

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.261-267

УДК 517.9

О классе топологической сопряженности с гомотетией

© Е. Я. Гуревич¹, А. А. Макаров²

Аннотация. В работе рассматривается класс $H(\mathbb{R}^n)$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов евклидова пространства \mathbb{R}^n таких, что для любого гомеоморфизма $h \in H(\mathbb{R}^n)$ и для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются условия $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) \rightarrow O$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} h^n(x) \rightarrow \infty$, где O — начало координат. Доказывается, что для любого $n \geq 1$ произвольный гомеоморфизм $h \in H(\mathbb{R}^n)$ топологически сопряжен с гомотетией $a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемой формулой $a_n(x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$. Для гладкого случая при условии, что все собственные числа линейной части рассматриваемого отображения лежат внутри единичной окружности, данный факт следует из классической теории динамических систем. В негладком случае при $n \notin \{4, 5\}$ этот факт доказан в ряде работ конца XX века, но работы, где доказательство было бы изложено для случая $n \in \{4, 5\}$, авторам неизвестны. Настоящая работа заполняет этот пробел.

Ключевые слова: топологическая классификация гомеоморфизмов, топологическая сопряженность со сжатием, фактор-пространство, гомотетия

1. Введение и формулировка результатов

Пусть $H(\mathbb{R}^n)$ — класс изотопных тождественному гомеоморфизмов евклидова пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ таких, что для любого гомеоморфизма $h \in H$ и для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются условия $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) \rightarrow O$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} h^n(x) \rightarrow \infty$, где O — начало координат. Определим отображение $a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $a_n(x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$. Напомним, что гомеоморфизмы $h, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $h = \theta^{-1}g\theta$.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Т е о р е м а 1.1 *Для любого $n \geq 1$ гомеоморфизм $h \in H(\mathbb{R}^n)$ топологически сопряжен с гомотетией a_n .*

Из условий, накладываемых на класс $H(\mathbb{R}^n)$, следует, что любой гомеоморфизм h из этого класса имеет единственную неподвижную точку, и эта точка совпадает с началом координат O .

¹Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

²Макаров Алексей Александрович, магистрант, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2447-4836>, leomakar@mail.ru

Если гомеоморфизм $h \in H(\mathbb{R}^n)$ является гладким и его дифференциал $Dh : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке O не имеет собственных чисел, равных по модулю единице, то из теоремы Гробмана-Хартмана следует, что h и Dh топологически сопряжены. Из этого и топологической классификации линейных отображений [4, теорема 5.5] следует, что h топологически сопряжен с a_n .

В работе рассматривается негладкий случай. Как будет показано ниже, для случая $n = 1$ доказательство теоремы 1.1 является несложным. Для случая $n = 2$ доказательство теоремы изложено в работе [1], для $n = 3$ — в работе [2], для $n \geq 6$ — в работе [3]. Основным результатом настоящей работы состоит в независимом доказательстве теоремы 1.1 для случая $n \geq 3$.

2. Вспомогательные определения и факты

Напомним несколько определений и фактов, необходимых для доказательства результата.

Говорят, что группа G *действует* на многообразии X , если задано отображение $\zeta : G \times X \rightarrow X$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $\zeta(e, x) = x$ для всех $x \in X$, где e — нейтральный (единичный) элемент группы G ;
- 2) $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in G$.

Говорят, что группа G *действует свободно* на многообразии X , если $\zeta(g, x) \neq x$ для любого $x \in X$ и любого $g \in G$, кроме $g = e$.

Говорят, что группа G *действует разрывно* на многообразии X , если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $g \in G$ таких, что $\zeta(g, K) \cap K \neq \emptyset$ — конечно.

Группа A называется *циклической*, если существует элемент $a \in A$ такой, что любой элемент группы A представляется в виде $a^n, n \in \mathbb{Z}$. Элемент a называют образующим элементом циклической группы $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Если все степени элемента a различны, то, говорят что циклическая группа имеет *бесконечный порядок*. В противном случае порядком циклической группы A называется наименьшее положительное число p , для которого $a^p = e$. Известно, что все циклические группы одного и того же порядка (в т. ч. и бесконечного) изоморфны. В частности, любая группа бесконечного порядка изоморфна группе \mathbb{Z} с операцией сложения [5, гл. 4, §2]. Будем обозначать через ϕ_A изоморфизм групп $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ и \mathbb{Z} такой, что $\phi_A(a) = 1$.

