DOI 10.15507/2079-6900.22.202001.48-70

УДК 517.9

Асимптотика спектра дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией

© **С. И. Митрохин**[1]

Аннотация. Исследована краевая задача для дифференциального оператора восьмого порядка, потенциал которого является кусочно-непрерывной функцией на отрезке задания оператора. Весовая функция является кусочно-постоянной. В точке разрыва коэффициентов оператора должны выполняться условия «сопряжения», которые следуют из физических соображений. Граничные условия изучаемой краевой задачи являются разделенными и зависят от нескольких параметров. Таким образом, мы одновременно изучаем спектральные свойства целого семейства дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами. Асимптотика решений дифференциальных уравнений, задающих оператор, выведена при больших значениях спектрального параметра. Применяя эти асимптотические разложения, исследованы условия «сопряжения», в результате чего изучены граничные условия. Выведено уравнение на собственные значения исследуемой краевой задачи. Показано, что собственные значения являются корнями некоторой целой функции. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения. Найдена асимптотика собственных значений в различных секторах индикаторной диаграммы.

Ключевые слова: краевая задача, спектральный параметр, дифференциальный оператор, весовая функция, кусочно-непрерывный потенциал, асимптотика собственных значений

1. Введение. Постановка задачи

Исследуем дифференциальный оператор высокого четного порядка, задаваемый на отрезке $[0;\pi]$ дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(8)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^8 y_1(x), \quad 0 \leqslant x < x_0, \quad a > 0, \tag{1.1}$$

$$y_2^{(8)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^8 y_2(x), \quad x_0 < x \leqslant \pi, \quad b > 0, \tag{1.2}$$

с условиями «сопряжения» в точке x_0 разрыва коэффициентов

$$y_1(x_0-0) = y_2(x_0+0); \quad \frac{y_1^{(m)}(x_0-0)}{a^m} = \frac{y_2^{(m)}(x_0+0)}{b^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{1.3}$$

с разделенными граничными условиями вида

$$\begin{gathered} y_1^{(m_1)}(0) = \cdots = y_1^{(m_4)}(0) = y_2^{(n_1)}(\pi) = \cdots = y_2^{(n_4)}(\pi) = 0, \\ m_1 < m_2 < m_3 < m_4, \quad n_1 < n_2 < n_3 < n_4; \\ m_k, n_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Дифференциальные уравнения (1.1), (1.2) можно переписать в виде одного уравнения

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda\rho(x)y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

[1]**Митрохин Сергей Иванович**, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский вычислительный центр, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» (Россия, г. Москва, Ленинские Горы, д. 6.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1896-0563, mitrokhin-sergey@yandex.ru

где

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x), & 0 \leqslant x < x_0, \\ y_2(x), & x_0 < x \leqslant \pi; \end{bmatrix} \quad q(x) = \begin{bmatrix} q_1(x), & 0 \leqslant x < x_0, \\ q_2(x), & x_0 < x \leqslant \pi; \end{bmatrix}$$

$$\rho(x) = \begin{bmatrix} a^8, & a > 0, & 0 \leqslant x < x_0, \\ b^8, & b > 0, & x_0 < x \leqslant \pi. \end{bmatrix}$$

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ при этом называется спектральным параметром, функция $q(x)$ — потенциалом, функция $\rho(x)$ — весовой функцией. Предполагается, что потенциал $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям гладкости:

$$\begin{gathered} q_1(x) \in C^8[0; x_0); \quad q_2(x) \in C^8(x_0; \pi]; \\ \exists \lim_{x \to x_0 - 0} q_1(x) = q_1(x_0) \neq \infty; \\ \exists \lim_{x \to x_0 + 0} q_2(x) = q_2(x_0) \neq \infty. \end{gathered} \tag{1.5}$$

У краевой задачи (1.1)–(1.5) потенциал $q(x)$ и весовая функция $\rho(x)$ имеют в точке x_0 разрывы первого рода.

2. Из истории вопроса

Спектральные свойства дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами изучались в работах [1–4]. В работах [5–9] исследовались дифференциальные операторы с кусочно-гладкими коэффициентами. Краевые задачи вида (1.1)–(1.5) в случае дифференциальных операторов второго и четвертого порядков с кусочно-гладким потенциалом описывают поперечные либо продольные колебания стержней и балок, составленных из материалов различной плотности. Дифференциальные операторы порядка выше четвертого фактически еще не исследованы, их изучение является актуальной задачей настоящего времени. С возрастанием порядка дифференциального оператора многократно возрастают трудности теоретического и практического исследования таких операторов.

Исследования последних десятилетий посвящены изучению случая суммируемых коэффициентов дифференциальных операторов [10–14]. Во всех упомянутых работах весовая функция была постоянной (чаще всего равнялась единице).

Дифференциальные операторы с кусочно-постоянными весовыми функциями исследовались в работах [15–18]. Исследования [19–24] посвящены различным спектральным свойствам операторов с непостоянными (гладкими) весовыми функциями либо операторы с точками разрыва внутри отрезка задания оператора. В монографии [25, с. 5] были рассмотрены операторы второго порядка с суммируемым потенциалом, весовая функция которого являлась гладкой (непостоянной) функцией, была найдена асимптотика собственных значений такого оператора. Асимптотика спектра дифференциальных операторов четвертого порядка и выше с гладкой весовой функцией до настоящего времени никем не вычислена ввиду трудностей практического характера: асимптотика решений в этом случае имеет очень сложный вид. Изучение дифференциальных операторов четвертого порядка и выше с разрывными коэффициентами является насущной математической проблемой.

3. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2) при $\lambda \to \infty$

Введем следующие обозначения: $\lambda = s^8$, $s = \sqrt[8]{\lambda}$, при этом для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[8]{1} = +1$. Обозначим через ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ различные корни восьмой степени из единицы:

$$\begin{gathered}\omega_k^8 = 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)} \ (k = 1, 2, \ldots, 8); \quad \omega_1 = 1;\\ \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = z;\\ \omega_3 = e^{\overline{\frac{4\pi i}{8}}} = z^2 = i, \ldots, \omega_m = z^{m-1},\ m = 1, 2, \ldots, 8;\\ \omega_{m+8} = \omega_m; \quad \omega_8 = \overline{\omega}_2; \quad \omega_7 = \overline{\omega}_3; \quad \omega_6 = \overline{\omega}_4, \quad \omega_5 = \overline{\omega}_5 = -1.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Числа ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ из (3.1) делят единичную окружность на восемь равных частей (Рис. 3.1):

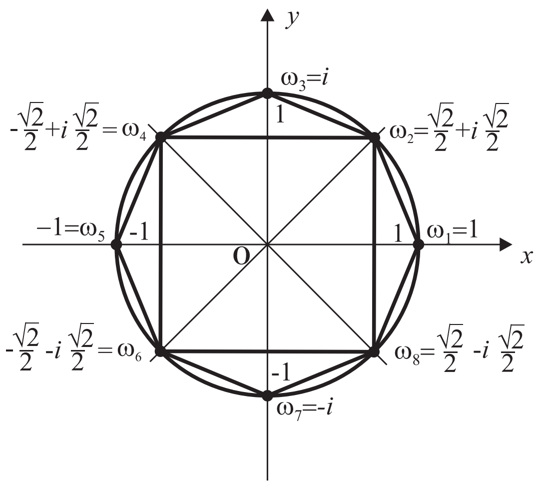

Рис. 3.1. Схема расположения корней восьмой степени из единицы.

Для чисел ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ из (3.1) и Рис. 3.1 справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{8} \omega_k^n = 0,\ n = 1, 2, \ldots, 7; \quad \sum_{k=1}^{8} \omega_k^n = 8,\ n = 0,\ n = 8. \tag{3.2}$$

Учитывая условия гладкости (1.5), методами, примененными в монографии [26, с. 2], устанавливаются следующие утверждения.

Т е о р е м а 3.1 *Общее решение дифференциального уравнения* (1.1) *имеет вид*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}(x, s); \quad \frac{y_1^{(m)}(x, s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x, s)}{(as)^m},\ m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{3.3}$$

где C_{1k} $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — *произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы решений* $\{y_{1k}(x, s)\}_{k=1}^{8}$ *справедливы следующие асимптотические представления и оценки:*

$$y_{1k}(x,s) = e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k A_{7k}(x)}{s^7} + \frac{A^0_{8k}(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^9}\right)\right],\ k = 1, 2, \ldots, 8; \tag{3.4}$$

$$y^{(m)}_{1k}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k A_{7k}(x)}{s^7} + \frac{A^m_{8k}(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^9}\right)\right], \tag{3.5}$$
$$k = 1, 2 \ldots 8;\ m = 1, 2, \ldots 7.$$

Для коэффициентов асимптотических разложений (3.4)–(3.5) справедливы следующие формулы:

$$A_{7k}(x) = -\frac{1}{8a^7}\int_0^x q_1(t)dt = A_7(x), \quad A_{7k}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \tag{3.6}$$

$$A^0_{8k}(x) = \frac{7q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^8}; \quad A^1_{8k}(x) = \frac{5q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^8}; \quad A^m_{8k}(x) = \frac{(7-2m)q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^4},$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, 7; \quad A^7_{8k}(x) = \frac{-7q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^8},$$
$$A^m_{8k}(x) = A^m_8(x), \quad k = 1, 2, \ldots, 8. \tag{3.7}$$

