

УДК 532.529:541.182

О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры

© М. С. Дерябина¹, С. И. Мартынов²

Аннотация. Проведено моделирование течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через пористую структуру, которая представлялась в виде системы неподвижных частиц. Внутри пористой структуры имеются подвижные частицы, являющиеся маркерами микротечения жидкости в ячейках. Течение вязкой жидкости происходит вдоль плоской стенки, ограничивающей с одной стороны пористую структуру. В расчётах учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, (как подвижных, так и неподвижных) между собой и с плоскостью. Проведено компьютерное моделирование такого рода течения через модельные структуры, образованные, соответственно, из 441, 567 периодически и 478 случайно расположенных неподвижных частиц эффективного размера и различным положением плоской стенки. Размеры подвижных частиц, помещённой в вязкую жидкость, составляли 0,2 от размера эффективных частиц. Результаты численного моделирования показали, что внутри структуры реализуются микротечения с противоположным направлением скорости, что следует из закона Дарси. Такая сложная динамика течения внутри пористой структуры означает, что использование осреднённых уравнений фильтрации жидкости даёт неверную картину течения на размерах пор и может служить объяснением нелинейной зависимости средней скорости фильтрации от приложенного градиента давления.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, пористая структура, гидродинамическое взаимодействие частиц, микротечение

1. Введение

В XIX в. были открыты линейные законы теплопроводности (закон Фурье [1]), диффузии (законы Фика [2]), фильтрации (закон Дарси [3]), которые являются основой для различных расчетов и в настоящее время. В интегральном виде они имеют подобную форму записи, связывающую расход определяемой величины через площадь сечения образца среды с разностью значений скалярного параметра, определяющего этот расход, на длине этого образца. Переход к дифференциальному виду также даёт подобную форму записи этих законов. Однако имеются и существенные отличия закона Дарси от первых двух, связанные как с формой записи (коэффициент пропорциональности содержит два параметра), так и с масштабом, на котором он имеет смысл. Все законы получены в предположении о движении одной сплошной среды в другой и содержат

¹Дерябина Мария Сергеевна, исполнитель гранта РФФИ, ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет», (628000, Россия, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5588-6740>, deryabinams@mail.ru

²Мартынов Сергей Иванович, главный научный сотрудник, БУ ВО «Сургутский государственный университет», (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1.), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

коэффициент, характеризующий это относительное движение: коэффициенты теплопроводности, диффузии и проницаемости. Однако в законе Дарси присутствует также параметр, характеризующий движущуюся среду – коэффициент вязкости жидкости.

Кроме того, характерный минимальный масштаб, на котором можно применять закон фильтрации, существенно (на порядки) больше, чем для первых двух. Этот масштаб определяется размерами пор в среде, по которой движется жидкость, и которые на несколько порядков больше соответствующих микроразмеров, используемых в первых двух законах. Характерный минимальный масштаб должен быть намного больше этих размеров для применения гипотезы сплошной среды, используемой при записи этих законов, поэтому закон Дарси не применим на масштабах пор.

Между тем, современные технологии добычи нефти и очистки с помощью фильтров требуют более глубокого понимания механизмов процессов, происходящих именно на размерах пор (процесс вытеснения нефти с использованием поверхностно-активных веществ, динамика многофазного течения). Используемые для этого модели отдельных пор не дают полного представления о течении на этих масштабах, т. к. рассматриваются изолированно от других пор, движение жидкости в которых влияет также и на течение в выделенной. Таким образом, проблема моделирования течения вязкой жидкости в пористой среде по-прежнему является одной из актуальных в механике жидкости. Это обусловлено не только математической сложностью самой задачи, но и чрезвычайно широкой областью возможных приложений результатов моделирования: извлечение нефти и газа из пласта, создание бытовых и промышленных фильтров для очистки жидкости и газа и другие подобные прикладные задачи.

В настоящее время с развитием информационных технологий стало возможным моделирование течения жидкости в пористой среде на масштабе пор [4–7]. Задача в этом случае сводится к нахождению численного решения уравнений гидродинамики для течения жидкости в некоторой пористой среде, геометрия которой воспроизводит структуру реального пористого материала. При решении такой задачи используются как известные методы численного решения уравнений гидродинамики, так и методы компьютерной томографии образца материала для моделирования его структуры. Проблема данного подхода состоит в том, что его реализация требует значительных вычислительных ресурсов как на стадии решения уравнений гидродинамики, так и на стадии создания цифрового образца пористого материала. Например, реальный образец пористого материала в виде кубика размерами в 600 мкм по каждой стороне требует 109 пикселей для его цифровой модели [8]. Кроме того, реализация самих численных методов интегрирования уравнений гидродинамики с граничными условиями на сложных геометрических поверхностях представляет собой не менее трудную задачу, связанную с созданием расчетных сеток, учитывающих такую геометрию границ поровых каналов. Поэтому несмотря на то, что современные возможности вычислительной техники существенно выросли и используются новые алгоритмы создания расчетных сеток, применение такого подхода все еще представляет собой сложную вычислительную задачу, для решения которой требуется большой объем вычислений. В связи с этим в настоящее время ставится задача получения более простых цифровых моделей пористой среды, сохраняющих ее основные средние характеристики, такие как пористость и проницаемость, но упрощающие ее геометрию.

Для решения этой задачи используются различные подходы [9–17], однако и в этом случае для их реализации требуются значительные вычислительные затраты. Поэтому в работе [18] для понимания гидродинамических процессов, происходящих на масштабах ячеек пористой среде, предлагается использовать модель фиктивного грунта, состоящего из большого числа твердых неподвижных сферических частиц, образующих

случайную структуру в некотором конечном объеме и помещенных в безграничную несжимаемую вязкую жидкость. Возможно учитывать наличие в жидкости плоской стенки вблизи от рассматриваемой структуры частиц в качестве модели непроницаемой поверхности, вдоль которой происходит течение жидкости с определенной скоростью.

