s = A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m} B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{m} k_j^T y_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj}\mu_j + \sum_{j=1}^{m_1} J_{sj}\mu_j(ph), s = \overline{1, m}, \\ \dot{\mu}_s = \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m_1} \gamma_{sj}\mu_j + \sum_{j=1, j\neq s}^{m_1} \eta_{sj}\mu_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{m} \xi_{sj} y_j(ph), s = \overline{1, m_2}, \\ \dot{\mu}_s = \alpha_s^* z_s + \beta_s^* z_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{p} \gamma_{sj}^* z_j + \sum_{j=1, j\neq s}^{m_1} \eta_{sj}^*\mu_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{m} \xi_{sj} y_j(ph), s = \overline{1, m_2}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\dot{z}_s = F_s z_s + b_s k_s^T z_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{p} G_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{p} k_j^T z_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{m} H_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1}^{m} k_j^T y_j(ph), s = \overline{1,p},$$

$$\gamma_{sj}^* = \sum_{i=1}^{p} C_{sj} G_{ij}, s = \overline{m_2+1, m_1}.$$

В этом случае вводятся новые переменные:

$$\mu_{m_1+1} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{m_2+l,k} z_k, l = \overline{1, m_3},$$

где первые m_3 из векторов $\gamma_{m_2+1}^*, \ldots, \gamma_{m_1}^*$ $(m_3 \leq m_1 - m_2)$ линейно независимы, а остальные выражаются через них. При этом система сводится к системе типа (2.3) или (2.5). В первом случае μ-система построена, во втором – необходимо продолжать введение новых переменных.

В общем случае вспомогательные переменные μ-системы выбираются из переменных (в векторном виде)

$$\mu = Cz, \mu^{(1)} = C\dot{z} = CGz, \ldots, \mu^{(k)} = CG^k z \quad (1 \leq k \leq p-1),$$

и для определения размерности μ-системы с кусочно-постоянным управлением рассматривается матрица

$$K_p = (C^T, G^T C^T, \ldots, (G^T)^{(p-1)} C^T),$$

где C^T, G^T – вектор-столбцы системы (2.1). Следовательно, для непрерывно-дискретной системы (2.4) верна лемма [10]: для того, чтобы размерность μ-системы была равна $(m+h)$, необходимо и достаточно, чтобы $rank K_p = h$.

3. Асимптотическая устойчивость μ-систем

Далее, не теряя общности рассуждений, рассматрим μ-систему размерности $(m+h)$:

$$\dot{y}_s = A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{m} B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j\neq s}^{m} k_j^T y_j(ph) + \\ + \sum_{j=1}^{h} D_{sj} \mu_j + \sum_{j=1}^{h} J_{sj} \mu_j(ph), s = \overline{1,m}, \tag{3.1}$$

$$\dot{\mu}_s = \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j\neq s}^{h} \gamma_{sj} \mu_j + \sum_{j=1, j\neq s}^{h} \eta_{sj} \mu_j(ph) + \sum_{j=1}^{m} \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{m} \xi_{sj} y_j(ph), s = \overline{1,h}. \tag{3.2}$$

Найдем α_s, β_s, γ_{sj}, η_{sj}, ρ_{sj}, ξ_{sj} в уравнении (3.2) из равенств

$$\sum_{j=1}^{h} C_{sj} F_j z_j = \alpha_s \mu_s; \qquad \sum_{j=1}^{h} C_{sj} b_j k_j^T z_j = \beta_s \mu_s; \qquad \sum_{j=1}^{h} C_{sj} \sum_{k=1, k\neq j}^{h} G_{jk} z_k = \sum_{j=1, j\neq s}^{h} \gamma_{sj} \mu_j;$$

$$\sum_{j=1}^{h} C_{sj} b_j \sum_{l=1, l\neq s}^{h} k_l^T z_l(ph) = \sum_{j=1, j\neq s}^{h} \eta_{sj}\mu_j(ph); \quad \sum_{j=1}^{h} C_{sj} \sum_{k=1}^{m} H_{jk} y_k = \sum_{j=1}^{m} \rho_{sj} y_j;$$

$$\sum_{j=1}^{h} C_s j b_j \sum_{l=1, l\neq s}^{m} k_i^T y_k(ph) = \sum_{j=1}^{m} \xi_{sj} y_j(ph)$$