При этом выполняются следующие начальные условия и свойства:

$$A^0_{8k}(0) = 0; \quad A_{7k}(0) = 0; \quad y_{1k}(0,s) = 1;$$
$$y^{(m)}_{1k}(0,s) = (as)^m\omega_k^m, \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \quad m = 1, 2, \ldots, 7;$$
$$A^0_{8k}(0) = \frac{-2q_1(0)}{16a^8}; \ldots; A^m_{8k}(0) = \frac{-2mq_1(0)}{16a^8}; \ldots; A^7_{8k}(0) = \frac{-14q_1(0)}{16a^8};$$
$$A^1_{8k}(x) + \cdots + A^7_{8k}(x) = \frac{-56q_1(0)}{16a^8}; \quad \sum_{m=0}^{7} A^m_{8k}(0) = \sum_{m=0}^{7} A^m_{8k}(x) = \frac{-56q_1(0)}{16a^8}, \tag{3.8}$$
$$m = 1, 2, \ldots, 7.$$

Теорема 3.2 *Общее решение дифференциального уравнения* (1.2) *при условии гладкости* (1.5) *представляется в виде*

$$y_2(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{2k}y_{2k}(x,s); \quad \frac{y^{(m)}_2(x,s)}{(bs)^m} = \sum_{k=1}^{8} C_{2k}\frac{y^{(m)}_{2k}(x,s)}{(bs)^m},\ m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{3.9}$$

где C_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — *произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы решений* $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^{8}$ *справедливы асимптотические представления и оценки*

$$y_{2k}(x,s) = e^{b\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k B_{7k}(x)}{s^7} + \frac{B^0_{8k}(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|bx}}{s^9}\right)\right],\ k = 1, 2, \ldots, 8; \tag{3.10}$$

$$y^{(m)}_{2k}(x,s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k B_{7k}(x)}{s^7} + \frac{B^m_{8k}(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|bx}}{s^9}\right)\right], \tag{3.11}$$
$$k = 1, 2, \ldots, 8;\ m = 1, 2, \ldots 7.$$

Для коэффициентов асимптотических разложений (3.10)–(3.11) справедливы формулы

$$B_{7k}(x) = -\frac{1}{8b^7}\int_{x_0}^{x} q_2(t)dt = B_7(x), \quad B_{7k}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered} B^0_{8k}(x) = \frac{7q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}, \quad B^1_{8k}(x) = \frac{5q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}; \ldots; \\ B^m_{8k}(x) = \frac{(7-2m)q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}; \ldots; B^7_{8k}(x) = \frac{-7q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}, \\ B^m_{8k}(x) = B^m_8(x), \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \quad m = 1, 2, \ldots 7. \end{gathered} \tag{3.13}$$

При этом выполняются следующие начальные условия и свойства:

$$\begin{gathered} B^0_{7k}(x_0) = 0; \quad B^0_{8k}(x_0) = 0; \quad y_{2k}(x_0, s) = e^{b\omega_k x_0 s}; \\ y^{(m)}_{2k}(x_0, s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k x_0 s}, \quad B^1_{8k}(x_0) = \frac{-2q_2(x_0)}{16b^8}; \ldots; \\ B^m_{8k}(x_0) = \frac{-2mq_2(x_0)}{16b^8}; \ldots; B^m_{8k}(x_0) = \frac{-14q_1(x_0)}{16b^8}; \\ B^0_{8k}(x_0) + B^1_{8k}(x_0) + \cdots + B^7_{8k}(x_0) = \frac{-56q_2(x_0)}{16b^8}; \quad \sum_{m=0}^{7} B^m_{8k}(x_0) = \frac{-56q_2(x_0)}{16b^8}, \\ k = 1, 2, \ldots, 8; \quad m = 1, 2, \ldots, 7. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Формулы (3.3)–(3.5) и (3.9)–(3.11) позволяют изучить условия «сопряжения» (1.3).

4. Изучение условий «сопряжения» (1.3)

Из условий «сопряжения» (1.3) и формул (3.3), (3.9) получим:

$$\begin{cases} y_2(x_0+0, s) \overset{(1.3)}{=} y_1(x_0 - 0, s) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}(x_0 + 0, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}(x_0 - 0, s); \\ \dfrac{y_2^{(m)}(x_0+0, s)}{(bs)^m} \overset{(1.3)}{=} \dfrac{y_1^{(m)}(x_0-0, s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{8} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_0+0, s)}{(bs)^m} = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x_0-0, s)}{(as)^m}, \\ m = 1, 2, \ldots, 7. \end{cases} \tag{4.1}$$

Рассмотрим систему (4.1) как систему из восьми линейных уравнений с восемью неизвестными $C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{28}$ (при этом $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{18}$ – параметры). Определителем этой системы является определитель Вронского функций $y_{21}(x, s)$, $y_{22}(x, s)$, …, $y_{28}(x, s)$, который не зависит от x и не равен нулю ни в одной точке отрезка $[0; \pi]$. Применяя теорему Крамера, придем к выводу, что решение системы (4.1) единственно и находится по формулам

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(s) \neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(s)}; \ldots; C_{28} = \frac{\Delta_{28}}{\Delta_{02}(s)}, \tag{4.2}$$

$$
\Delta_{02}(s)=\begin{vmatrix} y_{21}(x,s) & y_{22}(x,s) & \dots & y_{27}(x,s) & y_{28}(x,s)\\ \dfrac{y'_{21}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{22}(x,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{27}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{28}(x,s)}{bs}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{y^{(7)}_{21}(x,s)}{(bs)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{22}(x,s)}{(bs)^7} & \dots & \dfrac{y^{(7)}_{28}(x,s)}{(bs)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{28}(x,s)}{(bs)^7} \end{vmatrix}=
$$

$$
=\det \mathrm{Wr}[y_{21}(x,s);y_{22}(x,s);\dots;y_{28}(x,s)]=\Delta_{02}(x,s)=\Delta_{02}(x_0,s)=\Delta_{02}(\pi,s)\neq 0, \quad (4.3)
$$

определители Δ_{2n} $(n=1,2,\dots,8)$ из формулы (4.2) находятся из определителя $\Delta_{02}(x,s)$ формулы (4.3) заменой n-го столбца на столбец

$$
\left(\sum_{k=1}^{8} C_{1k}y_{1k}(x,s);\quad \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y'_{1k}(x,s)}{as};\dots;\sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y^{(7)}_{1k}(x,s)}{(as)^7}\right)^{*}_{x=x_0-0}. \quad (4.4)
$$

Например, определитель Δ_{21} из (4.2) вычисляется по следующей формуле:

$$
\Delta_{21}=\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{8} C_{1k}y_{1k}(x_0-0,s) & y_{22}(x_0+0,s) & \dots & y_{28}(x_0+0,s)\\ \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\dfrac{y'_{1k}(x_0-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x_0+0,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{28}(x_0+0,s)}{bs}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\dfrac{y^{(7)}_{1k}(x_0-0,s)}{(as)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{22}(x_0+0,s)}{(bs)^7} & \dots & \dfrac{y^{(7)}_{28}(x_0+0,s)}{(bs)^7} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{8} C_{1k}\Delta_{21k},
$$

$$
\Delta_{21k}=\begin{vmatrix} y_{1k}(x_0-0,s) & y_{22}(x_0+0,s) & \dots & y_{28}(x_0+0,s)\\ \dfrac{y'_{1k}(x_0-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x_0+0,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{28}(x_0+0,s)}{bs}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{y^{(7)}_{1k}(x_0-0,s)}{(as)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{22}(x_0+0,s)}{(bs)^7} & \dots & \dfrac{y^{(7)}_{28}(x_0+0,s)}{(bs)^7} \end{vmatrix}, \quad k=1,2,\dots,8. \quad (4.5)
$$

Аналогичным образом из (4.2)–(4.4) выведем следующие формулы:

$$
\Delta_{22}=\sum_{k=1}^{8} C_{1k}y_{22k};\dots;\Delta_{2m}=\sum_{k=1}^{8} C_{1k}\Delta_{2mk},\quad m=1,2,\dots,8;\dots;\Delta_{28}=\sum_{k=1}^{8} C_{1k}\Delta_{28k}, \quad (4.6)
$$

$$
\Delta_{22k}=\begin{vmatrix} y_{21}(x_0+0,s) & y_{1k}(x_0-0,s) & y_{23}(x_0+0,s) & \dots & y_{28}(x_0+0,s)\\ \dfrac{y'_{21}(x_0+0,s)}{bs} & \dfrac{y'_{1k}(x_0-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{23}(x_0+0,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{28}(x_0+0,s)}{bs}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{y^{(7)}_{21}(x_0+0,s)}{(bs)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{1k}(x_0-0,s)}{(as)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{23}(x_0+0,s)}{(bs)^7} & \dots & \dfrac{y^{(7)}_{28}(x_0+0,s)}{(bs)^7} \end{vmatrix}, \quad (4.7)
$$

$$
k=1,2,\dots,8.
$$

$$
\Delta_{28k}=\begin{vmatrix} y_{21}(x_0+0,s) & \dots & y_{27}(x_0+0,s) & y_{1k}(x_0-0,s)\\ \dfrac{y'_{21}(x_0+0,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{27}(x_0+0,s)}{bs} & \dfrac{y'_{1k}(x_0-0,s)}{as}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{y^{(7)}_{21}(x_0+0,s)}{(bs)^7} & \dots & \dfrac{y^{(7)}_{27}(x_0+0,s)}{(bs)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{1k}(x_0-0,s)}{(as)^7} \end{vmatrix}, \quad (4.8)
$$

$$k=1,2,\ldots,8.$$

Используя асимптотические формулы (3.4)–(3.7) и (3.10)–(3.12), вычислим определители Δ_{21k} из (4.5):

$$\Delta_{21k}=$$

$$=\begin{vmatrix} e^{a\omega_k s x_0}\left[1+\dfrac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{A_8^0(x_0)}{s^8}+\right] & \ldots & e^{b\omega_8 s x_0}\left[1+\dfrac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{B_8^0(x_0)}{s^8}+\right] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_k e^{a\omega_k s x_0}\left[1+\dfrac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{A_8^1(x_0)}{s^8}+\right] & \ldots & \omega_8 e^{b\omega_8 s x_0}\left[1+\dfrac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{B_8^1(x_0)}{s^8}+\right] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_k^7 e^{a\omega_k s x_0}\left[1+\dfrac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{A_8^7(x_0)}{s^8}+\right] & \ldots & \omega_8^7 e^{b\omega_8 s x_0}\left[1+\dfrac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{B_8^7(x_0)}{s^8}+\right] \end{vmatrix}=$$

$$=e^{a\omega_k s x_0}e^{b\omega_2 s x_0}(\ldots)e^{b\omega_8 s x_0}\left[\Delta_{21k0}+\frac{\Delta_{21k7}}{s^7}+\frac{\Delta_{21k8}}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right],\quad k=1,2,\ldots,8, \tag{4.9}$$

$$\Delta_{21k0}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_k & \omega_2 & \omega_3 & \ldots & \omega_8 \\ \omega_k^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \ldots & \omega_8^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_k^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \ldots & \omega_8^7 \end{vmatrix}=\begin{cases}\Delta_{00}, & k=1; \\ 0, & k\neq 1,\quad k=2,3,\ldots,8,\end{cases} \tag{4.10}$$