Для визуализации микротечений внутри такой структуры в нее помещаются частицы меньшего радиуса, чем эффективный радиус частиц, образующих пористую структуру, которые могут свободно перемещаться в жидкости. При расчете течения жидкости внутри рассматриваемой структуры и динамики системы свободных частиц записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных как с гидродинамическим взаимодействием всех частиц – подвижных и неподвижных, так и с внешним воздействием. Задача решается в приближении малых чисел Рейнольдса.

Гидродинамическое взаимодействие частиц вычисляется с использованием результатов работ [19], позволяющих учитывать такое взаимодействие для большого числа частиц в различных потоках жидкости. При численном моделировании динамики подвижных частиц при течении вязкой жидкости через такую пористую среду вместо реальных размеров частиц и параметров жидкости задаются их модельные значения. Это связано с увеличением точности численных расчетов, когда вместо реального параметра, например, размера частиц, имеющего порядок 10^4 см, задается модельный размер 1 см. Формулы перехода от модельных параметров к реальным и наоборот приводятся в работах [18]. Полученные результаты моделирования [18] показали, что при заданном вдали от структуры однородном потоке жидкости движение свободных частиц, а следовательно, и течение жидкости в пористой среде, происходит главным образом поперек заданного направления потока (извилистость траектории). Кроме того, была показана возможность закупорки выхода из ячейки (кальматация) движущейся в ней частицей, когда она оказывается в ловушке между эффективными частицами и не может дальше двигаться.

Согласно закону Дарси, фильтрация жидкости через пористую среду происходит при наличии градиента давления в жидкости. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу о течении вязкой жидкости через ячейки пористой среды при заданном градиенте давления. Сложность такой задачи заключается в том, что известное решение Пуазейля реализуется для течений с ограниченным размером поперечного сечения. При увеличении характерного поперечного размера увеличивается и поперечная составляющая скорости жидкости и известное одномерное решение перестает иметь физический смысл. В работе [20] подробно рассмотрен этот случай и найдено приближенное периодическое решение течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические решетки пластин и стержней при продольной и поперечной их ориентации относительно вектора градиента давления. В настоящей работе с использованием результатов работ [18–19], моделируется течение вязкой жидкости через ограниченную по размерам пористую структуру при заданном градиенте давления и наличии плоской стенки, вдоль которой происходит течение. Цель моделирования – определить характер возможных микротечений, возникающих в пористой структуре при наличии заданного градиента давления.

2. Постановка задачи

Рассматривается модель фиктивного грунта, состоящего из N_1 твердых сферических частиц, образующих случайную структуру в объеме V в несжимаемой жидкости плотности ρ и вязкости η . Случайное распределение частиц в жидкости происходит

ло по следующему алгоритму: выделялся некоторый ограниченный объем в жидкости и считалось, что каждая частица с равной вероятностью может оказаться в любой точке выделенного объема, если эта точка еще не занята другой частицей. В качестве ограниченного объема выбирался прямоугольный параллелепипед со сторонами $V = 2l \times 2h \times 2d$ вдоль осей OX, OY, OZ , соответственно. Эффективный радиус частиц равен b . Для того чтобы полученная структура была жесткой и моделировала пористое тело, на частицы накладываются связи, препятствующие их поступательному и вращательному перемещению. Объем жидкости ограничен плоскостью, проходящей вдоль одной из граней выделенного объема и моделирующей непроницаемую поверхность, вдоль которой происходит течение жидкости со скоростью \mathbf{U} . Внутри полученной случайной структуры определенным образом помещаются N_2 частиц меньшего радиуса $c < b$, которые могут свободно перемещаться в жидкости. Данные частицы служат маркерами для визуализации микротечений в пористой структуре, а также моделируют наличие дисперсной фазы в жидкости. В приближении малых чисел Рейнольдса система уравнений течения вязкой жидкости имеет вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p. \quad (2.1)$$

На поверхности неподвижной частицы с номером k должны выполняться следующие граничные условия:

$$u_i = 0, \quad |\mathbf{x}^k| = b, \quad k = 1, \dots, N_1. \quad (2.2)$$

На поверхности подвижной частицы с номером k должны выполняться следующие граничные условия:

$$u_i = V_i^k + \Gamma_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{x}^k| = c, \quad k = 1, \dots, N_2. \quad (2.3)$$

Условия для скорости жидкости на поверхности S плоской стенки имеют вид:

$$u_i = 0, \quad \mathbf{x}^k \subset S, \quad (2.4)$$

где \mathbf{V}^k – абсолютная линейная скорость; Γ_{ij}^k – тензор угловой скорости; \mathbf{x}^k – положение произвольной точки жидкости относительно центра частицы с номером k .

Далеко от частиц скорость и давление жидкости равны:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{при } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

где p_0 – невозмущенное давление в жидкости.

Для расчета динамики системы свободных частиц записываются уравнения движения каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и сил реакции связей. Для неподвижных частиц получим:

$$\mathbf{F}_1^k + \mathbf{R}^k = 0, \quad \mathbf{M}_1^k + \mathbf{T}^k = 0, \quad (2.6)$$

где \mathbf{F}_1^k – сумма внешних сил; \mathbf{R}^k – реакции связей, удерживающих частицы в заданном положении; \mathbf{M}_1^k – сумма моментов внешних сил; \mathbf{T}^k – сумма моментов реакций связей, наложенных на неподвижную частицу с номером k .

В квазистационарном приближении уравнения динамики подвижных частиц записываются в виде:

$$\mathbf{F}_2^k = 0, \quad \mathbf{M}_2^k = 0, \quad (2.7)$$

где \mathbf{F}_2^k – сумма сил; \mathbf{M}_2^k – сумма моментов сил, действующих на подвижную частицу с номером k со стороны жидкости.

Скорость жидкости \mathbf{U} вдоль плоскости вдали от структуры имеет вид:

$$U_y = U_{0y} + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} z^2, \quad U_x = 0, \quad U_z = 0.$$

Градиент давления считался направленным вдоль плоскости, ограничивающей вязкую жидкость, а постоянная скорости u_{0y} выбиралась таким образом, чтобы на этой плоскости выполнялись граничные условия $U_y = 0$.

