

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202002.145-154

УДК 517.956.225; 517.544.8; 517.583

## Задача Дирихле для прямоугольника и новые тождества для эллиптических интегралов и функций

© Е. С. Алексеева<sup>1</sup>, А. Э. Рассадин<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье представлены итоги сравнения двух методов точного решения задачи Дирихле для прямоугольника: метода конформного отображения прямоугольника на верхнюю полуплоскость и метода разделения переменных. Данная процедура позволяет выразить нормальную производную функции Грина прямоугольной области через эллиптические функции Якоби. При приближении к границам прямоугольника эти формулы дают новые представления дельта-функции Дирака. Кроме того, в рамках предложенной идеологии получена серия новых соотношений для полного эллиптического интеграла первого рода. Данные соотношения могут быть применены к суммированию числовых и функциональных рядов, а также могут быть полезны в аналитической теории чисел. Число этих тождеств определяется числом известных значений эллиптических функций Якоби в их параллелограммах периодов.

**Ключевые слова:** соответствие границ, ядро интегрального оператора, модуль полного эллиптического интеграла, формула Пуассона, сигма-функция Вейерштрасса, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

### 1. Введение

Задача Дирихле для односвязных областей на двумерной плоскости является массовой задачей математической физики [1–2]. В стандартных университетских курсах, посвящённых методам математической физики, в качестве примера такой задачи подробно разбирается решение задачи Дирихле для круга, которое записывается в виде интеграла Пуассона, причём в курсах теории функций комплексного переменного этот интеграл получается с помощью конформного отображения круга на круг [2–3], а в курсах уравнений математической физики — с помощью метода разделения переменных [1; 4]. Вследствие симметрии круга сравнение двух способов вывода интеграла Пуассона не приводит к получению дополнительной математической информации. Однако при анализе менее симметричной области  $D$  сопоставление двух различных форм представления решения задачи Дирихле для такой области может стать источником новых нетривиальных тождеств.

В данной работе мы будем рассматривать уравнение Лапласа на прямоугольнике  $D = (-a/2, a/2) \times (0, b)$ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Алексеева Елена Сергеевна, член Нижегородского математического общества (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7132-0931>, [kometarella@mail.ru](mailto:kometarella@mail.ru)

<sup>2</sup>Александр Эдуардович Рассадин, член Правления Нижегородского математического общества (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, [brat\\_ras@list.ru](mailto:brat_ras@list.ru)

снабжённое граничными условиями:

$$\Psi(x, 0) = \psi_B(x), \quad \Psi(x, b) = \psi_T(x), \quad \Psi(-a/2, y) = \psi_L(y), \quad \Psi(a/2, y) = \psi_R(y) \quad (1.2)$$

с функциями  $\psi_B(x)$  и  $\psi_T(x)$ , определёнными на интервале  $(-a/2, a/2)$ , и функциями  $\psi_L(y)$  и  $\psi_R(y)$ , определёнными на интервале  $(0, b)$ .

Далее статья имеет следующую структуру: для удобства изложения в разделе 2 приведены известные факты о решении задачи Дирихле (1.1)–(1.2) методом разделения переменных. В разделе 3 эта же задача решается с помощью конформного отображения прямоугольника  $D$  на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости. Конструктивность предложенного подхода демонстрирует раздел 4. В Заключении суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

## 2. Решение задачи Дирихле на прямоугольнике методом разделения переменных

Следуя логике работы [4], представим решение  $\Psi(x, y)$  задачи Дирихле (1.1)–(1.2) в виде суммы четырёх слагаемых:

$$\Psi(x, y) = \Psi_B(x, y) + \Psi_R(x, y) + \Psi_T(x, y) + \Psi_L(x, y). \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в формуле (2.3) описывает вклад в  $\Psi(x, y)$  от функции  $\psi_B(x)$  на нижней границе прямоугольника  $D$  — отрезке  $A_1A_4$  на Рис. 2.1:

$$\Psi_B(x, y) = \int_{-a/2}^{a/2} \Gamma_B(x, y; \xi) \psi_B(\xi) d\xi, \quad (2.4)$$