где Δ_{00} — определитель Вандермонда чисел $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_8$,

$$\Delta_{00}=\det\ \mathrm{Wandermond's}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_8)=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \ldots & \omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \ldots & \omega_8^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \ldots & \omega_8^7 \end{vmatrix}\overset{(3.1)}{=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^7 \\ 1^2 & z^2 & (z^2)^2 & \ldots & (z^7)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^7 & z^7 & (z^2)^7 & \ldots & (z^7)^7 \end{vmatrix}=$$

$$=\prod_{\substack{k>n;\\ k,n=1,2,\ldots,8}}(\omega_k-\omega_n)=\Delta_{00}\neq 0,$$

определители Δ_{21k7} и Δ_{21k8} из (4.9) можно вычислить, раскладывая определитель Δ_{21k} по столбцам на сумму определителей. Из формул (3.12)–(3.14) следует, что $B_7(x_0)=0$, поэтому получим

$$\Delta_{21k7}=\begin{vmatrix} \omega_k A_7(x_0) & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_k\omega_k A_7(x_0) & \omega_2 & \ldots & \omega_8 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_k^7\omega_k A_7(x_0) & \omega_2^7 & \ldots & \omega_8^7 \end{vmatrix}\overset{(4.10)}{=}\omega_k A_7(x_0)\Delta_{21k0}=\begin{cases}\omega_1 A_7(x_0)\Delta_{00}, & k=1; \\ 0, & k=2,3,\ldots,7,\end{cases} \tag{4.11}$$

Пусть (δ_{ij}) $(i,j=1,2,\ldots,8)$ — матрица алгебраических миноров к элементам (b_{ij}) $(i,j=1,2,\ldots,8)$ определителя Δ_{00} из (4.10). Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 4.1

$$(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{18}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{28}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots & \delta_{38}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta_{81} & \delta_{82} & \delta_{83} & \dots & \delta_{88}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\Delta_{00}}{8}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1\\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} & \dots & -\omega_7^{-1} & \omega_8^{-1}\\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} & \dots & \omega_7^{-2} & -\omega_8^{-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^{-6} & -\omega_2^{-6} & \omega_3^{-6} & -\omega_4^{-6} & \dots & \omega_7^{-6} & -\omega_8^{-6}\\ -\omega_1^{-7} & \omega_2^{-7} & -\omega_3^{-7} & \omega_4^{-7} & \dots & -\omega_7^{-7} & \omega_8^{-7}\end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

В справедливости формулы (4.12) леммы можно убедиться, раскладывая определитель Δ_{00} из (4.11) на сумму определителей по строчкам или по столбцам. Идею строгого доказательства леммы можно найти в работе [17].

Используя формулу (4.12) леммы, вычислим определитель Δ_{21k8} из (4.9):

$$\Delta_{21k8}=\left\{\begin{vmatrix}A_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1\\ \omega_k A_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_7^k A_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7\end{vmatrix}_{1k}-\begin{vmatrix}B_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1\\ \omega_1 B_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_7^1 B_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7\end{vmatrix}_2+\right.$$

$$+\begin{vmatrix}B_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1\\ \omega_1 B_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_7^1 B_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7\end{vmatrix}_2+\begin{vmatrix}1 & B_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1\\ \omega_k & \omega_2 B_8^0(x_0) & \omega_3 & \dots & \omega_8\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_k^7 & \omega_7^2 B_8^7(x_0) & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7\end{vmatrix}_{3k}+\dots+$$

$$\left.+\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & B_8^0(x_0)\\ \omega_k & \omega_2 & \dots & \omega_7 & \omega_8 B_8^0(x_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_k^7 & \omega_2^7 & \dots & \omega_7^7 & \omega_7^8 B_8^0(x_0)\end{vmatrix}_{8k}\right\}e^{a\omega_k s x_0}e^{b\omega_2 s x_0}(\dots)e^{b\omega_8 s x_0}, \quad k=1,2,\dots,8; \quad (4.13)$$

$$|\dots|_{1k}=A_8^0(x_0)\delta_{11}-\omega_k A_8^1(x_0)\delta_{21}+\omega_k^2A_8^2(x_0)\delta_{31}-\dots-\omega_k^7A_8^7(x_0)\delta_{81}\overset{(4.12)}{=}$$

$$=\frac{\Delta_{00}}{8}\left[A_8^0(x_0)\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^0-A_8^1(x_0)\omega_k(-\omega_1^{-1})+A_8^2(x_0)\omega_k^2\omega_1^{-2}-\dots-A_8^7(x_0)\omega_k^7(-\omega_1^{-7})\right]=$$

$$=\frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{n=0}^{7}A_8^n(x_0)\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^n; \quad (4.14)$$

$$|\dots|_2\overset{(4.13,4.14)}{=}\frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{n=0}^{7}B_8^n(x_0)\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^n\overset{(3.15)}{=}\frac{\Delta_{00}}{8}\frac{-56q_2(x_0)}{16b^8}; \quad (4.15)$$

$$|\dots|_2+|\dots|_{31}+\dots+|\dots|_{81}\overset{(4.13)}{=}B_8^0(x_0)[1\cdot\delta_{11}-1\cdot\delta_{12}+1\cdot\delta_{13}-\dots-1\cdot\delta_{18}]+$$

$$+B_8^1(x_0)[-\omega_1\delta_{21}+\omega_2\delta_{22}-\omega_3\delta_{23}+\dots+\omega_8\delta_{28}]+$$

$$+B_8^2(x_0)[\omega_1^2\delta_{31}-\omega_2^2\delta_{32}+\omega_3^2\delta_{33}-\dots-\omega_8^2\delta_{38}]+\dots+$$

$$+B_8^7(x_0)[-\omega_1^7\delta_{81}+\omega_2^7\delta_{82}-\omega_3^7\delta_{83}-\dots+\omega_8^7\delta_{88}]=$$

$$=B_8^0(x_0)\Delta_{00}+B_8^1(x_0)\Delta_{00}+B_8^2(x_0)\Delta_{00}+\dots+B_8^7(x_0)\Delta_{00}=$$

$$= \Delta_{00} \sum_{n=0}^{7} B_8^n(x_0) \overset{(3.15)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8} \frac{-56q_2(x_0)}{16b^8}. \qquad (4.16)$$

Учитывая, что из формул (3.1) имеем $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_8 = 0$, из формул (4.13)–(4.16) при $k = 1$ найдем

$$\Delta_{2118} = (|\ldots|_{11} - |\ldots|_2) + [|\ldots|_2 + |\ldots|_{31} + \cdots + |\ldots|_{81}] e^{a\omega_1 s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0} =$$
$$= \left\{ \frac{\Delta_{00}}{8} \sum_{n=0}^{7} A_8^n(x_0) - \frac{\Delta_{00}}{8} \left(\frac{-56q_2(x_0)}{16b^8} \right) + \Delta_{00} \left(\frac{-56q_2(x_0)}{16b^8} \right) = \Delta_{00} G_{11}(x_0) \right\} \times$$
$$\times e^{a\omega_1 s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0}, \qquad (4.17)$$
$$G_{11}(x_0) = \frac{-7q_1(0)}{16a^8} - \frac{49q_2(x_0)}{16b^8}.$$

При $k = 2, 3, \ldots, 8$ из формулы (4.13) и свойств определителей следует

$$\Delta_{21k8} = \left\{ \begin{vmatrix} A_8^0(x_0) & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_k A_8^1(x_0) & \omega_2 & \ldots & \omega_8 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_7^k A_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \ldots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_{1k} - \begin{vmatrix} B_8^0(x_0) & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_k B_8^1(x_0) & \omega_2 & \ldots & \omega_8 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_7^k B_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \ldots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_{9k} \right\} \times$$
$$\times e^{a\omega_k s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0} \overset{(4.12)}{=}$$
$$= \frac{\Delta_{00}}{8} \left\{ \left[A_8^0(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^0 + A_8^1(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^1 + A_8^2(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^2 + \cdots + A_8^7(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^7 \right]_{10k} - \right.$$
$$- \left[B_8^0(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^0 + B_8^1(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^1 + B_8^2(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^2 + \cdots + \right.$$
$$\left. \left. + B_8^7(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^7 \right]_{11k} \right\} e^{a\omega_k s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8. \qquad (4.18)$$

Применяя формулы (3.7)–(3.8), (3.13)–(3.14) и (3.1)–(3.2), из формулы (4.18) выведем:

$$\Delta_{21k8} = \Delta_{00} H_{1k}, \quad H_{1k} = \frac{1}{8} \frac{D_{1k}}{16} \Delta\widetilde{q}(x_0), \quad \Delta\widetilde{q}(x_0) = \frac{q_1(x_0)}{a^8} - \frac{q_2(x_0)}{b^8},$$
$$D_{1k} = 7\omega_k^0 + 5\omega_k^1 + 3\omega_k^2 + \omega_k^3 - \omega_k^4 - 3\omega_k^5 - 5\omega_k^6 - 7\omega_k^7, \quad k = 2, 3, \ldots, 8, \qquad (4.19)$$

$\Delta\widetilde{q}(x_0)$ — обобщенный «скачок» потенциала $q(x)$ в точке x_0 разрыва коэффициентов.