Полученная система гидродинамических уравнений 2.1 и уравнений динамики частиц 2.6–2.7 с граничными условиями 2.2–2.5 решалась методом, разработанным в работе [19]. Метод позволяет учитывать гидродинамическое взаимодействие всех частиц – подвижных и неподвижных, и вычислять силы и моменты, действующие на частицы со стороны жидкости. Согласно этому методу, решение системы уравнений 2.1, удовлетворяющих условию 2.5 представляется в виде мультипольного разложения возмущений скорости и давления несущего потока каждой частицей. Мультиполюсы содержат тензорные коэффициенты, которые находятся из решения алгебраической системы уравнений, получаемой из граничных условий для скорости на поверхности частиц 2.2–2.3. При наличии плоской стенки для каждой реальной частицы вводится фиктивная, расположенная симметрично реальной относительно плоскости [19]. Возмущение скорости и давления от фиктивной частицы выражаются через тензорные коэффициенты реальных частиц и такие, что граничные условия для скорости на плоскости 2.4 выполняются точно. При наличии двух и более плоскостей количество фиктивных частиц необходимо брать еще больше, но граничные условия на каждой плоскости в этом случае выполняются приближенно [19]. Поэтому в работе был рассмотрен случай только одной плоской поверхности, ограничивающей объем жидкости. Аналитические выражения для давления и скорости жидкости, удовлетворяющих уравнениям 2.1 и граничным условиям 2.2–2.5 можно найти в работе [19], и в данной статье из-за их громоздкости не приведены.

Как следует из работы [19], нахождение тензорных коэффициентов сводится к решению алгебраической системы уравнений, получаемой из условий 2.2, 2.2), 2.3. Скорости подвижных частиц находятся из условия 2.5, а реакции связей – из 2.6.

Из-за большого количества тензорных коэффициентов в выражениях для определения скорости жидкости и частиц, а также реакций связей, при численном решении применялся специальный программный комплекс [18–19], который позволяет визуализировать движение подвижных частиц.

3. Результаты моделирования течения в ячейках пористой среды

Поскольку значения реальных параметров пористой среды, а следовательно, и параметров фиктивного грунта, достаточно малы, то это затрудняет как нахождение численного решения системы уравнений, так и визуализацию динамики подвижных частиц. Поэтому, аналогично работе [18], применялся метод подобия: вместо реальных

размеров частиц b , c и таких параметров жидкости как ее вязкость η и скорость \mathbf{U} течения, при компьютерном моделировании задаются их модельные значения \hat{b} , \hat{c} , $\hat{\eta}$, $\hat{\mathbf{U}}$. Плотность жидкости ρ считается одинаковой для модельной и реальной жидкостей. Из условия подобия реального и модельного течений получаем формулы перехода от модельных к реальным параметрам и наоборот [18], в зависимости от того, что требуется. Модельные значения параметров равны: $\hat{b} = 1$ см, $\hat{\eta} = 1\text{г}/(\text{см}\cdot\text{сек})$.

Были рассмотрены структуры из периодически и случайно расположенных частиц в объеме V жидкости. Первая периодическая структура представляет собой кубическую решетку частиц, расположенных в прямоугольной призме со сторонами, образованными 7 частицами по оси OX , 9 – по оси OY и 7 – по оси OZ . Всего структура содержит 441 частицу. Начало системы координат XYZ находится в центре тяжести призмы, и оси направлены вдоль ее сторон. Подвижные частицы размера $\hat{c} = 0.2\hat{b}$ располагались внутри периодической структуры, и всего было рассмотрено 6 таких частиц. Моделирование динамики подвижных частиц через такую структуру проводилось с целью определения микротечений вязкой жидкости внутри нее. Для этого их положение выбиралось таким образом, чтобы определить скорость вблизи и вдали от плоской поверхности, ограничивающей течение вязкой жидкости, на краях и в центре периодической структуры (Рис. 3.1).

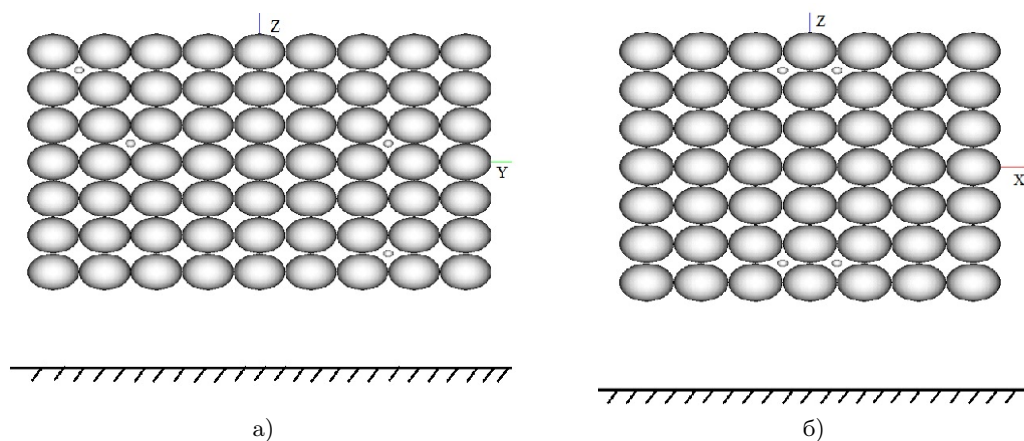


Рис. 3.1. Характерная периодическая структура неподвижных частиц с подвижными частицами внутри и плоской стенкой при $z = -9$ относительно скорости потока а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

Для контроля полученных результатов были рассмотрены случаи симметричного расположения частиц относительно плоскости YOZ (результаты вычислений должны давать симметричные скорости их движения), а также вариант, при котором отсутствует симметрия в их расположении. Вторым случаем получался из первого путем переноса части симметричных частиц в новое положение, при этом остальные сохраняли свои прежние начальные координаты. Для изучения влияния плоской поверхности на микро течения вязкой жидкости внутри периодической структуры были рассмотрены следующие случаи ее расположения: 1) плоская поверхность, ограничивающая вязкую жидкость, расположена сверху структуры ($z = 11$); 2) плоская поверхность отсутствует; 3) плоскость расположена снизу структуры ($z = -11$); 4) плоскость расположена снизу структуры ($z = -9$). С целью изучения влияния градиента давления на микро течения в последнем случае расположения плоской поверхности рассматри-

валось течение с удвоенным градиентом давления. Результаты моделирования первых трех случаев расположения плоской поверхности для симметричного расположения части подвижных частиц приведены в сводной таблице (табл. 3.1). Скорость внешнего потока жидкости равна $\hat{U}_y = 0.121 - 0.001z^2$.