причём ядро интегрального оператора в формуле (2.4) находится следующим образом:

$$\Gamma_B(x, y; \xi) = \Gamma_B^+(x, y; \xi) + \Gamma_B^-(x, y; \xi), \quad (2.5)$$

где

$$\Gamma_B^+(x, y; \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh((2n-1)\pi(b-y)/a)}{\sinh((2n-1)\pi b/a)} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi \xi}{a}$$

и

$$\Gamma_B^-(x, y; \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(2n\pi(b-y)/a)}{\sinh(2n\pi b/a)} \sin \frac{2n\pi x}{a} \sin \frac{2n\pi \xi}{a}.$$

Вклад в  $\Psi(x, y)$  от функции  $\psi_R(y)$  на правой границе прямоугольника  $D$  — отрезке  $A_1A_2$  на Рис. 2.1 — равен

$$\Psi_R(x, y) = \int_0^b \Gamma_R(x, y; \xi) \psi_R(\xi) d\xi, \quad (2.6)$$

где

$$\Gamma_R(x, y; \xi) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi(a/2+x)/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi \xi}{b}. \quad (2.7)$$

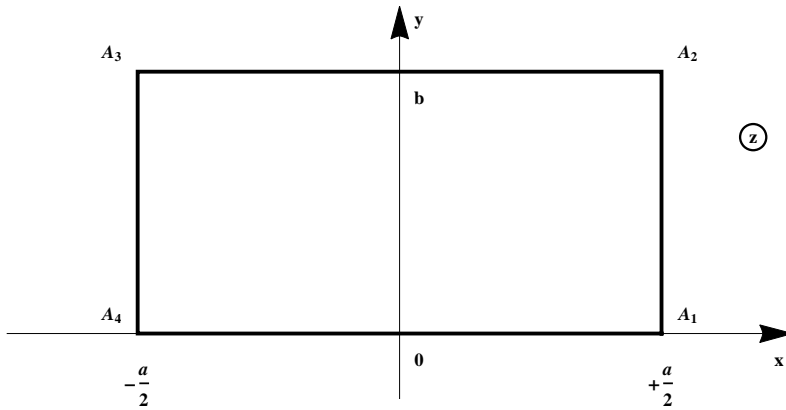


Рис. 2.1. Прямоугольная область на комплексной плоскости  $z$

Функция  $\psi_T(x)$  на верхней границе прямоугольника  $D$  — отрезке  $A_2A_3$  на Рис. 2.1 — даёт в  $\Psi(x, y)$  следующий вклад:

$$\Psi_T(x, y) = \int_{-a/2}^{a/2} \Gamma_T(x, y; \xi) \psi_T(\xi) d\xi, \tag{2.8}$$

причём распространение влияния  $\psi_T(x)$  на весь прямоугольник  $D$  осуществляется с помощью ядра:

$$\Gamma_T(x, y; \xi) = \Gamma_B(x, b - y; \xi). \tag{2.9}$$

Наконец, вклад в  $\Psi(x, y)$  от функции  $\psi_L(x)$  на левой границе прямоугольника  $D$  — отрезке  $A_3A_4$  на Рис. 2.1 — равен:

$$\Psi_L(x, y) = \int_0^b \Gamma_L(x, y; \xi) \psi_L(\xi) d\xi, \tag{2.10}$$

где

$$\Gamma_L(x, y; \xi) = \Gamma_R(-x, y; \xi). \tag{2.11}$$

### 3. Решение задачи Дирихле на прямоугольнике методом конформного отображения

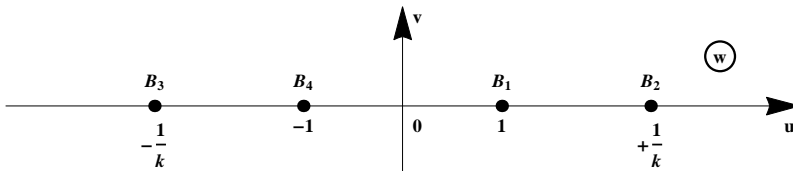


Рис. 3.2. Верхняя полу плоскость комплексной плоскости  $w$

С другой стороны, известно, что конформное отображение верхней полу плоскости  $\Im w > 0$  на Рис. 3.2 на прямоугольник  $D$  комплексной плоскости  $z$  на Рис. 2.1 с соответствием точек  $A_1 \leftrightarrow B_1$ ,  $A_2 \leftrightarrow B_2$ ,  $A_3 \leftrightarrow B_3$  и  $A_4 \leftrightarrow B_4$  описывается следующей формулой [2, с. 673]:

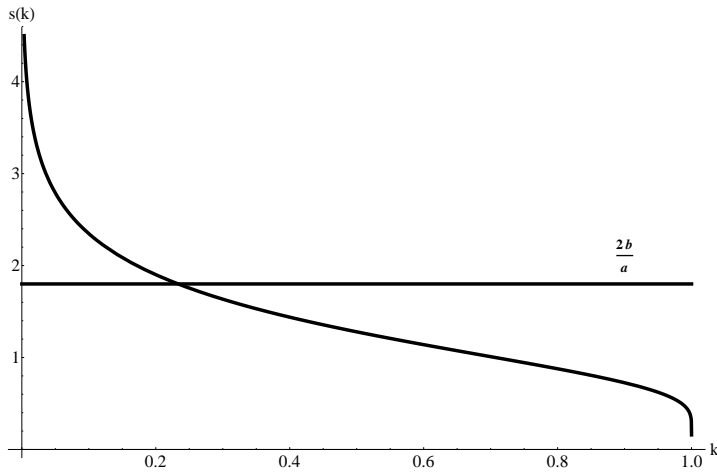
$$z = \frac{a}{2\mathbf{K}(k)} \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \tag{3.12}$$

где  $\mathbf{K}(k) = \int_0^1 (1-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2\zeta^2)^{-\frac{1}{2}} d\zeta$  — полный эллиптический интеграл первого рода, модуль  $k$  которого определяется по сторонам  $a$  и  $b$  прямоугольника  $D$  соотношением [2, с. 673]:

$$s(k) \equiv \frac{\mathbf{K}(k')}{\mathbf{K}(k)} = \frac{2b}{a}, \tag{3.13}$$

где  $k' = \sqrt{1-k^2}$  — дополнительный модуль.

График функции  $s(k)$  представлен на Рис. 3.3.



**Рис. 3.3.** К определению модуля  $k$  в конформном отображении прямоугольника на верхнюю полуплоскость

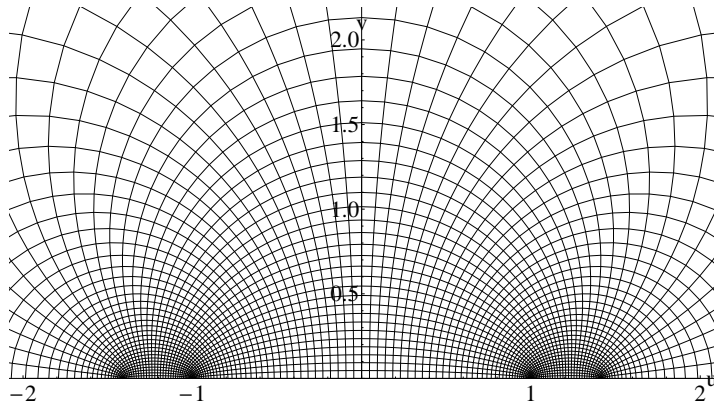
Применяя к функции  $s(k)$  формулу для производной полного эллиптического интеграла первого рода и соотношение Лежандра [5, с. 157], легко убедиться, что при  $k \in (0, 1)$  эта функция монотонно убывает, следовательно, по известному отношению  $b/a$  сторон прямоугольника  $D$  модуль  $k$  определяется единственным образом.