Для определителей Δ_{22k} ($k = 1, 2, \ldots, 8$) из (4.6)–(4.8) аналогично формуле (4.9)–(4.11) получим:

$$\Delta_{22k} = e^{b\omega_1 s x_0} e^{a\omega_k s x_0} e^{b\omega_3 s x_0} (\ldots) e^{b\omega_8 s x_0} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} \left[1 + \frac{\omega_1 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^0(x_0)}{s^8} + \right] & \ldots & \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^0(x_0)}{s^8} + \right] \\ \omega_1 \left[1 + \frac{\omega_1 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^1(x_0)}{s^8} + \right] & \ldots & \omega_8 \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^1(x_0)}{s^8} + \right] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_k^7 \left[1 + \frac{\omega_1 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^7(x_0)}{s^8} + \right] & \ldots & \omega_8^7 \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^7(x_0)}{s^8} + \right] \end{vmatrix}, \qquad (4.20)$$

$$k=1,2,3,\ldots,8.$$

Раскладывая определители формулы (4.20) по столбцам на сумму определителей, применяя свойства определителей и формулы (3.1)–(3.2), аналогично формулам (4.9)–(4.19) найдем:

$$\Delta_{22k}=e^{a\omega_k sx_0}e^{-b\omega_2 sx_0}\left[\Delta_{22k0}+\frac{\Delta_{22k7}}{s^7}+\frac{\Delta_{22k8}}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right],\quad k=1,2,\ldots,8, \tag{4.21}$$

$$\Delta_{22k0}=\left[\begin{array}{l}\Delta_{00},\quad k=2;\\ 0,\quad k\neq 2,\quad k=1,3,4,\ldots,8;\end{array}\right. \tag{4.22}$$

$$\Delta_{22k7}=\omega_k A_7(x_0)\Delta_{22k0}=\left[\begin{array}{l}\omega_2 A_7(x_0)\Delta_{00},\quad k=2;\\ 0,\quad k\neq 2,\quad k=1,3,4,\ldots,8;\end{array}\right. \tag{4.23}$$

$$\begin{gathered}\Delta_{22k8}=\Delta_{00}G_{22}(x_0)e^{a\omega_2 sx_0}e^{-b\omega_2 sx_0},\\ G_{22}(x_0)=\frac{-7q_1(0)}{16a^8}-\frac{49q_2(0)}{16a^8}\overset{(4.17)}{=}G_{11}(x_0);\end{gathered} \tag{4.24}$$

$$\begin{gathered}\Delta_{22k8}=\Delta_{00}H_{2k},\quad H_{2k}=\frac{1}{8}\frac{D_{2k}}{16}\Delta\widetilde{q}(x_0),\\ D_{2k}=7\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^0+5\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^1+3\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^3-\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^4-\\ -3\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^5-5\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^6-7\left(\frac{\omega_k}{\omega_7}\right)^7,\quad k\neq 2,\qquad k=1,3,4,\ldots,8.\end{gathered} \tag{4.25}$$

Из формул (3.1) имеем $\dfrac{\omega_k}{\omega_2}=\dfrac{\omega_{k-1}}{\omega_1}=\omega_{k-1}$ $(k=2,3,\ldots,8)$, поэтому из формул (4.19) и (4.25) получим:

$$D_{23}=D_{12},\quad D_{24}=D_{13},\ldots,D_{2m}=D_{1,m-1}\quad(m=3,4,\ldots,8),\quad D_{21}=D_{18}. \tag{4.26}$$

Изучая аналогичным образом определители $\Delta_{23},\Delta_{24},\ldots,\Delta_{28}$ из (4.6)–(4.8), получим формулы, аналогичные формулам (4.20)–(4.26) и придем к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.1 *Матрица*

$$(\Delta_{2mk})=\begin{pmatrix}\Delta_{211}&\Delta_{212}&\ldots&\Delta_{218}\\ \Delta_{221}&\Delta_{222}&\ldots&\Delta_{228}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \Delta_{281}&\Delta_{282}&\ldots&\Delta_{288}\end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$(\Delta_{2mk})=\Delta_{00}\times \tag{4.27}$$

$$\times\begin{pmatrix}e^{(a\omega_1-b\omega_1)sx_0}\left[1+\frac{\omega_1A_7(x_0)}{s^7}+\frac{G_{11}(x_0)}{s^8}+\right]&\ldots&e^{(a\omega_8-b\omega_1)sx_0}\left[0+\frac{0}{s^7}+\frac{H_{18}}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right]\\ e^{(a\omega_1-b\omega_2)sx_0}\left[0+\frac{0}{s^7}+\frac{H_{18}}{s^8}+\right]&\ldots&e^{(a\omega_8-b\omega_2)sx_0}\left[0+\frac{0}{s^7}+\frac{H_{17}}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right]\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ e^{(a\omega_1-b\omega_7)sx_0}\left[0+\frac{0}{s^7}+\frac{H_{13}}{s^8}+\right]&\ldots&e^{(a\omega_8-b\omega_7)sx_0}\left[0+\frac{0}{s^7}+\frac{H_{12}}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right]\\ e^{(a\omega_1-b\omega_8)sx_0}\left[0+\frac{0}{s^7}+\frac{H_{12}}{s^8}+\right]&\ldots&e^{(a\omega_8-b\omega_8)sx_0}\left[1+\frac{\omega_8A_7(x_0)}{s^7}+\frac{G_{88}(x_0)}{s^8}+\right]\end{pmatrix},$$

$$G_{kk}(x_0) = G_{11}(x_0) = \frac{-7q_1(0)}{16a^8} - \frac{-49q_2(0)}{16b^8}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8, \tag{4.28}$$

$H_{12}, H_{13}, \ldots, H_{18}$ *определены формулами* (4.19).

5. Изучение граничных условий (1.4)

Применяя формулы (3.3)–(3.8), (3.9)–(3.11) и (4.2)–(4.6), из граничных условий (1.4) получим:

$$\begin{cases} y_1^{(m_p)}(0,s) \overset{(1.4)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k} \dfrac{y_{1k}^{(m_p)}(0,s)}{(as)^{m_p}} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}\omega_k^{m_p} = 0, \quad p = 1,2,3,4; \\ y_2^{(n_r)}(\pi,s) \overset{(1.4)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} \dfrac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi,s)}{(bs)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} \dfrac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s) \neq 0} \dfrac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi,s)}{(bs)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} \left(\sum\limits_{n=1}^{8} C_{1n}\Delta_{2kn} \right) \dfrac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi,s)}{(bs)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}\psi_{1k}^{(n_r)}(\pi,s) = 0, \\ \psi_{1k}^{(n_r)}(\pi,s) = \sum\limits_{n=1}^{8} \Delta_{2n_k} \dfrac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi,s)}{(bs)^{n_r}}, \quad r = 1,2,3,4. \end{cases} \tag{5.1}$$

Система (5.1) — это система из восьми линейных однородных уравнений с восемью неизвестными $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{18}$. Из метода Крамера следует, что такая система имеет ненулевое решение только в случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому верна следующая теорема.

Теорема 5.1 *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1.1)–(1.5) *имеет следующий вид:*

$$f(s) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{18} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{41} & b_{42} & \ldots & b_{48} \\ b_{51} & b_{52} & \ldots & b_{58} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{81} & b_{82} & \ldots & b_{88} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \ldots & \omega_8^{m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{m_4} & \omega_2^{m_4} & \ldots & \omega_8^{m_2} \\ \psi_{11}^{(n_1)}(\pi,s) & \psi_{12}^{(n_1)}(\pi,s) & \ldots & \psi_{18}^{(n_1)}(\pi,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{11}^{(n_4)}(\pi,s) & \psi_{12}^{(n_4)}(\pi,s) & \ldots & \psi_{18}^{(n_4)}(\pi,s) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.2}$$

$$b_{pk} = \omega_k^{m_p}, \quad p = 1,2,3,4; \quad b_{pk} = \psi_{1k}^{(n_p)}(\pi,s), \quad p = 5,6,7,8, \quad k = 1,2,\ldots,8.$$

Применяя теорему Лапласа, разложим определитель $f(s)$ из (5.2) по последним четырем строкам, в результате получим:

$$f(s) = \phi_{1234}W_{5678} + \phi_{2345}W_{1678} + \phi_{3456}W_{1278} + \phi_{4567}W_{1238} + \cdots - \phi_{1345}W_{2678} + \cdots = 0, \tag{5.3}$$

$$\phi_{k_1k_2k_3k_4} = \begin{vmatrix} \psi_{1k_1}^{(n_1)}(\pi,s) & \ldots & \psi_{1k_4}^{(n_1)}(\pi,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{1k_1}^{(n_4)}(\pi,s) & \ldots & \psi_{1k_4}^{(n_4)}(\pi,s) \end{vmatrix},$$

$$W_{k_1k_2k_3k_4} = \begin{vmatrix} \dfrac{y_{1k_1}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} & \ldots & \dfrac{y_{1k_4}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{y_{1k_1}^{(m_4)}(0,s)}{(as)^{m_4}} & \ldots & \dfrac{y_{1k_4}^{(m_4)}(0,s)}{(as)^{m_4}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1k_1} & \ldots & b_{1k_4} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{4k_1} & \ldots & b_{4k_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{k_1}^{m_1} & \ldots & \omega_{k_4}^{m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{k_1}^{m_4} & \ldots & \omega_{k_4}^{m_4} \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

$$k_1k_2k_3k_4 \in \{1, 2, \ldots, 8\}.$$

В уравнении (5.3) знаки слагаемых определяются знаками соответствующих перестановок индексов: перестановки (12345678), (23451678), (34561278) (45671238) четные, поэтому знак «+», перестановка (13452678) нечетная, поэтому знак «−».