соответственно отсюда, учитывая замену (2.2), найдем коэффициенты уравнения (3.2)в матричной форме следующим образом:

$$\mathbb{A} = CFC^T(CC^T)^{-1}, \quad \mathbb{B} = C\Theta C^T(CC^T)^{-1}, \quad \Gamma = CGC^T(CC^T)^{-1},$$

$$N = C\overline{\Theta}_1 C^T(CC^T)^{-1}, \qquad P = CH, \qquad \Xi = C\overline{\Theta}_2,$$

где

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_h \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_h \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1h} \\ \gamma_{2h} & 0 & \dots & \gamma_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{h1} & \gamma_{h2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} & \dots & \eta_{1h} \\ \eta_{2h} & 0 & \dots & \eta_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{h1} & \eta_{h2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{h1} & \rho_{h2} & \dots & \rho_{hm} \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1m} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hm} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{h1} & C_{h2} & \dots & C_{hp} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_p \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1m} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p1} & H_{p2} & \dots & H_{pm} \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} b_{m+1}k_{m+1}^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{m+2}k_{m+2}^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n k_n^T \end{pmatrix},$$

$$\overline{\Theta}_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{m+1}k_{m+2}^T & \dots & b_{m+1}k_n^T \\ b_{m+2}k_{m+1}^T & 0 & \dots & b_{m+2}k_n^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n k_{m+1}^T & b_n k_{m+2}^T & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\Theta}_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{m+1}k_2^T & \dots & b_{m+1}k_m^T \\ b_{m+2}k_1^T & 0 & \dots & b_{m+2}k_m^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n k_1^T & b_n k_2^T & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & \dots & \dots & G_{1p} \\ G_{21} & 0 & \dots & \dots & G_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{p1} & G_{p2} & \dots & G_{pp-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что коэффициенты усиления β_s кусочно-постоянного управления системы (3.2) стабилизируют соответствующие линейные подсистемы

$$\dot\mu_s = (\alpha_s + \beta_s)\mu_s, \quad s = \overline{1,h}.$$

Для этого ведем расширенную матрицу $\tilde C$ размерности $(n \times n)$:

$$\tilde C = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{m\times m} & \multicolumn{2}{c}{O_{m\times p}} \\ \hline O_{p\times m} & \multicolumn{2}{c}{C_{h\times p}} \\ \cline{2-3} & O_{(p-h)\times h} & E_{(p-h)\times(p-h)} \end{array}\right),$$

где $E_{m\times m}$ и $E_{(p-h)\times(p-h)}$ — единичные матрицы размерности $(m \times m)$ и $((p-h)\times(p-h))$ соответственно; $O_{m\times p}$, $O_{p\times m}$, $O_{(p-h)\times h}$ — нулевые матрицы соответствующих размерностей. Далее обозначим через $\tilde A$ $(n \times n)$ квадратную матрицу вида

$$\tilde A = \begin{pmatrix} A + bk^T & O_{m\times p} \\ O_{p\times m} & F + \Theta \end{pmatrix},$$

где $A + bk^T$ – диагональная матрица размерности $(m\times m)$, элементы главной диагонали которой $A_s + b_s k_s^T$, $(s = \overline{1,m})$; $F + \Theta$ – диагональная матрица размерности $(p \times p)$, где на главной диагонали находятся элементы $F_s + b_s k_s^T$ $(s = \overline{1,p}, j = \overline{1+m,p})$; $O_{p\times m}$ и $O_{m\times p}$ – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

Используя преобразование $\tilde C \tilde A \tilde C^{-1}$, получим матрицу, в которой первые $m+h$ строк образуют систему

$$\dot y_s = (A_s + b_s k_s^T) y_s, s = \overline{1,m}, \tag{3.3}$$

$$\dot\mu_s = (\alpha_s + \beta_s)\mu_s, \quad s = \overline{1,h}. \tag{3.4}$$

Корни характеристических уравнений $\|\tilde A - \lambda E_n\| = 0$ и $\|\tilde C \tilde A \tilde C^{-1} - \lambda E_n\| = 0$ одинаковы [11]. Действительные части характеристических корней матрицы $\tilde A$ отрицательны по построению, а значит, управления $\beta_s\mu_s$ $(s = \overline{1,h})$ также будут стабилизировать линейные системы (3.4).