Пусть X — многообразие и $h : X \rightarrow X$ — гомеоморфизм. Тогда множество $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$ является циклической группой с образующим элементом h относительно операции композиции. Кроме того, отображение $\zeta(h^n, x) = h^n(x)$ определяет действие группы \mathcal{H} на X . Введем на многообразии X отношение эквивалентности следующим условием: точки $x, y \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $y = h^n(x)$. Будем обозначать через X_h множество классов эквивалентности и через $p_{X_h} : X \rightarrow X_h$ естественную проекцию, ставящую в соответствие любой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности. Множество X_h , оснащенное фактортопологией, называется *пространством орбит действия \mathcal{H} на X* .

Обозначим через $p_{X_h*} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X_h)$ гомоморфизм, индуцированный проекцией $p_{X_h} : X \rightarrow X_h$.

Предположим, что группа $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на X . Тогда, согласно [5, теорема 17.1] естественная проекция $p_{X_h} : X \rightarrow X/h$ является накрывающим отображением, т. е. сюръективным отображением, которое обладает следующим свойством: для любой точки $x \in X/h$ существует окрестность $U \in X/h$ такая, что $p_{X_h}^{-1}(U)$ является объединением открытых попарно непересекающихся множеств V_j ,

$j \in J$, таких, что для любого $j \in J$ ограничение $p_{x_h}|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ является гомеоморфизмом.

Пусть X — связное³ многообразие и группа $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на X . Определим отображение $\alpha_{x_h} : \pi_1(X_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ следующим образом. Обозначим через $p_{x_h}^{-1}(x)$ полный прообраз точки $x \in X_h$. Из определения проекции p_{x_h} следует, что $p_{x_h}^{-1}(x)$ — орбита некоторой точки $\tilde{x} \in p_{x_h}^{-1}(x)$. Пусть $[c] \in \pi_1(X_h, h)$ и c — некоторая петля, принадлежащая классу $[c]$. Тогда существует единственный путь $\tilde{c}(t)$ с началом в точке \tilde{x} ($\tilde{c}(0) = \tilde{x}$), накрывающий петлю c ($p_{x_h}(\tilde{c}) = c$) [5, теорема 17.6]. Поэтому существует элемент $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$. Положим $\alpha_{x_h}([c]) = \phi_n(h^n)$.

Из [5, теорема 19.1, лемма 19.2] вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 2.1 *Отображение $\alpha_{x_h} : \pi_1(X_h) \rightarrow \mathbb{Z}$ является эпиморфизмом (сюръективным гомоморфизмом) и его ядро совпадает с подгруппой $p_{x_h*}(\pi_1(X))$.*

Следующее предложение, вытекающее из [5, теорема 21.7], является ключевым для доказательства теоремы 1.1.

Предложение 2.2 *Пусть X, Y — связные многообразия и $h : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ — гомеоморфизмы такие, что группы $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{G} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действуют свободно и разрывно на X, Y соответственно. Пусть $\varphi : X_h \rightarrow Y_g$ — гомеоморфизм такой, что $\alpha_{x_h} = \alpha_{y_g} \circ \varphi_*$. Тогда существует единственный гомеоморфизм $\tilde{\varphi} : X \rightarrow Y$, сопрягающий гомеоморфизмы h и g .*

3. Доказательство основного результата

Ограничения гомеоморфизмов h, a_n на множество $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ порождают группы $\mathcal{H} = \{h^i|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}, i \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{A} = \{a_n^i|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}, i \in \mathbb{Z}\}$, действующие на $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ свободно и разрывно.

В силу предложения 2.2 для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать, что пространства V_h, V_{a_n} гомеоморфны. Сначала установим топологический тип пространства V_{a_n} .