Применяя формулы (3.1), вычислим определители $W_{k_1k_2k_3k_4}$ из (5.4):

$$W_{1234} = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \omega_3^{m_1} & \omega_4^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \omega_3^{m_2} & \omega_4^{m_2} \\ \omega_1^{m_3} & \omega_2^{m_3} & \omega_3^{m_3} & \omega_4^{m_3} \\ \omega_1^{m_4} & \omega_2^{m_4} & \omega_3^{m_4} & \omega_4^{m_4} \end{vmatrix} \overset{(3.1)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} \\ 1^{m_3} & z^{m_3} & z^{2m_3} & z^{3m_3} \\ 1^{m_4} & z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \mathrm{Wandermond's}(z^{m_1}, z^{m_2}, z^{m_3}, z^{m_4}) = \prod_{\substack{k>n,\\ k,n=1,2,3,4}} (z^{m_k} - z^{m_n}) = P_4 \neq 0; \quad (5.5)$$

$$W_{2345} = \begin{vmatrix} \omega_2^{m_1} & \ldots & \omega_5^{m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_2^{m_4} & \ldots & \omega_5^{m_4} \end{vmatrix} \overset{(3.1)}{=} \begin{vmatrix} z^{m_1} & \ldots & z^{4m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{m_4} & \ldots & z^{4m_4} \end{vmatrix} = z^{m_1}z^{m_2}z^{m_3}z^{m_4} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & \ldots & z^{3m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{m_4} & \ldots & z^{3m_4} \end{vmatrix} \overset{(5.7)}{=}$$

$$= z^{M_4} P_4, \quad M_4 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = \sum_{k=1}^{4} m_k; \quad (5.6)$$

$$W_{3456} = \begin{vmatrix} \omega_3^{m_1} & \ldots & \omega_6^{m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_3^{m_4} & \ldots & \omega_6^{m_4} \end{vmatrix} \overset{(3.1)}{=} \begin{vmatrix} z^{2m_1} & \ldots & z^{5m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{2m_4} & \ldots & z^{5m_4} \end{vmatrix} = z^{2M_4} P_4;$$

$$W_{4567} = z^{3M_4} P_4; \quad W_{5678} = z^{4M_4} P_4; \quad W_{6789} = (-1) W_{1678} = z^{5M_4} P_4, \ldots. \quad (5.7)$$

Используя формулы (5.1), (4.27), (3.10)–(3.14), выпишем определитель ϕ_{1234} из (5.3):

$$\phi_{1234} = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{vmatrix},$$

$$U_{m1} = \Delta_{211} \frac{y_{21}^{(n_m)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}} + \Delta_{221} \frac{y_{22}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}} + \Delta_{231} \frac{y_{23}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}} + \ldots;$$

$$\Delta_{mk} = \sum_{p=1}^{8} \Delta_{2pk} \frac{y_{2p}^{(n_m)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}}, \quad m = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.8)$$

при этом из (4.27) следует, что основными по росту переменной s являются определители $\Delta_{211}, \Delta_{222}, \Delta_{233}, \Delta_{244}, \ldots$.

В более удобном виде определитель ϕ_{1234} перепишем следующим образом:

$$\phi_{1234} = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{vmatrix},$$

$$U_{m1} = e^{M\omega_1 s}\omega_1^{n_m}\left[1 + \frac{\omega_1\psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] + \frac{H_{18}}{s^8}\omega_2^{n_m}e^{A\omega_1 s}e^{B\omega_2 s} +$$
$$+\frac{H_{17}}{s^8}\omega_3^{n_m}e^{A\omega_1 s}e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{16}}{s^8}\omega_4^{n_m}e^{A\omega_1 s}e^{B\omega_4 s} + \frac{H_{15}}{s^8}\omega_5^{n_m}e^{A\omega_1 s}e^{B\omega_5 s} + \ldots;$$
$$U_{m2} = e^{M\omega_2 s}\omega_2^{n_m}\left[1 + \frac{\omega_2\psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] + \frac{H_{12}}{s^8}\omega_1^{n_m}e^{A\omega_2 s}e^{B\omega_1 s} +$$
$$+\frac{H_{18}}{s^8}\omega_3^{n_m}e^{A\omega_2 s}e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{17}}{s^8}\omega_4^{n_m}e^{A\omega_2 s}e^{B\omega_4 s} + \frac{H_{16}}{s^8}\omega_5^{n_m}e^{A\omega_2 s}e^{B\omega_5 s} + \ldots;$$
$$U_{m3} = e^{M\omega_3 s}\omega_3^{n_m}\left[1 + \frac{\omega_3\psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] + \frac{H_{13}}{s^8}\omega_1^{n_m}e^{A\omega_3 s}e^{B\omega_1 s} +$$
$$+\frac{H_{12}}{s^8}\omega_2^{n_m}e^{A\omega_3 s}e^{B\omega_2 s} + \frac{H_{18}}{s^8}\omega_4^{n_m}e^{A\omega_3 s}e^{B\omega_4 s} + \frac{H_{17}}{s^8}\omega_5^{n_m}e^{A\omega_3 s}e^{B\omega_5 s} + \ldots;$$
$$U_{m4} = e^{M\omega_4 s}\omega_4^{n_m}\left[1 + \frac{\omega_4\psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] + \frac{H_{14}}{s^8}\omega_1^{n_m}e^{A\omega_4 s}e^{B\omega_1 s} +$$
$$+\frac{H_{13}}{s^8}\omega_2^{n_m}e^{A\omega_4 s}e^{B\omega_2 s} + \frac{H_{12}}{s^8}\omega_3^{n_m}e^{A\omega_4 s}e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{18}}{s^8}\omega_5^{n_m}e^{A\omega_4 s}e^{B\omega_5 s} + \ldots, \tag{5.9}$$
$$m = 1, 2, 3, 4,$$

где введены следующие обозначения:

$$\psi_7 = A_7(x_0)+B_7(\pi); \quad V_{11}^{n_m} = G_{11}(x_0)+B_8^{n_m}(\pi); \quad A = ax_0, \quad B = b(\pi-x_0), \quad M = A+B. \tag{5.10}$$

Аналогичным образом выписывается определитель ϕ_{2345} из (5.3)–(5.4):

$$\phi_{2345} = \begin{vmatrix} U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} \\ U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} \end{vmatrix},$$
$$U_{m5} = e^{M\omega_5 s}\omega_5^{n_m}\left[1 + \frac{\omega_5\psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] + \frac{H_{15}}{s^8}\omega_1^{n_m}e^{A\omega_5 s}e^{B\omega_1 s} +$$
$$+\frac{H_{14}}{s^8}\omega_2^{n_m}e^{A\omega_5 s}e^{B\omega_2 s} + \frac{H_{13}}{s^8}\omega_3^{n_m}e^{A\omega_5 s}e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{12}}{s^8}\omega_4^{n_m}e^{A\omega_5 s}e^{B\omega_4 s} + \ldots, \tag{5.11}$$
$$m = 1, 2, 3, 4,$$

элементы U_{m2}, U_{m3}, U_{m4} $(m = 1, 2, 3, 4)$ определены формулами (5.9)–(5.10).

Из формул (5.9)–(5.11) видно, что при вычислении определителей ϕ_{1234} и ϕ_{2345} основными по росту переменной s будут экспоненты $e^{M\omega_1 s}e^{M\omega_2 s}e^{M\omega_3 s}e^{M\omega_4 s}$ и $e^{M\omega_2 s}e^{M\omega_3 s}e^{M\omega_4 s}e^{M\omega_5 s}$. Аналогичным образом при вычислении определителя $\phi_{k_1k_2k_3k_4}$ из (5.2)–(5.4) основными по росту s будут экспоненты $e^{M\omega_{k_1} s}e^{M\omega_{k_2} s}e^{M\omega_{k_3} s}e^{M\omega_{k_4} s}$. Таким образом, чтобы получить индикаторную диаграмму (см. [27, с. 12]) уравнения (5.2)–(5.4) (а это нужно сделать для нахождения корней данного уравнения), необходимо изучить выпуклую оболочку множества точек $\{\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}+\omega_{k_4}\}$, $k_n \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, $n = 1, 2, 3, 4$, индексы попарно различны.

Индикаторная диаграмма уравнения (5.2)–(5.4) представлена на Рис. 5.1.