Таблица 3.1. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в периодической структуре из 441 частицы (1 строка – стенка сверху, 2 строка – стенки нет, 3 строка – стенка снизу)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-1	-7	5	-4.576e-3	10.09e-3	8.085e-03	0.4
				-5.105e-3	7.48e-3	6.299e-3	
				-4.304e-3	7.638e-3	7.339e-3	
2	1	-7	5	4.476e-3	10.089e-3	8.085e-3	0.4
				5.105e-3	7.48e-3	6.299e-3	
				4.304e-3	7.638e-3	7.339e-3	
3	0	-5	1	0	-1.487e-3	-0.667e-3	0.4
				0	-1.673e-3	-0.9e-3	
				0	-2.036e-3	-0.732e-3	
4	0	5	1	0	-1.137e-3	0.899e-3	0.4
				0	-1.319e-3	0.995e-3	
				0	-1.447e-3	1.111e-3	
5	-1	5	-5	1.159e-3	0.696e-3	-2.15e-3	0.4
				1.578e-3	0.39e-3	-2.22e-3	
				1.115e-3	1.673e-3	-3.468e-3	
6	1	5	-5	-1.1587e-3	0.696e-3	-2.15e-3	0.4
				-1.5781e-3	0.39e-3	-2.22e-3	
				-1.115e-3	1.673e-3	-3.468e-3	

На Рис. 3.2 представлены полученные результаты для скоростей частиц в двух проекциях. Необходимо отметить, что четыре частицы располагались в точках пересечения осей продольных и поперечных каналов, образованных частицами в периодической решетке. Поперечные размеры каналов больше размеров подвижных частиц, примерно, в два раза, что подразумевает возможность их прямолинейного движения. Тем не менее скорость частиц, а следовательно, и скорость жидкости внутри структуры имеет явно выраженное отклонение от прямолинейного направления движения. Расположение двух частиц, имеющих отрицательные проекции скорости относительно направления внешнего потока, отличалось от других тем, что одна из осей, а именно проходящая вдоль продольного канала, была сдвинута на величину \hat{b} так, что центр подвижной и одного из слоев неподвижных частиц лежат в одной плоскости, параллельной YOZ . Другими словами эти подвижные частицы не имели возможности двигаться прямо по потоку, но могли двигаться по оси поперечного внешнему потоку канала. Тем не менее расчеты дали отрицательные проекции скорости таких частиц на оси OY и OZ , что означает наличие внутреннего микротечения в противоположном внешнему потоку направлении.

Более четко наличие таких внутренних микротечений видно в случае несимметрично расположенных частиц, для которых результаты расчетов динамики приведены в табл. 3.2 и на Рис. 3.3.

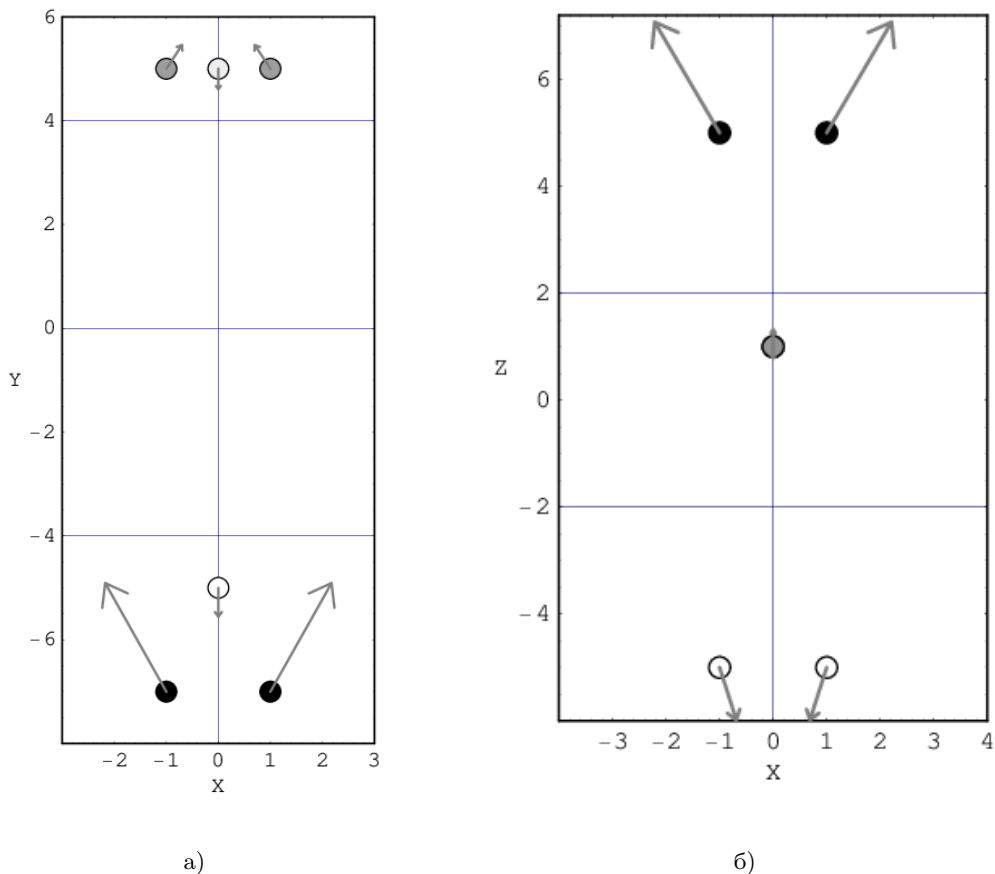


Рис. 3.2. Скорости симметрично расположенных подвижных частиц относительно скорости потока: а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

Картина полученных внутренних микротечений качественно не меняется для всех случаев расположения плоской поверхности относительно периодической структуры, что следует из результатов, приведенных в табл. 3.1 и табл. 3.2. Во всех случаях имеются микротечения, направленные против внешнего потока.