Конформное отображение, обратное к отображению (3.12), т. е. отображение прямоугольника  $A_1A_2A_3A_4$  плоскости  $z = x + iy$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $w = u + iv$ , выражается через эллиптический синус:

$$w = sn \left( \frac{2\mathbf{K}(k)z}{a}, k \right). \tag{3.14}$$

Пример образа декартовой координатной сетки плоскости  $z$  при отображении (3.14) приведён на Рис. 3.4.

Далее перейдём с помощью отображения (3.12) к комплексной координате  $w$ . В этом случае искомая функция  $\tilde{\Psi}(w) \equiv \Psi(z(w))$ , записанная в новых координатах, в силу инвариантности уравнения Лапласа относительно конформных преобразований также удовлетворяет уравнению (1.1). Однако граничное условие на плоскости  $w$  на Рис. 3.2 по сравнению с граничным условием (1.2) на плоскости  $z$  выглядит гораздо проще.



**Рис. 3.4.** Карта конформного отображения прямоугольника со сторонами  $a = 4$  и  $b = 2$  на верхнюю полуплоскость

Более того, оно даёт возможность записать общее решение исходной задачи Дирихле с помощью формулы Пуассона [3, с. 341]:

$$\tilde{\Psi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(t)|_{\Im w=0} \cdot \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t - w]} \right\} dt, \tag{3.15}$$

где  $\tilde{\Psi}|_{\Im w=0} = \Psi|_{\partial D}$ .

Благодаря соответствию границ  $A_4A_1 \leftrightarrow B_4B_1$ ,  $A_1A_2 \leftrightarrow B_1B_2$  и т. д. при конформном отображении (3.14) (см. Рис. 2.1; 3.2) из формулы (3.15) легко выделить отдельные слагаемые, которые входят в формулу (2.3), например:

$$\tilde{\Psi}_B(w) = \int_{-1}^{+1} \tilde{\Psi}_B(t) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t - w]} \right\} dt. \tag{3.16}$$

Используя явный вид конформного отображения (3.14) перепишем выражение (3.16) в исходных переменных:

$$\Psi_B(z) = \int_{-a/2}^{+a/2} \psi_B(\xi) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t_B(\xi) - w(z)]} \right\} \frac{dt_B(\xi)}{d\xi} d\xi, \tag{3.17}$$

где

$$t_B(\xi) = sn \left( \frac{2\mathbf{K}(k)\xi}{a}, k \right) - \tag{3.18}$$

вещественная функция, определяющая закон, по которому пробегается отрезок  $B_4B_1$  на плоскости  $w$  (Рис. 3.2), когда параметр  $\xi$  пробегает отрезок  $A_4A_1$  на плоскости  $z$  (Рис. 2.1).

Применяя известное правило дифференцирования эллиптической функции Якоби (3.18) [2; 5] и сравнивая формулу (3.17) с формулой (2.4), легко видеть, что:

$$\Gamma_B(x, y; \xi) = \Re \left\{ \frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi i a} \frac{cn(2\mathbf{K}(k)\xi/a, k) dn(2\mathbf{K}(k)\xi/a, k)}{sn(2\mathbf{K}(k)\xi/a, k) - sn(2\mathbf{K}(k)(x + iy)/a, k)} \right\}. \tag{3.19}$$

Таким образом, правая часть формулы (3.19) даёт сумму функционального ряда (2.5). Кроме того, поскольку  $\Gamma_B(x, 0+; \xi) = \delta(x - \xi)$ , то правая часть формулы (3.19) даёт представление дельта-функции Дирака при  $z = x + i0$ .

Сравнивая Рис. 2.1 и Рис. 3.2, выпишем вклад в искомую функцию от стороны  $A_1A_2$  прямоугольника  $D$ :

$$\tilde{\Psi}_R(w) = \int_{+1}^{+1/k} \tilde{\Psi}_R(t) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t - w]} \right\} dt. \tag{3.20}$$

Если  $z = a/2 + i\xi$ ,  $\xi \in [0, b]$ , т. е. точка  $z$  пробегает отрезок  $A_1A_2$ , то точка  $t$  пробегает отрезок  $B_1B_2$  плоскости  $w$  по закону [5, с. 166]:

$$t_R(\xi) = sn \left[ \frac{2\mathbf{K}(k)}{a} \left( \frac{a}{2} + i\xi \right), k \right] = \frac{1}{dn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k')} \tag{3.21}$$

(при преобразованиях в формуле (3.21) использовалось соотношение (3.13)).