Из Рис. 5.1 видно, что индикаторная диаграмма уравнения (5.2)–(5.4) — это правильный восьмиугольник с вершинами в точках $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \overset{(3.1)}{=} 1 + (\sqrt{2} + 1)i$, $\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5 \overset{(3.1)}{=} -1+(\sqrt{2}+1)i$, $\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6, \ldots, \omega_7+\omega_8+\omega_1+\omega_2$, $\omega_8+\omega_1+\omega_2+\omega_3$. Точки $\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}+\omega_{k_4}$ при $|k_m-k_n| \geqslant 2$ попадают внутрь индикаторной диаграммы

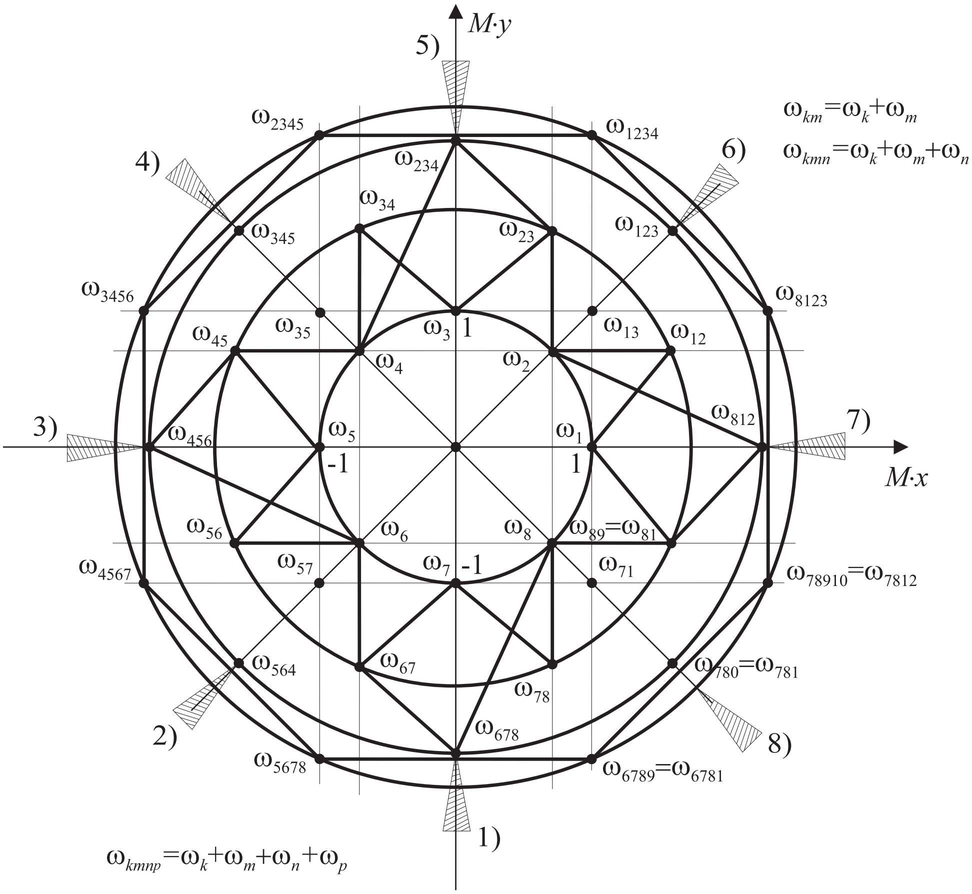

Рис. 5.1. Индикаторная диаграмма уравнения (5.2)–(5.4).

и на асимптотику корней уравнения (5.2)–(5.4) не влияют (см. [27, с. 12]). Индикаторная диаграмма показывает, что корни уравнения (5.2)–(5.4) находятся в восьми секторах 1), 2),…,8) бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого правильного восьмиугольника.

6. Асимптотика собственных значений в секторе 1) индикаторной диаграммы

Чтобы найти асимптотику корней уравнения (5.2)–(5.4) в секторе 1) индикаторной диаграммы Рис. 5.1, в этом уравнении необходимо оставить экспоненты с показателями $\overline{\omega}_{6781} = \omega_{1234}$ и $\overline{\omega}_{5678} = \omega_{2345}$, поэтому верно следующее утверждение.

Теорема 6.1 *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1.1)–(1.5) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы 5.1 имеет вид*

$$g_1(s) = \phi_{1234} W_{5678} + \phi_{2345} W_{1678} \overset{(5.7),(5.9)}{=} \phi_{1234} z^{4M_4} P_4 - \phi_{2345} z^{5M_4} P_4 = 0. \qquad (6.1)$$

Разделим в уравнении (6.1) на $z^{4M_4}P_4 \neq 0$ и приведем его к виду

$$g_1(s) = \phi_{1234} - z^{4M_4}\phi_{2345} = 0, \tag{6.2}$$

где ϕ_{1234} и ϕ_{2345} определены формулами (5.9)–(5.11).

Раскладывая определители ϕ_{1234} из (5.9) и ϕ_{2345} из (5.11) по столбцам на сумму определителей, используя свойства определителей, выведем

$$\phi_{1234} = R_{12340} + \frac{R_{12347}}{s^7} + \frac{R_{12348}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right), \tag{6.3}$$

$$\phi_{2345} = R_{23450} + \frac{R_{23457}}{s^7} + \frac{R_{23458}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right), \tag{6.4}$$

$$R_{12340} = \begin{vmatrix} \omega_1^{n_1}e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_1}e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_1}e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_1}e^{M\omega_4 s} \\ \omega_1^{n_2}e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_2}e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_2}e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_2}e^{M\omega_4 s} \\ \omega_1^{n_3}e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_3}e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_3}e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_3}e^{M\omega_4 s} \\ \omega_1^{n_4}e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_4}e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_4}e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_4}e^{M\omega_4 s} \end{vmatrix} = R_4 e^{M(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)s}, \tag{6.5}$$

$$R_4 = \begin{vmatrix} \omega_1^{n_1} & \omega_2^{n_1} & \omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1} \\ \omega_1^{n_2} & \omega_2^{n_2} & \omega_3^{n_2} & \omega_4^{n_2} \\ \omega_1^{n_3} & \omega_2^{n_3} & \omega_3^{n_3} & \omega_4^{n_3} \\ \omega_1^{n_4} & \omega_2^{n_4} & \omega_3^{n_4} & \omega_4^{n_4} \end{vmatrix} \overset{(5.7)}{=} \prod_{\substack{k>m;\\ k,m=1,2,3,4}} (z^{n_k} - z^{n_m}) \neq 0, \tag{6.6}$$

$$R_{23450} = \begin{vmatrix} \omega_2^{n_1}e^{M\omega_2 s} & \ldots & \omega_5^{n_1}e^{M\omega_5 s} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \omega_2^{n_4}e^{M\omega_2 s} & \ldots & \omega_5^{n_4}e^{M\omega_5 s} \end{vmatrix} \overset{(5.8)}{=} z^{N_4}R_4 e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}, \quad N_4 = \sum_{k=1}^{4} n_k; \tag{6.7}$$

$$R_{12347} = (\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\psi_7 R_4 e^{M(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)s}; \tag{6.8}$$

$$R_{23457} = (\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)\psi_7 z^{N_4} R_4 e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)s}; \tag{6.9}$$

$$R_{12348} = R_{123481} + R_{123482}; \quad R_{23458} = R_{234581} + R_{234582}; \tag{6.10}$$

$$R_{123481} = R_4 e^{M(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)s}\sum_{k=1}^{4} V_{11}^{n_k}; \quad R_{234581} = R_4 z^{N_4} e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)s}\sum_{k=1}^{4} V_{11}^{n_k}; \tag{6.11}$$

$$R_{123482} = H_{15}e^{A\omega_1 s}e^{B\omega_5 s}\begin{vmatrix} \omega_5^{n_1} & \omega_2^{n_1} & \omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \omega_5^{n_4} & \omega_2^{n_4} & \omega_3^{n_4} & \omega_4^{n_4} \end{vmatrix} e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s} =$$
$$= (-1)R_4 z^{N_4} H_{15} e^{A\omega_1 s}e^{B\omega_5 s}e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s}; \tag{6.12}$$

$$R_{234582} = H_{15}e^{A\omega_5 s}e^{B\omega_1 s}\begin{vmatrix} \omega_2^{n_1} & \omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1} & \omega_1^{n_1} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \omega_2^{n_4} & \omega_3^{n_4} & \omega_4^{n_4} & \omega_1^{n_4} \end{vmatrix} e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s} =$$
$$= (-1)R_4 H_{15} e^{A\omega_5 s}e^{B\omega_1 s}e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4)s}. \tag{6.13}$$

Подставим формулы (6.3)–(6.13) в уравнение (6.2), разделим на $R_4 e^{M(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)s} \neq 0$ и приведем это уравнение к следующему виду:

$$g_1(s) = \left\{ e^{M(\omega_1-\omega_5)s} + \frac{1}{s^7}\sum_{k=1}^{4}\omega_k\psi_7 e^{M(\omega_1-\omega_5)s} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{s^8}\frac{1}{R_4}[R_{123481} + R_{123482}]e^{-M\sum_{k=2}^{5}\omega_k s} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right\} -$$

$$-\left\{z^{M_4}z^{N_4}+\frac{1}{s^7}\sum_{k=2}^{5}\omega_k\psi_7 z^{M_4}z^{N_4}+\frac{1}{s^8}\frac{1}{R_4}[R_{234581}+R_{234582}]e^{-M\sum_{k=2}^{5}\omega_k s}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right\}=0. \tag{6.14}$$

Основное приближение уравнения (6.14) имеет вид

$$e^{M(\omega_1-\omega_5)s}-z^{M_4}z^{N_4}=0\overset{(3.1)}{\Leftrightarrow}e^{M(\omega_1-\omega_5)s}=e^{2\pi ik}e^{\frac{2\pi i}{8}(M_4+N_4)}\Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}}=\frac{2\pi i\widetilde{k}}{M(\omega_1-\omega_5)}, \tag{6.15}$$

$$\widetilde{k}=k+\frac{M_4+N_4}{8},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Основное приближение (6.15) позволяет найти асимптотику корней уравнения (6.14) в секторе 1) (см. [2, 28]).