Для $n \geq 1$ положим $\mathbb{B}_r^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}, D_{a_n} = \mathbb{B}_1^n \setminus \text{int } \mathbb{B}_{1/2}^n$. Обозначим через \mathbb{S}^{n-1} границу единичного шара \mathbb{B}_1^n .

Множество D_{a_n} является фундаментальной областью действия группы \mathcal{A} : для любой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ найдется такое $i \in \mathbb{Z}$, что $a_n^i(x) \in D_{a_n}$; среди внутренних точек D_{a_n} нет точек, принадлежащих одной орбите отображения a_n , а для каждой точки $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ найдется такая точка $y \in a_n(\mathbb{S}^{n-1})$, что $y = a_n(x)$. Поэтому пространство, полученное из D_{a_n} отождествлением точек $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $a_n(x)$ (по всем $x \in \mathbb{S}^{n-1}$), гомеоморфно пространству V_{a_n} . Поскольку a_n является сохраняющим ориентацию отображением, то в результате операции склеивания получим пару окружностей $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1$ при $n = 1$, тор $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ при $n = 2$ и прямое произведение $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ в случае $n \geq 3$. Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 3.1 *Пространство V_{a_n} гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, n \geq 1$.*

³Заметим, что любое связное n -многообразие является линейно связным [5, с. 117-119]

Покажем, что пространство V_h имеет тот же топологический тип, что и пространство V_{a_n} .

В случае $n = 1$ из того факта, что h — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, следует, что h является возрастающей функцией. Поэтому $h(\mathbb{B}_1^1) \subset \text{int } \mathbb{B}_1^1$, следовательно, фундаментальная область $D_h = \mathbb{B}_1^1 \setminus \text{int } h(\mathbb{B}_1^1)$ действия группы \mathcal{H} , как и область D_{a_1} , является парой отрезков, а пространство орбит V_h гомеоморфно паре окружностей. Таким образом, для $n = 1$ теорема 1.1 доказана.

В случае $n \in \{2, 3\}$ идея доказательства теоремы состоит в непосредственной модификации шара \mathbb{B}^n для получения шара B^n такого, что $h(B^n) \subset \text{int } B^n$. В размерности четыре и выше такая модификация затруднительна, поэтому доказательство требует другой техники. Для перехода к этой технике опишем предварительные свойства пространства V_h .

Предложение 3.2 *При $n \geq 3$ пространство орбит V_h является ориентируемым гладким замкнутым многообразием с фундаментальной группой, изоморфной группе \mathbb{Z} .*

Доказательство. Структура гладкого замкнутого многообразия на пространстве V_h непосредственно индуцируется естественной проекцией $p_h : \mathbb{R}^n \rightarrow V_h$, которая, как показано в предыдущем разделе, является накрывающим отображением. Так как h является по условию сохраняющим ориентацию, то V_h ориентируемо. Поскольку при $n \geq 3$ многообразие $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ односвязно, то оно является универсальным накрытием для V_h и фундаментальная группа $\pi_1(V_h)$ изоморфна группе \mathcal{H} , которая, в свою очередь, изоморфна группе \mathbb{Z} .

Доказательство завершено.

В работе [3], где теорема 1.1 доказана для случая $n \geq 6$, далее использовался результат, принадлежащий Броудеру и Левайну: ориентируемое гладкое замкнутое многообразие размерности шесть и выше, фундаментальная группа которого изоморфна группе \mathbb{Z} , является пространством локально-тривиального расслоения над окружностью (для $n = 3$ аналогичный результат доказан Сталлингсом). Далее устанавливалось, что слой этого расслоения имеет гомотопический тип сферы S^{n-1} (поскольку накрывающее пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ имеет тот же гомотопический тип). Поскольку существует только два негомеоморфных локально-тривиальных расслоения над окружностью со слоем S^{n-1} (ориентируемое, представляющее собой прямое произведение $S^{n-1} \times S^1$, и неориентируемое), то V_h гомеоморфно $S^{n-1} \times S^1$, что доказывает теорему 1.1. Результат, аналогичный теореме Броудера и Левайна до настоящего времени не удалось доказать для многообразий размерности четыре и пять, поэтому проведем доказательство в обход этих результатов.