Влияние на динамику подвижных частиц положения плоскости и изменение градиента давления представлено в табл. 3.2. Новое положение плоскости соответствует $z = -9$, а внешний поток задается как $\hat{U}_y = 0.081 - 0.001z^2$ и с удвоенным градиентом давления $\hat{U}_y = 0.162 - 0.002z^2$. Как видно из таблицы, качественных изменений в динамике подвижных частиц не происходит: во всех случаях присутствуют микротечения, направленные против основного потока. Следует отметить, что с удвоением градиента давления удваиваются и скорости микротечений, в т. ч. направленных против внешнего потока. Это свидетельствует о неизменности структуры микропотоков внутри пористой среды.

Кроме того, в случае расположения плоскости при $z = -11$ моделировалась динамика подвижных частиц при увеличении размеров структуры. Для этого сверху и снизу

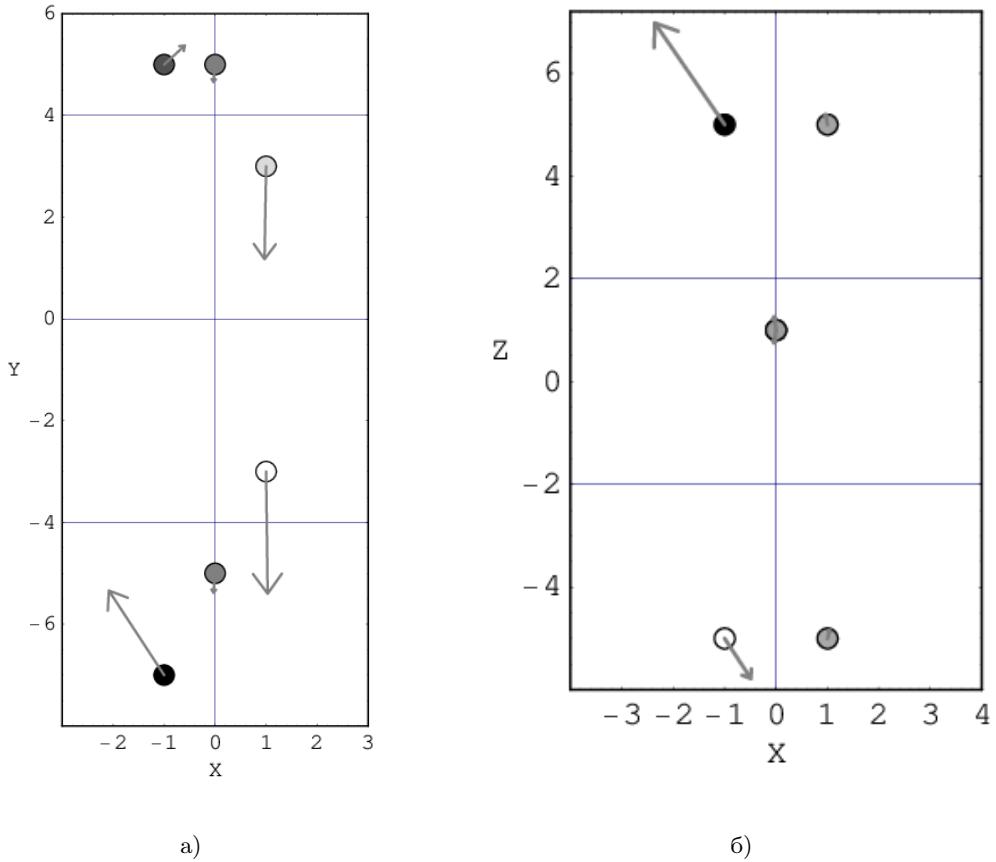


Рис. 3.3. Скорости асимметрично расположенных подвижных частиц относительно скорости потока: а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

имеющейся структуры из 441 частицы добавлялись слои по 63 частиц. Полученная структура содержала уже 567 частиц. Положение подвижных частиц такое же, как и в случае несимметрично расположенных. Рассматривалось течение вязкой жидкости с такой же скоростью, как и в случае первоначальной периодической структуры из 441 частицы $\hat{U}_y = 0.121 - 0.001z^2$, так и с удвоенным по величине значением градиента давления $\hat{U}_y = 0.241 - 0.002z^2$. Результаты расчетов скорости подвижных частиц приведены в табл. 3.3. Микротечения с отрицательной составляющей скоростью также образуются и в этом случае.

Аналогичные результаты были получены и для периодических решеток с числом неподвижных частиц 27 и 75, что позволило проводить расчеты на имеющейся вычислительной технике с точностью не менее 10^{-7} , в то время как в настоящей работе точность расчетов составляла 10^{-4} . В данной работе эти результаты не приводятся.

Кроме периодической, также была рассмотрена структура из 478 случайно расположенных неподвижных частиц, внутри которой располагались подвижные частицы. Случайное распределение частиц в жидкости происходило по следующему алгоритму: выделялся некоторый ограниченный объем в жидкости и считалось, что каждая части-

Таблица 3.2. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в периодической структуре из 441 частицы (1 строка – стенка снизу $z = -11$, 2 строка – стенки снизу $z = -9$, 3 строка – стенка снизу $z = -9$ и градиент давления в 2 раза больше)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-1	-7	5	-5.218e-3 -1.724e-3 -3.45e-3	7.976e-3 0.528e-3 1.05e-3	7.597e-03 0.829e-3 1.67e-3	0.4
2	0	-5	1	0 0 0	-1.838e-3 -1.504e-3 -3.008e-3	-0.954e-3 0 0	0.4
3	1	-3	-5	0.134e-3 1.331e-3 2.662e-3	-11.55e-3 -3.074e-3 -6.163e-3	-0.610e-3 -0.133e-3 -0.268e-3	0.4
4	1	3	5	-0.145e-3 -0.283e-3 -0.566e-3	-8.784e-3 -0.873e-3 -1.764e-3	0.771e-3 0.141e-3 0.282e-3	0.4
5	0	5	1	0 0 0	-1.653e-3 -1.42e-3 -2.839e-3	0.992e-3 0 0	0.4
6	-1	5	-5	1.964e-3 2.084e-3 4.17e-3	1.804e-3 0.471e-3 9.318e-3	-2.992e-3 -0.61e-3 -1.223e-3	0.4