Т е о р е м а 6.2 *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1.1)–(1.5) *в секторе* 1) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1}=\frac{2\pi i}{M(\omega_1-\omega_5)}\left[\widetilde{k}+\frac{d_{7k_1}}{\widetilde{k}^7}+\frac{d_{8k_1}}{\widetilde{k}^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)\right], \tag{6.16}$$
$$\widetilde{k}=k+\frac{M_n+N_n}{8},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 6.2 покажем, что все коэффициенты d_{7k_1}, d_{8k_1} асимптотического разложения (6.16) находятся единственным образом. Применяя формулы Маклорена, запишем:

$$e^{M(\omega_1-\omega_5)s}\big|_{s_{k,1}}=\exp\left[M(\omega_1-\omega_5)\frac{2\pi i}{M(\omega_1-\omega_5)}\left(\widetilde{k}+\frac{d_{7k_1}}{\widetilde{k}^7}+\ldots\right)\right]=$$
$$=z^{M_4}z^{N_4}\left[1+\frac{2\pi i d_{7k_1}}{\widetilde{k}^7}+\frac{2\pi i d_{8k_1}}{\widetilde{k}^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)\right]; \tag{6.17}$$

$$\frac{1}{s^n}\bigg|_{s_{k,1}}=\frac{1}{\widetilde{k}^n}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^8}\right)\right)\frac{M^n(\omega_1-\omega_5)^n}{(2\pi i)^n},\quad n=7,\ n=8. \tag{6.18}$$

Подставляя формулы (6.16)–(6.18) в уравнение (6.14), получим:

$$\left[z^{M_4}z^{N_4}+z^{M_4}z^{N_4}\frac{2\pi i d_{7k_1}}{\widetilde{k}^7}+z^{M_4}z^{N_4}\frac{2\pi i d_{8k_1}}{\widetilde{k}^4}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)-z^{M_4}z^{N_4}\right]+$$
$$+\frac{1}{\widetilde{k}^7}\psi_7\sum_{k=1}^{4}\omega_k z^{M_4}z^{N_4}\frac{M^7(\omega_1-\omega_5)^7}{2^7\pi^7 i^7}+$$
$$+\frac{1}{\widetilde{k}^8}\frac{1}{R_4}\frac{M^8(\omega_1-\omega_5)^8}{2^8\pi^8 i^8}[R_{123481}+R_{123482}]e^{-M\sum_{k=2}^{5}\omega_k s}\big|_{s_{k,1}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)-$$
$$-\frac{1}{\widetilde{k}^7}\psi_7 z^{M_4}z^{N_4}\sum_{k=2}^{5}\omega_k\frac{M^7(\omega_1-\omega_5)^7}{2^7\pi^7 i^7}-$$
$$-\frac{1}{\widetilde{k}^8}\frac{1}{R_4}\frac{M^8(\omega_1-\omega_5)^8}{2^8\pi^8 i^8}z^{M_4}[R_{234581}+R_{234582}]e^{-M(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)s}\big|_{s_{k,1}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)=0. \tag{6.19}$$

При $\widetilde{k}^0$ имеем $z^{M_4}z^{N_4} - z^{M_4}z^{N_4} = 0$ — верно, это подтверждает правильность выбора основного приближения (6.15).

Приравнивая в уравнении (6.19) коэффициенты при $\dfrac{1}{\widetilde{k}^7}$ найдем

$$d_{7k_1} = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\psi_7}{z^{M_4}z^{N_4}}\frac{M^7(\omega_1-\omega_5)^7}{2^7\pi^7(-i)}z^{M_4}z^{N_4}\left[\sum_{k=1}^{4}\omega_k - \sum_{k=2}^{5}\omega_k\right] = \psi_7\frac{M^7(\omega_1-\omega_5)^8}{2^8\pi^8}, \tag{6.20}$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

Из формул (3.1) имеем $\omega_1 = 1$, $\omega_5 = -1$, $\omega_1 - \omega_5 = 2$, из формул (5.10), (3.6) и (3.12) найдем

$$\psi_7 = \left(-\frac{1}{8a^7}\right)\int_0^{x_0} q_1(t)dt + \left(-\frac{1}{8b^7}\right)\int_{x_0}^{\pi} q_2(t)dt =$$
$$= \left(-\frac{1}{8}\right)\left[\frac{1}{a^7}\int_0^{x_0} q_1(t)dt + \frac{1}{b^7}\int_{x_0}^{\pi} q_2(t)dt\right],$$

Подставляя эти формулы в (6.20), получим:

$$d_{7k_1} = \left(-\frac{1}{8\pi}\right)\frac{M^7}{\pi^7}\left[\frac{1}{a^7}\int_0^{x_0} q_1(t)dt + \frac{1}{b^7}\int_{x_0}^{\pi} q_2(t)dt\right], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.21}$$

Приравнивая в (6.19) коэффициенты при $\dfrac{1}{\widetilde{k}^8}$, получим:

$$d_{8k_1} = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{M^8(\omega_1-\omega_5)^8}{2^8\pi^8}\frac{1}{R_4 z^{M_4}z^{N_4}}e^{-M(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)s}\big|_{s_{k,1}}\{[R_{123481}+R_{123482}]-$$
$$-z^{M_4}[R_{234581}+R_{234582}]\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.22}$$

Из формул (6.11) и (6.17) получим:

$$[R_{123481} - z^{M_4}R_{234581}]e^{-M\sum_{k=2}^{5}\omega_k s}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} =$$
$$= e^{M(\omega_1-\omega_5)s}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} R_4\sum_{k=1}^{4}V_{11}^{n_k} - z^{M_4}R_4 z^{N_4}\sum_{k=1}^{4}V_{11}^{n_k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{4}V_{11}^{n_k}[z^{M_4}z^{N_4}R_4 - R_4 z^{M_4}z^{N_4}] = 0. \tag{6.23}$$

Из формул (6.12), (6.14), (6.17) найдем

$$[R_{123482} - z^{M_4}R_{234582}]e^{-M\sum_{k=2}^{5}\omega_k s}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} =$$
$$= H_{15}[R_4 z^{N_4}e^{a\omega_1 s x_0}e^{b(\pi-x_0)\omega_5 s}e^{-M\omega_5 s} - z^{M_4}R_4 e^{a\omega_5 s x_0}e^{b(\pi-x_0)\omega_1 s}e^{-M\omega_5 s}]\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} =$$
$$= H_{15}R_4 z^{\frac{M_4+N_4}{2}}e^{\frac{ax_0+b(\pi-x_0)}{2}(\omega_1-\omega_5)s}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}}\times$$
$$\times\left[z^{-\frac{M_4-N_4}{2}}e^{\frac{ax_0-b(\pi-x_0)}{2}(\omega_1-\omega_5)s}\frac{2\pi i\widetilde{k}}{M(\omega_1-\omega_5)} - z^{-\frac{M_4-N_4}{2}}e^{-\frac{ax_0-b(\pi-x_0)}{2}}\frac{2\pi i\widetilde{k}}{M}\right] =$$

$$= H_{15} R_4 (-1)^k z^{M_4} z^{N_4} (-2i) \sin\left[\frac{ax_0 - b(\pi - x_0)}{M}\pi\widetilde{k} - \frac{\pi}{8}(M_4 - N_4)\right]. \qquad (6.24)$$

Подставив формулы (6.23), (6.24) в (6.22) и сделав необходимые преобразования, получим:

$$d_{8k_1} = (-1)^{k+1}\frac{H_{15}}{\pi}\frac{M^8(\omega_1 - \omega_5)^8}{\pi^8\pi^8}\sin\left[\frac{ax_0 - b(\pi - x_0)}{M}\pi\widetilde{k} - \frac{\pi}{8}(M_4 - N_4)\right]. \qquad (6.25)$$

Из формул (4.19) найдем

$$D_{15} = 7\omega_5^0 + 5\omega_5^1 + 3\omega_5^2 + \omega_5^3 - \omega_5^4 - 3\omega_5^5 - 5\omega_5^6 - 7\omega_5^7 = 8;$$
$$H_{15} = \frac{1}{8}\frac{D_{15}}{16}\Delta\widetilde{q}(x_0) = \frac{\Delta\widetilde{q}(x_0)}{16} = \frac{1}{16}\left[\frac{q_1(x_0)}{a^8} - \frac{q_2(x_0)}{b^8}\right],$$

поэтому, подставляя эти формулы в (6.25), выведем:

$$d_{8k_1} = (-1)^{k+1}\frac{M^8}{\pi^8}\frac{\Delta\widetilde{q}(x_0)}{16\pi}\sin\left[\frac{ax_0 - b(\pi - x_0)}{ax_0 + b(\pi - x_0)}\pi\widetilde{k} - \frac{\pi}{8}(M_4 - N_4)\right],$$
$$M = ax_0 + b(\pi - x_0),$$
$$\Delta\widetilde{q}(x_0) = \frac{q_1(x_0)}{a^8} - \frac{q_2(x_0)}{b^8}, \quad M_4 = \sum_{k=1}^{4} m_k, \quad N_4 = \sum_{k=1}^{4} n_k, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (6.26)$$

Формулы (6.21) и (6.26) показывают, что все коэффициенты d_{7k_1}, d_{8k_1} формулы (6.16) находятся единственным образом. В статье приведены явные формулы для их вычисления, таким образом теорема 6.2 полностью доказана.

Изучая аналогичным образом секторы 2), 3),...,8) индикаторной диаграммы Рис. 5.1, придем к выводу о справедливости следующего утверждения.

Теорема 6.3 1) *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1.1)–(1.5) *в секторах* 2), 3),...,8) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{-\frac{2\pi i}{8}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2}e^{-\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1}e^{-\frac{4\pi i}{8}}; \ldots; s_{k,m} = s_{k,m-1}e^{-\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1}e^{-\frac{2\pi i}{8}(m-1)}, \qquad (6.27)$$
$$m = 1, 2, \ldots, 8.$$

2) *При этом*

$$\lambda_{k,m} = s_{k,m}^8, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, 8. \qquad (6.28)$$

С помощью формул (6.16), (6.21)–(6.28) можно изучить асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1.1)–(1.5), вычислить формулы регуляризованных следов этого оператора, решить обратные спектральные задачи.