Пусть $n \geq 3$. Вначале покажем, что существует такое $i_* > 0$, что $h^{i_*}(\mathbb{B}_1^n) \subset \text{int } \mathbb{B}_1^n$. Из определения класса следует, что для любой точки $x \in S^{n-1}$ найдется такое $i_x > 0$, что $h^i(x) \in \text{int } \mathbb{B}_1^n$ для всех $i > i_x$. Поскольку h — гомеоморфизм, то для любой точки x существует $\varepsilon > 0$ такое, что $h^i(y) \in \text{int } \mathbb{B}_1^n$ для любой точки y из ε -окрестности $O_\varepsilon(x)$ точки x и для всех $i > i_x$. Объединение $\{O_\varepsilon(x) \cap S^{n-1}, x \in S^{n-1}\}$ образует открытое покрытие сферы S^{n-1} . Выберем из него конечное подпокрытие и обозначим через x_1, \dots, x_m точки сферы S^{n-1} , окрестности которых образуют это конечное подпокрытие. Тогда $i_* = \max\{x_1, \dots, x_m\}$ — искомое число.

Обозначим через $V_{h^{i_*}}$ пространство орбит действия группы, порожденной степенями ограничения отображения h^{i_*} на множество $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Множество $D_{h^{i_*}} = \mathbb{B}_1^n \setminus h^{i_*}(\text{int } \mathbb{B}_1^n)$ является фундаментальной областью действия этой группы. Аналогично доказательству предложения 3.1 получим, что $V_{h^{i_*}}$ гомеоморфно прямому произведению $S^{n-1} \times S^1$.

Обозначим через $p_{h^{i_*}} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow V_{h^{i_*}}$, $p_h : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow V_h$ естественные проекции и определим отображение $\tau_{i_*} : V_{h^{i_*}} \rightarrow V_{h^{i_*}}$ формулой $\tau_{i_*} = p_{h^{i_*}} h p_{h^{i_*}}^{-1}$, где $p_{h^{i_*}}^{-1}(y)$ означает полный прообраз точки y , т. е. множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ таких, что $y = p_{h^{i_*}}(x)$. Отметим, что $\tau_{i_*}^{i_*} = id$ и $V_h = V_{h^{i_*}} / \tau_{i_*}$.

Напомним, что гомеоморфизм $\tau : X \rightarrow X$ называется инволюцией, если $\tau^2 = id$.

Далее будем использовать следующий результат работ [7] (для $n = 3$) и [6] (для $n \geq 4$).

Предложение 3.3 Пусть $\tau : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, $n \geq 3$ — инволюция без неподвижных точек. Тогда фактор-пространство $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) / \tau$ гомеоморфно одному из следующих многообразий: либо $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, либо неориентируемому локально-тривиальному расслоению $\mathbb{S}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ над окружностью, либо прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$, либо связной сумме $\mathbb{R}P^n \sharp \mathbb{R}P^n$ вещественных проективных пространств.

Если $i_* = 2$, то из предложения 3.3 следует, что V_h гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ (что доказывает теорему 1.1). Действительно, в этом случае отображение τ_{i_*} является инволюцией без неподвижных точек, поэтому многообразие $V_h = V_{h^{i_*}} / \tau_{i_*}$ гомеоморфно одному из четырех многообразий, описанных в предложении 3.3. В силу предложения 3.2 пространство V_h ориентируемо и его фундаментальная группа изоморфна группе \mathbb{Z} , следовательно, V_h не может быть гомеоморфно неориентируемому расслоению над окружностью и многообразиям $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$, $\mathbb{R}P^n \sharp \mathbb{R}P^n$, фундаментальные группы которых отличны от \mathbb{Z} . Таким образом, V_h гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Если $i_* > 2$, то найдется целое r такое, что $2^r \leq i_* < 2^{r+1}$. Положим $g_r = h^{2^r}$.