В работе В. И. Зубова [12] доказана теорема о стабилизации линейной управляемой системы, в т. ч. для случая, когда управление является линейной комбинацией фазовых координат объекта, вычисляемых в разные моменты времени. Опираясь на данную теорему, получим, что при достаточно малом шаге квантования h в системе (2.4) построенные коэффициенты усиления k_s, β_s будут стабилизировать соответствующие линейные подсистемы

$$\dot y_s = A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph), \quad s = \overline{1,m},$$

$$\dot\mu_s = \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph), \quad s = \overline{1,h},$$

а задача об асимптотической y-устойчивости положения равновесия $y_i = 0, z_j = 0$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p})$ системы (1.5) сводится к задаче об асимптотической устойчивости по всем переменным многосвязной системы с двухуровневым кусочно-постоянным управлением (3.1)–(3.2). Для ее решения воспользуемся теоремой о двухуровневой стабилизации многосвязной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями, доказанной в работе [13].

Для системы (3.1)–(3.2) выбирается векторная функция Ляпунова [14] вида

$$V(y,\mu) = (V_1(y_1), \ldots, V_m(y_m), V_{m+1}(\mu_1), \ldots, V_{m+h}(\mu_h))^T,$$

где $V_s(y_s)$ и $V_j(\mu_j)$ $(s = \overline{1,m}, j = \overline{1,h})$ — функции Ляпунова, решающие вопрос об асимптотической устойчивости систем (3.3)–(3.4) соответственно. Поскольку данные подсистемы есть линейные системы дифференциальных уравнений, представим их как квадратичные формы вида [14]:

$$V_s(y_s) = y_s^T C_s^y y_s, s = \overline{1,m},$$

$$V_j(\mu_j) = \mu_j^T C_j^\mu \mu_j, j = \overline{1,h},$$

удовлетворяющие условиям Н. Н. Красовского [15]

$$\lambda_{1s}^y \|y_s\|^2 \le V_s(y_s) \le \lambda_{2s}^y \|y_s\|^2, \quad \|\frac{\partial V_s(y_s)}{\partial y_s}\| \le c_s^y \|y_s\|, \quad \frac{dV_s(y_s)}{dt}\Big|_{(3.3)} = -d_s^y \|y_s\|^2, s = \overline{1,m};$$

$$\lambda_{1j}^\mu \|\mu_j\|^2 \le V_j(\mu_j) \le \lambda_{2j}^\mu \|\mu_j\|^2, \quad \|\frac{\partial V_j(\mu_j)}{\partial \mu_j}\| \le c_s^\mu \|\mu_j\|, \quad \frac{dV_j(\mu_j)}{dt}\Big|_{(3.4)} = -d_j^\mu \|\mu_j\|^2, j = \overline{1,h};$$

соответственно, где λ_{1s}^y, λ_{2s}^y, c_s^y, d_s^y, λ_{1j}^μ, λ_{2j}^μ, c_j^μ, d_j^μ — положительные постоянные числа.

Повторяя рассуждения из работы [13], составим матрицу

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix}
-\frac{d_1^y}{2\lambda_{21}^y} & \dots & \frac{c_1^y\|B_{1m}+b_1k_m^T\|}{2(\lambda_{11}^y\lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_1^y\|D_{11}+J_{11}\|}{2(\lambda_{11}^y\lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \dots & \frac{c_1^y\|D_{1h}+J_{1h}\|}{2(\lambda_{11}^y\lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\
\frac{c_2^y\|B_{21}+b_2k_1^T\|}{2(\lambda_{12}^y\lambda_{11}^y)^{1/2}} & \dots & \frac{c_2^y\|B_{2m}+b_2k_m^T\|}{2(\lambda_{12}^y\lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_2^y\|D_{21}+J_{21}\|}{2(\lambda_{12}^y\lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \dots & \frac{c_2^y\|D_{2h}+J_{2h}\|}{2(\lambda_{12}^y\lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{c_m^y\|B_{m1}+b_mk_1^T\|}{2(\lambda_{1m}^y\lambda_{11}^y)^{1/2}} & \dots & -\frac{d_m^y}{2\lambda_{2m}^y} & \frac{c_m^y\|D_{m1}+J_{m1}\|}{2(\lambda_{1m}^y\lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \dots & \frac{c_m^y\|D_{mh}+J_{mh}\|}{2(\lambda_{1m}^y\lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\
\frac{c_1^\mu\|\rho_{11}+\xi_{11}\|}{2(\lambda_{11}^\mu\lambda_{11}^y)^{1/2}} & \dots & \frac{c_1^\mu\|\rho_{1m}+\xi_{1m}\|}{2(\lambda_{11}^\mu\lambda_{1m}^y)^{1/2}} & -\frac{d_1^\mu}{2\lambda_{21}^\mu} & \dots & \frac{c_1^\mu\|\gamma_{1h}+\eta_{1h}\|}{2(\lambda_{11}^\mu\lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\
\frac{c_2^\mu\|\rho_{21}+\xi_{21}\|}{2(\lambda_{12}^\mu\lambda_{11}^y)^{1/2}} & \dots & \frac{c_2^\mu\|\rho_{2m}+\xi_{2m}\|}{2(\lambda_{12}^\mu\lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_2^\mu\|\gamma_{2m}+\eta_{21}\|}{2(\lambda_{12}^\mu\lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \dots & \frac{c_2^\mu\|\gamma_{2h}+\eta_{2h}\|}{2(\lambda_{12}^\mu\lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{c_h^\mu\|\rho_{h1}+\xi_{h1}\|}{2(\lambda_{1h}^\mu\lambda_{11}^y)^{1/2}} & \dots & \frac{c_h^\mu\|\rho_{h3}+\xi_{h3}\|}{2(\lambda_{1h}^\mu\lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_h^\mu\|\gamma_{h1}+\eta_{h1}\|}{2(\lambda_{1h}^\mu\lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \dots & -\frac{d_h^\mu}{2(\lambda_{2h}^\mu)}
\end{pmatrix},$$