Список литературы

1. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. 1968. Т. 65, № 4. С. 558–566.

2. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Математический сборник. 1967. Т. 72, № 2. С. 293–310.

3. Печенцов А. С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений, содержащих параметр, с кратными корнями характеристического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 2. С. 263–273.

4. Чернятин В. А. Асимптотики высшего порядка спектра оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 2. С. 206–215.

5. Gottlieb H. P. W. Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients // Journal of Math. Anal. and Appl. 1988. Vol. 132, pp. 123–137.

6. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 698–723.

7. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестник МГУ. Сер.: «Математика, механика». 1986. № 6. С. 3–6.

8. Будаев В. Д. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединённых функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 6. С. 941–952.

9. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.

10. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108.

11. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Труды МИАН. 2010. Т. 270. С. 188–197.

12. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечётного порядка с суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1808–1811.

13. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

14. Митрохин С. И. Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений // Известия Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. «Математика. Механика. Информатика». 2017. Т. 17. вып. 1. С. 5–18.

15. Гуревич А. П., Хромов А. П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 1. С. 3–15.

16. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.

17. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Известия вузов. Математика. 2018. № 6. С. 31–47.

18. Митрохин С. И. Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка со знакопеременной весовой функцией // Вестник МГУ. Сер.: «Математика, механика» 2018. № 6. С. 46–58.

19. Юрко В. А. Спектральный анализ дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке // СМФН. 2017. Т. 63, № 2. С. 362–372.

20. Айгунов Г. А., Гехтман М. М. К вопросу о максимально возможной скорости роста системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с непрерывной весовой функцией на конечном отрезке // УМН. 1997. Т. 52, № 3 (315). С. 161-162.

21. Юрко В. А. Об обратной задаче для квазипериодических дифференциальных пучков с условиями разрыва внутри интервала // Математические заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 476–480.

22. Гехтман М. М., Загиров Ю. М. О максимально возможной скорости роста ортонормированных собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с непрерывной положительной весовой функцией // УМН. 1992. Т. 47, № 3 (285). С. 157–158.

23. Айгунов Г. А. Об ограниченности ортонормированных собственных функций нелинейной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля с неограниченной сверху весовой функцией на конечном отрезке // УМН. 2002. Т. 57, № 1 (343). С. 145–146.

24. Юрко В. А. Об обратных узловых и спектральных задачах для краевых задач с условиями разрыва внутри интервала // Известия Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. «Математика. Механика. Информатика». 2008. Т. 8. вып. 1. С. 31–35.

25. Митрохин С. И. Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. М.: ИНТУИТ, 2009. 364 с.

26. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

27. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

28. Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабасси Ю. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1346–1348.

Поступила 25.11.2019

MSC2020 34B09

Asymptotics of the spectrum of even-order differential operators with discontinuos weight functions

© **S. I. Mitrokhin**[1]

Abstract. The boundary-value problem for an eighth-order differential operator whose potential is a piecewise continuous function on the segment of the operator definition is studied. The weight function is piecewise constant. At the discontinuity points of the operator coefficients, the conditions of «conjugation» must be satislied which follow from physical considerations. The boundary conditions of the studied boundary value problem are separated and depend on several parameters. Thus, we simultaneously study the spectral properties of entire family of differential operators with discontinuous coefficients. The asymptotic behavior of the solutions of differential equations defining the operator is obtained for large values of the spectral parameter. Using these asymptotic expansions, the conditions of «conjugation» are investigated; as a result, the boundary conditions are studied. The equation on eigenvalues of the investigated boundary value problem is obtained. It is shown that the eigenvalues are the roots of some entire function. The indicator diagram of the eigenvalue equation is investigated. The asymptotic behavior of the eigenvalues in various sectors of the indicator diagram is found.

Key Words: boundary value problem, spectral parameter, differential operator, weight function, piecewise continuous potential, asymptotic behavior of eigenvalues

References

1. V. B. Lidsky, V. A. Sadovnichyi, "[Asymptotic formulas for the roots of a class of entire functions]", *Mathematical Collection*, **65**:4 (1968), 558–566 (In Russ.).
2. V. A. Sadovnichyi, "[On the traces of ordinary differential operators of higher orders]", *Mathematical Collection*, **72**:2 (1967), 293–310 (In Russ.).
3. A. S. Pechentsov, "[Boundary value problems for differential equations containing a parameter with multiple roots of the characteristic equation]", *Differential Equations*, **20**:2 (1984), 263–273 (In Russ.).
4. V. A. Chernyatin, "[Higher-order asymptotics of the spectrum of the Sturm—Liouville operator]", *Differential Equations*, **38**:2 (2002), 206–215 (In Russ.).
5. H. P. W. Gottlieb, "[Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients]", *Journal of Math. Anal. and Appl.*, **132** (1988), 123–137 (In Engl.).
6. V. A. Ilyin, "[On the convergence of eigenfunction expansions at the points of discontinuity of coefficients of the differential operator]", *Mathematical Notes*, **22**:5 (1977), 698–723 (In Russ.).
7. S.I. Mitrokhin, "[About the formulas of regularized traces of differential operators of second order with discontinuous coefficients]", *Vestnik MGU. Ser.: "Mathematics, mechanics"*, 1986, no. 6, 3–6 (In Russ.).

[1]**Sergey I. Mitrokhin**, Researcher Computing Center, Lomonosov Moscow State University (6, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1896-0563, mitrokhin-sergey@yandex.ru

8. V. D. Budaev, “[On unconditional basis property on a closed interval of systems of eigenfunctions and associated functions of a second-order operator with discontinuous coefficients]”, *Differential equations*, **23**:6 (1987), 941–952 (In Russ.).

9. V. A. Ilyin, “[Necessary and sufficient conditions for the Riesz basis property of root vectors of discontinuous operators of second order]”, *Differential Equations*, **22**:12 (1980), 2059–2071 (In Russ.).

10. V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichy, “[Asymptotics of any order of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm—Liouville boundary value problem on an interval with summable potential]”, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mathematical series*, **64**:4 (2000), 47–108 (In Russ.).

11. S. I. Mitrokhin, “[On spectral properties of a fourth-order differential operator with summable coefficients]”, *Trudy MIAN*, **270** (2010), 188–197 (In Russ.).

12. S. I. Mitrokhin, “[On spectral properties of odd-order differential operators with summable potential]”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1808–1811 (In Russ.).

13. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “[Sturm—Liouville operators with singular potentials]”, *Mathematical Notes*, **66**:6 (1999), 897–912 (In Russ.).

14. S. I. Mitrokhin, “[Multipoint differential operators: ”splitting” of eigenvalues, which are mainly in the main]”, *Izvestia Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya.*, **17**:1 (2017), 5–18 (In Russ.).

15. A. P. Gurevich, A. P. Khromov, “[Differentiation operators of first and second orders with alternating weight function]”, *Mathematical Notes*, **56**:1 (1994), 3–15 (In Russ.).

16. S. I. Mitrokhin, “[On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous weight function]”, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russ.).

17. S. I. Mitrokhin, “[Asymptotics of the eigenvalues of a differential operator with an alternating weight function]”, *News of Universities. Mathematics*, 2018, no. 6, 31–47 (In Russ.).

18. S. I. Mitrokhin, “[On the asymptotics of the eigenvalues of the differential operator of fourth order with alternating weighting function]”, *Vestnik MGU. Ser. ¡¡Mathematics, Mechanics¿¿*, 2018, no. 6, 46–58 (In Russ.).

19. V. A. Yurko, “[Spectral analysis of higher-order differential operators with discontinuity conditions at an internal point]”, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, **63**:2 (2017), 362–372 (In Russ.).

20. G. A. Aigunov, M. M. Gekhtman, “[On the question of the maximum possible growth rate of the system of eigenfunctions of the Sturm—Liouville operator with a continuous weight function on a finite interval]”, *Uspekhi Mathematiki*, **52**:3(315) (1997), 161–162 (In Russ.).

21. V. A. Yurko, “[On the inverse problem for quasiperiodic differential beams with discontinuity conditions within an the interval]”, *Mathematical Notes*, **98**:3 (2015), 476–480 (In Russ.).

22. M. M. Gekhtman, Yu. M. Zagirov, "[On the maximum possible growth rate of orthonormal eigenfunctions of the Sturm-Liouville operator with continuous positive weight function]", *Uspekhi matematiki*, **47**:3(285) (1992), 157–158 (In Russ.).

23. G. A. Aigunov, "[On the boundedness of orthonormal eigenfunctions of a nonlinear boundary value problem of the Sturm—Liouville type with a weight function unbounded above on a finite interval]", *Uspekhi matematiki*, **57**:1(343) (2002), 145–146 (In Russ.).

24. V. A. Yurko, "[On inverse nodal and spectral problems for boundary value problems with discontinuity conditions within an interval]", *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seria.*, **8**:1 (2008), 31–35 (In Russ.).

25. S. I. Mitrokhin, *[Spectral theory of operators: smooth, discontinuous, summable coefficients]*, INTUIT Publ., Moscow, 2009 (In Russ.), 364 p.

26. M. A. Naimark, *[Linear differential operators]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 528 p.

27. R. Bellman, K. L. Cook, *[Differential-difference equations]*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 548 p.

28. V. A. Sadovnichy, V. A. Lyubishkin, Yu. Belabassi, "[On regularized sums of roots of an entire function of one class]", *Reports of the USSR Academy of Sciences*, **254**:6 (1980), 1346–1348 (In Russ.).

Submitted 25.11.2019