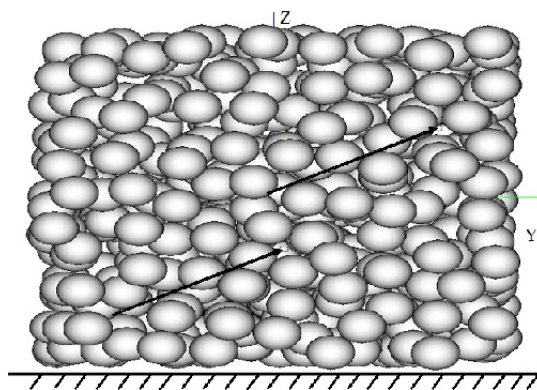


Рис. 3.4. Характерная случайная структура неподвижных частиц с подвижными частицами внутри и плоской стенкой при $z = -10$

ца с равной вероятностью может оказаться в любой точке выделенного объема, если данная точка еще не занята другой частицей. В качестве заданного объема жидкости выбирался параллелепипед, ограниченный в пространстве координатами $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$, $-10 \leq z \leq 10$. Полученная структура представлена на Рис. 3.4, стрелками указаны две из шести подвижных частиц. Рассматривались случаи положения плоскости, вдоль которой задано течение вязкой жидкости: 1) плоская поверхность,

Таблица 3.3. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в периодической структуре из 567 частицы (1 строка – стенка снизу $z = -11$, 2 строка – стенки снизу $z = -11$ и градиент давления в 2 раза больше)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-1	-7	5	0	1.13e-3	0.91e-03	0.4
				0	2.25e-3	1.81e-3	
2	0	-5	1	0	-1.48e-3	0.47e-3	0.4
				0	-2.96e-3	0.95e-3	
3	1	-3	-5	0	0.599e-3	0	0.4
				-0.107e-3	1.186e-3	0	
4	1	3	5	-0.21e-3	-1.104e-3	-0.26e-3	0.4
				-0.419e-3	2.22e-3	-0.528e-3	
5	0	5	1	0	-1.47e-3	-0.48e-3	0.4
				0	-2.942e-3	-0.96e-3	
6	-1	5	-5	-0.445e-3	-0.196e-3	0.597e-3	0.4
				-0.891e-3	-0.406e-3	1.19e-3	

ограничивающая вязкую жидкость, расположена сверху структуры ($z = 10$); 2) плоская поверхность отсутствует; 3) плоскость расположена снизу структуры ($z = -10$). Скорость внешнего потока равна $\hat{U}_y = 0.1 - 0.001z^2$. Результаты расчетов, приведенные в таблице табл. 3.4 и на Рис. 3.5, свидетельствуют о наличии микротечений, направленных против внешнего потока, и в этом случае.

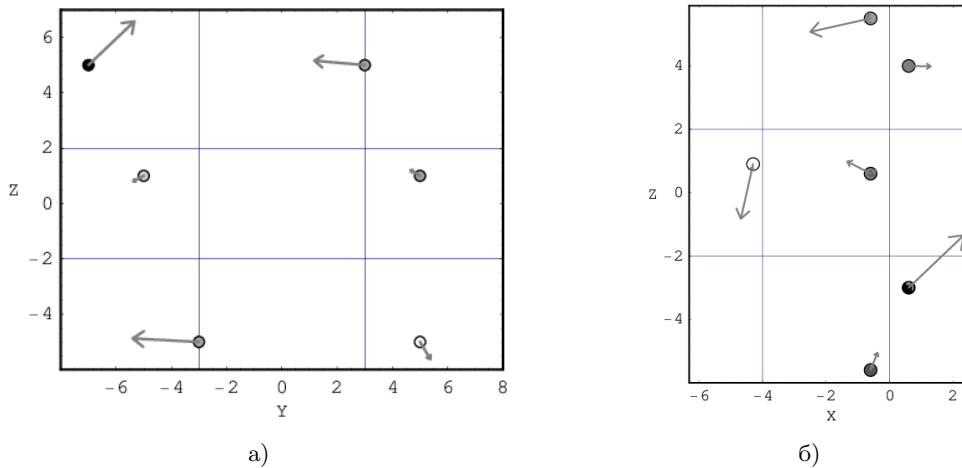


Рис. 3.5. Скорости подвижных частиц относительно скорости потока: а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

Значения реальных параметров можно определить согласно формулам пересчета, приведенных в [18]. Так, реальное значение скорости определяется из условия подобия

Таблица 3.4. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в структуре из 478 случайно расположенных частиц (1 строка – стенка сверху, 2 строка – стенки нет, 3 строка – стенка снизу)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-0.6	-7.3	0.6	-10.36e-3 -3.185e-3 -6.56e-3	-8.774e-3 -2.221e-3 -6.59e-3	-3.96e-03 1.04e-3 3.4e-3	0.4
2	-0.6	7.3	-5.6	-0.795e-3 1.6751e-3 1.669e-3	7.939e-3 2.393e-3 9.583e-3	15.28e-3 4.85e-3 4.98e-3	0.4
3	0.6	6.6	4	-20.66e-3 3.388e-3 6.2263e-3	-4.58e-3 0.209e-3 17.33e-3	2.390e-3 0.98e-3 0	0.4
4	-0.6	-7.3	5.5	-1.2e-3 -2.16e-3 -17.10e-3	-1.5e-3 -1.41e-3 -3.96e-3	-5.79e-3 0.11e-3 -3.53e-3	0.4
5	-4.3	0.5	0.9	1.553e-3 2.08e-3 -3.57e-3	0.889e-3 0.36e-3 1.797e-3	-3.13e-3 -2.82e-3 -15.23e-3	0.4
6	0.6	0.4	-3	23.08e-3 -1.21e-3 15.6e-3	-26.59e-3 -7.682e-3 -35.94e-3	-32.39e-3 -2.1e-3 14.41e-3	0.4

модельного и реального течения при равенстве плотностей жидкостей по формуле:

$$v = \hat{v} \frac{\hat{b}\eta}{b\hat{\eta}}.$$

Для реальных размеров частиц $b = 10^{-4}$ см и значения вязкости жидкости $\eta = 10^{-2}$ г/(см сек) получим, что табличные значения скорости частиц необходимо увеличить в 100 раз и это позволит получить реальные значения скорости. Реальный градиент давления внешнего потока связан с модельным соотношением:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \frac{\hat{b}^3 \eta^2}{b^3 \hat{\eta}^2}.$$

С учетом того, что модельное значение градиента давления в рассматриваемых потоках было равно $2 \cdot 10^{-3}$ дин/см³ или его удвоенному значению, получим реальное значение градиента давления, равное $2 \cdot 10^6$ Па/м.