отрицательность собственных чисел которой гарантирует расчетную асимптотическую устойчивость положения равновесия системы (3.1)–(3.2) по всем переменным, а значит, и асимптотическую y-устойчивость системы (1.5). Таким образом, будет верна следующая теорема.

Теорема 3.1 *Если для многосвязной системы (1.1) с кусочно-постоянным управлением вида (1.4) выполняются условия:*

1) векторы b_s, $A_s b_s$, ..., $A_s^{n-1} b_s$ линейно независимы, $s = \overline{1,q}$;

2) «локальное» управление $u_s^\Lambda = k_s^T x_s(ph)$ $(s = \overline{1,q})$ стабилизирует линейные системы (1.3);

3) коэффициенты усиления «глобального» управления

$$u_s^{\Gamma} = \sum_{j=1, j\neq s}^{q} k_j^T x_j(ph)$$

обеспечивают отрицательность собственных чисел матрицы $\tilde{\tilde{A}}$

$$Re\lambda_j(\tilde{\tilde{A}}) < 0,$$

то нулевое решение многосвязной управляемой непрерывно-дискретной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями (1.5) при достаточно малом h *будет расчетно асимптотически устойчивым по части переменных.*

4. Заключение

Доказана теорема о возможности двухуровневой стабилизации положения равновесия многосвязной управляемой динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями (1.2) по части переменных. При выполнении условий теоремы построенное по правилам (1.4) двухуровневое кусочно-постоянное управление стабилизирует линейные подсистемы (1.3) по всем переменным, а положение равновесия исходной многосвязной системы будет асимптотически устойчиво по части переменных.

Список литературы

1. Поляков К. Ю. Цифровая стабилизация непрерывных объектов с множественными запаздываниями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 30–37.

2. Козлов Р. И., Козлова О. Р. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ I // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 104–113.

3. Козлов Р. И., Козлова О. Р. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ II // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № С. 41–50.

4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 446 с.

5. Розенвассер Е. Н. Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. М.: Наука, 1994. 461 с.

6. Александров А. Ю. Исследование устойчивости решений одного класса сложных систем // Вестн. С.-Петербург. ун–та. Сер. 10. Прикл. матем. информ. проц. упр. 2011. № 4. С. 3–13.

7. Многосвязные системы управления / под ред. Меерова В. М. М.: Наука, 1990. 264 с.

8. Основы управления манипуляционными роботами: учеб. для вузов. – 2-е изд., исправ. и доп. / под. ред. С.Л. Зенкевича, А.С. Ющенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 480 с.

9. Воронов А. А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.

10. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

11. Мальцев А. Г. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.

12. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

13. Лизина Е. А., Щенников В. Н. Двухуровневая стабилизация многосвязной гибридной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями. Системы управления и информационные технологии. 2011. № 2 (44). С. 30–34.

14. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под. ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.

15. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959. 222 с.