Возвращаясь в выражении (3.21) к исходным переменным, получим:

$$\Psi_R(z) = \int_0^b \psi_R(\xi) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t_R(\xi) - w(z)]} \right\} \frac{dt_R(\xi)}{d\xi} d\xi. \tag{3.22}$$

Подставив в формулу (3.22) производную от функции (3.21), получим следующее соотношение:

$$\Gamma_R(x, y; \xi) = \Re \left\{ \frac{k'^2 \mathbf{K}(k')}{\pi i b dn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k')} \frac{sn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k') cn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k')}{1 - dn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k') sn(2\mathbf{K}(k)(x + iy)/a, k)} \right\}. \tag{3.23}$$

Выражение (3.23) является суммой функционального ряда (2.7). Кроме того, поскольку  $\Gamma_R(a/2 - 0, y; \xi) = \delta(y - \xi)$ , то правая часть формулы (3.23) при  $z = iy + a/2 - 0$  даёт представление дельта-функции Дирака.

Продолжая рассматривать соответствие границ прямоугольника  $A_1A_2A_3A_4$  при его конформном отображении (3.14) на верхнюю полуплоскость так, как показано выше, можно выразить ядра  $\Gamma_T(x, y; \xi)$  и  $\Gamma_L(x, y; \xi)$  через эллиптические функции Якоби. Однако благодаря свойствам симметрии (2.9) и (2.11) этих ядер аналогичный результат может быть получен быстрее путем замены переменных  $y \rightarrow b - y$  и  $x \rightarrow -x$  в правых частях формул (3.19) и (3.23) соответственно.

Наконец, вспомним, что для прямоугольника  $D$  методом отражений точно вычисляется функция Грина для всей области [6, с. 364]:

$$G(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \Re \ln \frac{\sigma(z + \bar{\zeta} + a) \sigma(z - \bar{\zeta})}{\sigma(z + \zeta + a) \sigma(z - \zeta)}, \tag{3.24}$$

где  $\sigma(z)$  — сигма-функция Вейерштрасса [2; 5].

Как известно [3, с. 345], с помощью этой функции решение задачи Дирихле (1.1)–(1.2) записывается следующим образом:

$$\Psi(z) = \oint_{A_1A_2A_3A_4} \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \Psi(\zeta) |d\zeta|, \tag{3.25}$$

где оператор  $\partial/\partial n$  означает дифференцирование по направлению внешней нормали к прямоугольнику  $A_1A_2A_3A_4$  по комплексной переменной  $\zeta$ .

Сравнивая представления решения (3.25) с представлением решения (2.3), (2.4), (2.6), (2.8) и (2.10) для исходной задачи Дирихле, легко обнаружить связь значений нормальных производных функции (3.24) на границе прямоугольника  $D$  с ядрами  $\Gamma(x, y; \xi)$ , задаваемыми функциональными рядами. Связь же эллиптических функций Якоби, через которые также выражаются эти ряды, с производными сигма-функции Вейерштрасса, устанавливается с помощью тэта-функций Якоби [2; 5].

#### 4. Вывод новых тождеств для полного эллиптического интеграла первого рода

Заметим, что ядро  $\Gamma_B(x, y; \xi)$  определено на прямоугольном параллелепипеде  $\Pi_a = D \times [-a/2, a/2]$ .