Наличие разнонаправленных микропотоков предполагает наличие переходных областей, в которых происходит изменение направления скорости течений, в т. ч., возможно, наличие застойных зон. При изменении градиента давления, как следует из приведенных выше расчетов, скорости микротечений меняются, что предполагает изменение геометрии переходных областей и должно сказываться на такой интегральной величине как расход жидкости через сечение образца пористой среды. Поскольку при этом не меняются такие характеристики как проницаемость пористой среды и вязкость жидкости, то можно предполагать, что изменение расхода жидкости от

перепада давления будет иметь нелинейный характер. Это означает, что наличие разнонаправленных микротечений в пористой среде может служить объяснением нелинейности закона фильтрации.

4. Заключение

Проведено моделирование течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через пористую структуру, представляющую собой систему неподвижных частиц, внутри которой находятся подвижные частицы, ограниченную с одной стороны плоской поверхностью. Учитывалось гидродинамическое взаимодействие всех частиц (как подвижных, так и неподвижных) как между собой, так и с плоскостью.

Компьютерное моделирование течения проводилось на модельных структурах, образованных, соответственно, из 441, 567 периодически и 478 случайно расположенных частиц эффективного размера при различном положении плоской поверхности. Размеры подвижных дисперсных частиц, находящихся внутри неподвижной структуры, составляли 0,2 от размера эффективных частиц. Подвижные частицы рассматривались как маркеры микротечений внутри пористой структуры.

Результаты численного моделирования во всех рассмотренных случаях показывают, что динамика подвижных частиц в потоке с градиентом давления количественно и качественно отличается от динамики жидкости в пористой среде на основе линейного закона фильтрации. В частности, обнаружено, что скорость подвижных частиц в градиентном потоке может иметь составляющую, противоположно направленную потоку жидкости вне структуры. Такое поведение подвижных частиц свидетельствует о наличии в пористой среде разнонаправленных микротечений, что может служить объяснением нелинейной зависимости такой интегральной характеристики как расход жидкости от перепада давления. Поэтому необходимо учитывать наличие и структуру микротечений для более качественного прогноза массопереноса в пористой среде и определять способы его увеличения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fourier J. Theorie analytique de la chaleur. Paris: Firmin Didot Pere et Fils, 1822. 676 p.
2. Fick A. Die medizinische Physik. Braunschweig: F. Vieweg, 1856. 537 p.
3. Darcy H. Les fontainespubliques de la ville de Dijon: exposition et application des principes a suivre et des formulesa employer dans les questions de distribution d'eau.... Paris: V. Dalmont, 1856. Vol. VII. 647 p.
4. Zaretskiy Y., Geiger S., Sorbie K. Direct numerical simulation of pore-scale re-active transport: applications to wettability alteration during two-phase flow // Int. Journal of Oil, Gas and Coal Technology. 2012. Vol. 5, No. 2/3. pp. 142–156.
5. Ma J., Sanchez J. P., Wu K., Couples G. D., Jiang Z. A pore network model for simulating non-ideal gas flow in micro- and nano-porous materials // Fuel. 2014. Vol. 116. pp. 498–508.

6. Molins S. Reactive interfaces in direct numerical simulation of pore-scale processes // *Reviews in Mineralogy & Geochemistry*. 2015. Vol. 80. pp. 461–481.
7. El-Zehairy A. A., Nezhad M., Joekar-Niasar V., Guymier I., Kourra N., Williams M. A Pore-network modelling of non-Darcy flow through heterogeneous porous media // *Advances in Water Resources*. 2019. Vol. 131. Article 103378.
8. Gray W. G., Miller C. T. Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems. Switzerland: Springer, 2014. 582 p.
9. Hughes R. G., Blunt M. J. Network modeling of multiphase flow in fractures // *Advances in Water Resources*. 2001. Vol. 24. pp. 409–421.
10. Jiang Z., van Dijke R., Wu K., Couples G. D., Sorbie K. S., Ma J. Stochastic pore network generation from 3D rock images // *Transport in Porous Media*. 2012. Vol. 94, Issue 2. pp. 571–593.
11. Mukunoki T., Miyata Y., Mikami K., Shiota E. X-ray CT analysis of pore structure in sand // *Solid Earth*. 2016. Vol. 7. pp. 929–942.
12. Xiong Q., Baychev T. G., Jivkov A. P. Review of pore network modelling of porous media: Experimental characterisations, network constructions and applications to reactive transport // *Journal of Contaminant Hydrology*. 2016. Vol. 192. pp. 101–117.
13. Raeni A. Q., Bijeljic B., Blunt M. J. Generalized network modeling: Network extraction as a coarse-scale discretization of the void space of porous media // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96. Article 013312.
14. Gharedaghloo B., Price J. S., Rezanezhad F., William L. Quinton W. L. Evaluating the hydraulic and transport properties of peat soil using pore network modeling and X-ray micro computed tomography // *Journal of Hydrology*. 2018. Vol. 561. pp. 494–508.
15. Khan Z. A., Tranter T., Agnaou M., Elkamel A., Gostick J. Dual network extraction algorithm to investigate multiple transport processes in porous materials: Image-based modeling of pore and grain scale processes // *Computers & Chemical Engineering*. 2019. Vol. 123. pp. 64–77.
16. Wang Y., Teng Q., He X., Feng J., Zhanget T. CT-image of rock samples super resolution using 3D convolutional neural network // *Computers & Geosciences*. 2019. Vol. 133. Article 104314.
17. Weishaupt K., Joekar-Niasar V., Helmig R. An efficient coupling of free flow and porous media flow using the pore-network modeling approach // *Journal of Computational Physics: X*. 2019. Vol. 1. Article 100011.
18. Дерябина М. С., Мартынов С. И. Моделирование течения вязкой жидкости с частицами через ячейки пористой среды // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9, № 4. С. 420–429.
19. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Моделирование динамики частиц в вязкой жидкости при наличии плоской стенки // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50, № 9. С. 1669–1686.