Поступила 22.07.2020

MSC2020 39A30

Stabilization of a multiconnected controlled continuous discrete system with non-overlapped decompositions with respect to part of variables

© **E. A. Kaledina**[1]

Abstract. This paper considers a multi-connected controllable system with non-overlapping decompositions. Given that most of the control laws are implemented on digital controllers, the control of the system is implemented as a piecewise-constant function. Multiconnectivity of the system, in turn, makes it impossible to use centralized control. Every isolated subsystem must work stably, and intersystem connections can have a destabilizing effect. In this case, piecewise-constant control is constructed as two-level, i.e. in the form of a sum of local and global control. Local control stabilizes the equilibrium positions of individual linear subsystems. Global control acts on intersystem connections. Conditions are obtained under which local control stabilizes linear subsystems, and the equilibrium position of the original multi-connected system is asymptotically stable in part of variables.
Key Words: multivariable dynamic system, piecewize-constant control, two-level control, asymptotic stability in part of variables, stabilization

References

1. K. Y. Polyakov, "[Digital stabilization of continuous objects with multiple delays]", *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, **1** (2006), 30–37 (In Russ.).

2. R.I. Kozlov, O. R. Kozlova, "[Investigation of the stability of nonlinear continuous-discrete models of economic dynamics by the VFL method I]", *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, **2** (2009), 104–113 (In Russ.).

3. R.I. Kozlov, O. R. Kozlova, "[Investigation of the stability of nonlinear continuous-discrete models of economic dynamics by the VFL method II]", *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, **3** (2009), 41–50 (In Russ.).

4. B. Kuo, *Teoriya i priektirovanie cifrovyh sistem upravleniya [Theory and design of digital control systems]*, Mashinostroeniye, M., 1986 (In Russ.), 446 c.

5. E. N. Rozenvasser, *Lineynaya teoriya cifrovogo upravleniya v nepreryvnom vremeni [Linear theory of digital control in continuous time]*, Nauka, M., 1994 (In Russ.), 461 c.

6. A. Yu. Alexandrov, "[Investigation of the stability of solutions of one class of complex systems]", *Vestn. S.-Peterburgskogo un-ta. – Ser. 10. Prikl. matem. inform. proc. upr.*, **4** (2011), 3–13 (In Russ.).

7. M. V. Meerov, A. V. Ahmetzyanov, Ya. M. Berschanskiy, V. N. Kulibanov, *Mnogosvyaznye sistemy upravleniya [Multiply connected control systems]*, Nauka, 1990 (In Russ.), 264 c.

[1]**Elena A. Kaledina**, Senior Teacher, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0992-9540, elena.lizina@gmail.com

8. S. L. Zenkevich, A. S. Yuschenko i dr., *Osnovy upravleniya manipulyatcionnymi robotami: Uchebnik dlya vuzov - 2-e izd, isprav. i dop. [Fundamentals of manipulation robots control: Textbook for universities. - 2nd ed., Revised. and add.]*, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2004 (In Russ.), 480 c.

9. A. A. Voronov., *Vvedenie v dinamiku slojnyh upravlyaemyh sistem [Introduction to the dynamics of complex control systems]*, Nauka, M., 1985 (In Russ.), 352 c.

10. V. I. Vorotnikov, *Ustoychivost dinamicheskih sistem po otnosheniyu k chasti peremennyh [Stability of dynamical systems with respect to part variables]*, Nauka, M., 1992 (In Russ.), 288 c.

11. A. G. Maltcev, *Osnovy lineynoy algebry [Fundamentals of Linear Algebra]*, Nauka, M., 1970 (In Russ.), 400 c.

12. V. I. Zubov., *Lekcii po teorii upravleniya [Lectures on control theory]*, Nauka, M., 1975 (In Russ.), 496 c.

13. E. A. Lizina, V. N. Schennikov, "[Two-level stabilization of a multiply connected hybrid dynamical system with non-overlapping decompositions]", *Sistemy upravleniya i informacionnye tehnologii*, **2 (44)** (2011), 30–34 (In Russ.).

14. A. A. Voronov, V. M. Matrosov i dr., *Metod vektornyh funktciy Lyapunova v teorii ustoychivosti [Lyapunov vector function method in stability theory]*, Nauka, M., 1987 (In Russ.), 312 c.

15. N. N. Krasovskiy, *nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvijeniya [Some problems of the theory of stability of motion]*, Phizmatlit, M., 1959 (In Russ.), 222 c.

Submitted 22.07.2020