Пусть $\xi : V_{h^{i_*}} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ — произвольный гомеоморфизм и $S_0^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{O\}$ — такая сфера, что $\xi p_{h^{i_*}}(S_0^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1} \times \{z\}$, где $z \in \mathbb{S}^1$ — произвольная точка. Тогда $h^i(S_0^{n-1}) \cap S_0^{n-1} = \emptyset$ для любого $i \geq i_*$, в частности $g_r(S_0^{n-1}) \cap S_0^{n-1} = \emptyset$. В силу теоремы кольца множество $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{O\}$, ограниченное сферами $S_0^{n-1}, g_r(S_0^{n-1})$, гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$; следовательно, пространство орбит V_{g_r} гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Тогда в силу аргументов, аналогичных изложенным выше, и предложения 3.3, получим, что пространство орбит $V_{g_{r-1}}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Если $r = 1$, то $g^{r-1} = h$ и доказательство закончено. Если $r > 1$, то продолжим процесс и через $(r - 1)$ шагов получим требуемый факт.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ и гранта Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kerekjarto B. Topologische charakterisierung der linearen abbildungen // Acta Scientiarum Mathematicarum. 1934. Vol. 6, No. 4-4. pp. 235–262.
2. Homma T., Kinoshita S. On a topological characterization of the dilatation in E^3 // Osaka Math. J. 1954. Vol. 6, No. 1. pp. 135–143.
3. Husch L. S. A topological characterization of the dilatation in E^n // Proceedings of the American Mathematical Society. 1971. Vol. 28, No. 1. pp. 234–236.
4. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New York: Springer, 1982. 198 p.

5. Kosniowski Cz. A first course in algebraic topology. New York: Cambridge University Press, 1980. 269 p.
6. Jahren B., Kwasik S. Free involutions on $S^1 \times S^n$ // *Math. Ann.* 2011. Vol. 351, No. 2. pp. 281–303.
7. Tao Y. On fixed point free involutions of $S^1 \times S^2$ // *Osaka Math. J.* 1962. Vol. 14, No. 1. pp. 145–152.

Поступила 1.08.2020

MSC2020 37C15

On a class of topological conjugacy with a homothety

© E. Gurevich¹, A. Makarov²

Abstract. We consider a class $H(\mathbb{R}^n)$ of orientation-preserving homeomorphisms of Euclidean space \mathbb{R}^n such that for any homeomorphism $h \in H(\mathbb{R}^n)$ and for any point $x \in \mathbb{R}^n$ a condition $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) \rightarrow O$ holds, where O is the origin. It is proved that for any $n \geq 1$ an arbitrary homeomorphism $h \in H(\mathbb{R}^n)$ is topologically conjugated with the homothety $a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, given by $a_n(x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$. For a smooth case under the condition that all eigenvalues of the differential of the mapping h have absolute values smaller than one, this fact follows from the classical theory of dynamical systems. In the topological case for $n \notin \{4, 5\}$ this fact is proven in several works of 20th century, but authors do not know any papers where it would be proven for $n \in \{4, 5\}$. This paper fills this gap.

Key Words: topological classification of homeomorphisms, topological conjugacy with dilatation, factor-space, homothety

REFERENCES

1. B. Kerekjarto, “Topologische charakterisierung der linearen abbildungen”, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **6**:4-4 (1934), 235–262.
2. T. Homma, S. Kinoshita, “On a topological characterization of the dilatation in E^3 ”, *Osaka Math. J.*, **6**:1 (1954), 135–143.
3. L. S. Husch, “A Topological characterization of the dilation in E^n ”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **28**:1 (1971), 234–236.
4. J. Palis, W. Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer., New York, 1982, 198. p.
5. Cz. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, New York, 1980, 269 p.

¹**Elena Ya. Gurevich**, Associate Professor, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

²**Aleksey A. Makarov**, Undergraduate, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2447-4836>, leomakar@mail.ru

6. B. Jahren, S. Kwasik, “Free involutions on $S^1 \times S^n$ ”, *Math. Ann.*, **351**:2 (2011), 281–303.
7. Y. Tao, “On fixed point free involutions of $S^1 \times S^2$ ”, *Osaka Math. J.*, **14**:1 (1962), 145–152.

Submitted 1.08.2020