20. Дерябина М. С., Мартынов С. И. О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 2. С. 222–243.

Поступила 21.04.2020

MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Viscous fluid microflows in cells of a porous medium in the presence of a gradient pressure

© M. S. Deryabina¹, S. I. Martynov²

Abstract. A simulation of the flow of a viscous fluid with a given pressure gradient through a porous structure, which was represented as a system of fixed particles, was carried out. Inside the porous structure there are moving particles, which are markers of microflows in the cells. The viscous fluid flows along a flat wall bounding the porous structure on one side. The calculations take into account the hydrodynamic interaction of all particles, both moving and stationary between themselves and with the plane. Computer simulations of this kind of flows through model structures formed, respectively, of 441, 567 periodically and 478 randomly located motionless particles of effective size and different positions of the flat wall, were carried out. The size of the moving particles placed in a viscous liquid was 0.2 of the size of the effective particles. The results of numerical simulation showed that microflows with an opposite direction of velocity are realized inside the structure, which follows from Darcy's law. Such a complex dynamics of the flow inside the porous structure means that the use of averaged equations of fluid filtration gives an incorrect picture of the flow at the pore size and can serve as an explanation of the nonlinear dependence of the average filtration rate on the applied pressure gradient.

Key Words: numerical simulation, viscous fluid, porous structure, hydrodynamic interaction of particles, microflows

REFERENCES

1. J. Fourier, *Theorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot Pere et Fils, Paris, 1822, 676 p.
2. A. Fick, *Die medizinische Physik*, F. Vieweg, Paris, 1856, 537 p.
3. H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes a suivre et des formules a employer dans les questions de distribution d'eau....*, V. Dalmont, Paris, 1856, VII 647 p.
4. Y. Zaretskiy, S. Geiger, K. Sorbie S.M. Underwood, P. Bartlett and R.H. Ottewill, "Direct numerical simulation of porescale reactive transport: applications to wettability alteration during two-phase flow", *Int. Journal of Oil, Gas and Coal Technology*, 5:2/3 (2012), 142–146.
5. J. Ma, J. P. Sanchez, K. Wu, G. D. Couples, Z. Jiang, "A pore network model for simulating nonideal gas flow in micro- and nano-porous materials", *Fuel*, 116 (2014), 498–508.

¹Member of the grant team of the Russian Foundation for Basic Research at Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk 628000, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4331-3675>

²Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina av., Surgut 628412, Russia), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

6. S. Molins, “Reactive interfaces in direct numerical simulation of pore-scale processes”, *Reviews in Mineralogy & Geochemistry*, **80** (2015), 461–481.
7. A. A. El-Zehairy, M. Nezhad, V. Joeekar-Niasar, I. Guymmer, N. Kourra, M. A. Williams, “Pore-network modelling of non-Darcy flow through heterogeneous porous media”, *Advances in Water Resources*, **131** (2019), 10337881–94.
8. W. G. Gray, C. T. Miller, *Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems.*, Springer, Switzerland, 2014, 582 p.
9. R. G. Hughes, M. J. Blunt, “Network modeling of multiphase flow in fractures”, *Advances in Water Resources*, **24** (2001), 409–421.
10. Z. Jiang, R. van Dijke, K. Wu, G. D. Couples, K. S. Sorbie, J. Ma, “Stochastic pore network generation from 3D rock images”, *Transport in Porous Media*, **94**:2 (2012), 571–593.
11. T. Mukunoki, Y. Miyata, K. Mikami, E. Shiota, “E. X-ray CT analysis of pore structure in sand”, *Solid Earth*, **7** (2016), 929–942.
12. Q. Xiong, T. G. Baychev, A. P. Jivkov, “Review of pore network modelling of porous media: Experimental characterisations, network constructions and applications to reactive transport”, *Journal of Contaminant Hydrology*, **192** (2016), 101–117.
13. A. Q. Raeini, B. Bijeljic, M. Blunt, “Generalized network modeling: Network extraction as a coarse-scale discretization of the void space of porous media”, *Phys. Rev. E.*, **96** (2017), 013312.
14. B. Gharedaghloo, J. S. Price, F. Rezanezhad, W. L. Quinton, “Evaluating the hydraulic and transport properties of peat soil using pore network modeling and X-ray micro computed tomography”, *Journal of Hydrology*, **561** (2018), 494–508.
15. Z. A. Khan, T. Tranter, M. Agnaou, A. Elkamel, J. Gostick, “Dual network extraction algorithm to investigate multiple transport processes in porous materials: Image-based modeling of pore and grain scale processes”, *Computers & Chemical Engineering*, **123** (2019), 64–77.
16. Y. Wang, Q. Teng, X. He, J. Feng, T. Zhanget, “CT-image of rock samples super resolution using 3D convolutional neural network”, *Computers & Geosciences*, **133** (2019), 104314.
17. K. Weishaupt, V. Joeekar-Niasar, R. Helmig, “An efficient coupling of free flow and porous media flow using the pore-network modeling approach”, *Journal of Computational Physics: X.*, **1** (2019), 100011.
18. M. S. Deryabina, S. I. Martynov, “Simulation of the flow of a viscous fluid with particles through porous medium cells”, *Computational Continuum Mechanics*, **9**:4 (2016), 420–429.
19. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Simulation of Particle Dynamics in a Viscous Fluid near a Plane Wall”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:9 (2010), 1588–1604.

20. M. S. Deryabina, S. I. Martynov, “The flow of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient through periodic structures”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **21**:2 (2019), 222–243.

Submitted 21.04.2020