Вычислим значение этой функции в точке  $(0, b/2, 0) \in \Pi_a$  двумя способами: сначала по формуле (2.5)

$$\Gamma_B(0, b/2; 0) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi b/2a)}, \quad (4.26)$$

а затем – используя соотношение  $sn(i\mathbf{K}(k')/2, k) = i/\sqrt{k}$  (см. [5, с. 280]) – по формуле (3.19):

$$\Gamma_B(0, b/2; 0) = \frac{2\sqrt{k}\mathbf{K}(k)}{\pi a}. \quad (4.27)$$

Сравнив формулы (4.26) и (4.27), с помощью соотношения (3.13) получим следующее тождество для полного эллиптического интеграла первого рода:

$$\frac{2\sqrt{k}\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi/4 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.28)$$

Применение этого алгоритма к функции  $\Gamma_B(x, y; \xi)$  в точке  $(a/4, b/2, a/4) \in \Pi_a$  приводит к тождеству:

$$\frac{k\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi/2 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.29)$$

Рассмотрение же точки  $(a/4, b/2, -a/4) \in \Pi_a$  не даёт новой информации, потому что  $\Gamma_B(0, b/2; 0) = \Gamma_B(a/4, b/2, a/4) + \Gamma_B(a/4, b/2, -a/4)$ .

Далее, ядро  $\Gamma_R(x, y; \xi)$  определено на прямоугольном параллелепипеде  $\Pi_b = D \times [0, b]$ .

Нахождение значения этой функции в точке  $(0, b/2, b/2) \in \Pi_b$  как по формуле (2.7), так и по формуле (3.23) позволяет получить тождество:

$$\frac{k'^2\mathbf{K}(k')}{2\pi(1+k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi \cdot \mathbf{K}(k)/\mathbf{K}(k'))}. \quad (4.30)$$

Для единообразия обозначений с формулами (4.28) и (4.29) в формуле (4.30) удобно заменить  $k$  на  $k'$  и наоборот:

$$\frac{k^2\mathbf{K}(k)}{2\pi(1+\sqrt{1-k^2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.31)$$

Применение аналогичной процедуры к функции  $\Gamma_R(x, y; \xi)$  в точке  $(a/4, b/2, b/2) \in \Pi_b$  приводит к тождеству:

$$\frac{k\mathbf{K}(k)}{4\pi} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{1 - k^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - k^2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh((2n-1) \cdot 3\pi/2 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2n-1) \cdot 2\pi \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.32)$$

Действуя также с точкой  $(3a/4, b/2, b/2) \in \Pi_b$ , получим ещё одно тождество:

$$\frac{k^2 \sqrt{1-k^2} \mathbf{K}(k)}{4\pi(\sqrt{2} + \sqrt{1+k})(1 + \sqrt{1-k^2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh((2n-1)\pi/2 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2n-1) \cdot 2\pi \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.33)$$

Функция  $s(k)$ , определённая соотношением (3.13), имеет обратную:  $k = k(s)$  при  $s \in [0, +\infty)$ , то тождества (4.28), (4.29), (4.31)–(4.33) можно интерпретировать как точные суммы функциональных рядов. Например, тождество (4.28) сводится к

$$\frac{2\sqrt{k(s)} \mathbf{K}(k(s))}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi s/4)}. \quad (4.34)$$

Кроме того, при небольших натуральных  $p$  можно найти явные выражения для точных решений уравнения  $s(k_p) = \sqrt{p}$ , а именно  $k_1 = 1/\sqrt{2}$ ,  $k_2 = \sqrt{2} - 1$ ,  $k_3 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$  и т. д. [7, с. 139], причём полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие этим значениям модулей, выражаются через гамма-функцию Эйлера. Это означает, что тождества (4.28), (4.29), (4.31)–(4.33) порождают большой набор точно вычисляемых сумм числовых рядов, например,  $K(k_1) = \Gamma^2(1/4)/4\sqrt{\pi}$ , поэтому из формулы (4.34) получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi/4)} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{2^{5/4}\pi^{3/2}}. \quad (4.35)$$

## 5. Заключение

В данной работе в рамках сравнения точного решения задачи Дирихле для прямоугольника методом разделения переменных с решением этой же задачи методом конформного отображения просуммированы функциональные ряды (2.5) и (2.7), являющиеся значениями нормальной производной функции Грина прямоугольной области на её границе. Слабые пределы сумм этих рядов, выражающиеся через эллиптические функции Якоби, позволяют получить новые представления дельта-функции Дирака. Также с помощью этих сумм установлены новые тождества (4.28), (4.29), (4.31)–(4.33) для полного эллиптического интеграла первого рода, существенно расширяющие набор тождеств этого класса, приведённый в книге [7]. Эти тождества могут быть применены к суммированию и числовых, и функциональных рядов. По сути число этих тождеств определяется запасом известных значений эллиптических функций Якоби в их параллелограммах периодов.

Наконец, отметим, что функции  $\mathbf{K}(k)$  и  $\mathbf{K}(\sqrt{1-k^2})$  являются линейно независимыми решениями следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами [5, с. 157]:

$$\frac{d}{dk} \left[ k(1-k^2) \frac{d\Phi}{dk} \right] - k\Phi = 0, \quad (5.36)$$

и избылиие тождеств типа тождества (4.28) для этих функций указывает на скрытую симметрию уравнения (5.36). Перспективой данной работы является распространение этого подхода на другие области: эллипс, прямоугольный треугольник и т. д.

**Благодарности.** Исследование проведено при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-08-01356-а.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
3. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 480 с.
4. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Риз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.-Л.: ГТТИ, 1933. Т. 1. 525 с.
7. Borwein J. M., Borwein P. B. Pi and the AGM. A Study in analytic number theory and computational complexity. Toronto: John Wiley and Sons, 1987. 414 p.

*Поступила 25.02.2020*

MSC2020 30C20 33E05 35J08

# The Dirichlet problem for rectangle and new identities for elliptic integrals and functions

© E. S. Alekseeva<sup>1</sup>, A. E. Rassadin<sup>2</sup>

**Abstract.** In the paper, results of comparison of two different methods of exact solution of the Dirichlet problem for rectangle are presented, namely, method of conformal mapping and method of variables' separation. By means of this procedure normal derivative of Green's function for rectangular domain was expressed via Jacobian elliptic functions. Under approaching to rectangle's boundaries these formulas give new representations of the Dirac delta function. Moreover in the framework of suggested ideology a number of identities for the complete elliptic integral of the first kind were obtained. These formulas may be applied to summation of both numerical and functional series; also they may be useful for analytic number theory.

**Key Words:** correspondence of boundaries, kernel of integral operator, modulus of complete elliptic integral, the Poisson formula, the Weierstrass sigma-function, linear differential equation of the second order with variable coefficients

## REFERENCES

1. A. N. Tihonov, A. A. Samarskii, *[Equations of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1966, 724 p.
2. M. A. Lavrentyev, B. V. Shabat, *[Methods of the theory of functions of a complex variable]*, Nauka Publ., Moscow, 1987, 688 p.
3. Yu. V. Sidorov, M. V. Fedoryuk, M. I. Shabunin, *[Lectures on the theory of functions of a complex variable]*, Nauka Publ., Moscow, 1989, 480 p.
4. V. M. Babich, M. B. Kapilevich, S. G. Mikhlin, G. I. Natanson, P. M. Riz, L. N. Slobodetskii, M. M. Smirnov, *[Linear equations of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1964, 368 p.
5. N. I. Ahiezer, *[Elements of the theory of elliptic functions]*, Nauka Publ., Moscow, 1970, 304 p.
6. R. Kurant, D. Gilbert, *[Methods of Mathematical Physics]*. V. 1, GTTI, Moscow-Leningrad, 1933, 525 p.
7. J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity*, John Wiley and Sons, Toronto, 1987, 414 p.

Submitted 25.02.2020

<sup>1</sup>Helen S. Alekseeva, Member of Nizhny Novgorod Mathematical Society (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7132-0931>, [kometarella@mail.ru](mailto:kometarella@mail.ru)

<sup>2</sup>Alexander E. Rassadin, Member of Presidium of Nizhny Novgorod Mathematical Society (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, [brat\\_ras@list.ru](mailto:brat_ras@list.ru)