

УДК 512.772, 515.165.4

## О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости

© В. А. Горская<sup>1</sup>, Г. М. Полотовский<sup>2</sup>

**Аннотация.** В первой части 16-й проблемы Гильберта поставлен вопрос о топологии неособых проективных алгебраических кривых и поверхностей. К этой проблематике относится задача о топологии алгебраических многообразий с особенностями. Частный случай задачи – изучение кривых, распадающихся в произведение кривых, находящихся в общем положении. В статье рассматривается задача топологической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости неособой кривой степени 3 и двух неособых кривых степени 2 при условиях общего положения и максимальности взаимного расположения этих кривых, в частности при максимальном числе общих точек каждой пары кривых-сомножителей. Доказано, что классификация содержит не более шести конкретных типов расположений изучаемого вида, из которых четыре построены, а вопрос о реализуемости двух оставшихся открыт.

**Ключевые слова:** неособые плоские вещественные алгебраические кривые, 16-я проблема Гильберта, кривые с особенностями, распадающиеся кривые, топологическая классификация

### 1. Введение и постановка задачи

Исследование топологии распадающихся плоских вещественных алгебраических кривых входит в круг вопросов, относящихся к первой части 16-й проблемы Гильберта. Для первого нетривиального случая (кривые степени 6, распадающиеся в произведение двух  $M$ -кривых, пересекающихся без касаний в максимально возможном числе вещественных точек) эта задача была поставлена Д. А. Гудковым в предисловии к книге [1] и решена Г. М. Полотовским в [2]. В настоящее время после длинной серии работ нескольких авторов (точные ссылки можно найти в статье [3]) почти завершено решение аналогичной задачи о кривых степени 7. Кроме этого, в работе [4] была найдена топологическая классификация кривых степени 6, распадающихся в произведение любого возможного числа неприводимых сомножителей в общем положении, а в [5–7] – классификация взаимных расположений  $M$ -квintiки и пары прямых. Настоящая работа посвящена аналогичному вопросу для случая, когда неприводимые сомножители кривой степени 7 имеют степени 3, 2 и 2.

Напомним некоторые сведения из теории плоских алгебраических кривых.

**О п р е д е л е н и е 1.1** *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой  $C_m$  степени  $t$  называется однородный многочлен  $C_m(x_0, x_1, x_2)$  степени  $t$  с вещественными коэффициентами от трёх переменных  $x_0, x_1, x_2$ , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

<sup>1</sup>Горская Виктория Александровна, магистрант кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-2598>, [victoriya.gorskaya@mail.ru](mailto:victoriya.gorskaya@mail.ru)

<sup>2</sup>Полотовский Григорий Михайлович, доцент кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), кандидат физико-математических наук; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2503-9951>, [polotovskiy@gmail.com](mailto:polotovskiy@gmail.com)

**О п р е д е л е н и е 1.2** Множество  $\mathbb{R}C_m$  ( $\mathbb{C}C_m$ ) точек вещественной (комплексной) проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  ( $\mathbb{C}P^2$ ) с координатами  $(x_0 : x_1 : x_2)$  ( $(z_0 : z_1 : z_2)$ ), удовлетворяющими уравнению  $C_m = 0$ , называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой  $C_m$ .

**О п р е д е л е н и е 1.3** Кривая  $C_m$  называется неособой, если первые частные производные многочлена  $C_m(x_0, x_1, x_2)$  по переменным  $x_0, x_1, x_2$  не обращаются одновременно в нуль (в  $\mathbb{C}P^2$ ).

Каждая компонента связности множества  $\mathbb{R}C_m$  вещественных точек кривой  $C_m$  (коротко – вещественная ветвь кривой) в случае неособой кривой гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то каждая такая окружность называется *овалом*; каждый овал делит  $\mathbb{R}P^2$  на две области: одна гомеоморфна диску, другая – листу Мёбиуса. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а второго – внешней. Если степень кривой нечётна, то среди её вещественных ветвей имеется ровно одна, вложенная в  $\mathbb{R}P^2$  односторонне; она называется *нечётной ветвью*.

Оценку числа  $N$  вещественных ветвей кривой степени  $m$  даёт классическая

**Т е о р е м а 1.1 (Теорема Харнака (1876))**  $N \leq (m-1)(m-2)/2 + 1$ , и эта оценка точна для любого  $m$ .

**О п р е д е л е н и е 1.4** Множество  $\mathbb{R}C_m$ , рассматриваемое с точностью до изотопии в  $\mathbb{R}P^2$ , называется *вещественной схемой кривой  $C_m$* . Кривые с максимальным возможным по теореме Харнака числом ветвей называются  *$M$ -кривыми*, а их схемы –  *$M$ -схемами*.

Таким образом, вещественная схема  $M$ -кривой степени 3 состоит из нечётной ветви и одного овала, а вещественная схема  $M$ -кривой степени 2 представляет собой один овал.

Цель этой статьи – найти топологическую классификацию (т. е. список попарно различных вещественных схем) кривых степени 7, распадающихся на кубики и две коники, (т. е. определяемых многочленом вида  $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$ ), предполагая выполнение следующих условий:

- (i)  $C_3$ ,  $C_2$  и  $\tilde{C}_2$  являются  $M$ -кривыми;
- (ii) *каждые две из указанных в (i) кривых пересекаются без касания в максимальном (по теореме Безу) числе вещественных точек, т. е.  $\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 6$ ,  $\#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 4$ ;*
- (iii)  $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2 = \emptyset$ , т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;
- (iv) *все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики.*
- (v) *для каждой из коник  $C_2$ ,  $\tilde{C}_2$  все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники;*
- (vi) *точки пересечения нечётной ветви с разными кониками не перемежаются, т. е. можно так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй*<sup>3</sup>.

**О п р е д е л е н и е 1.5** Назовём моделью расположения типа (i)–(vi) (в дальнейшем для краткости – моделью) набор четырёх топологических окружностей, ровно одна из которых вложена в  $\mathbb{R}P^2$  односторонне и вместе с двумя из трёх

<sup>3</sup>Условия (v) и (vi) добавлены, чтобы сделать задачу более наглядной.

остальных окружностей ведёт себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как нечётная ветвь кубики и пара коник в условиях (ii)–(vi); четвёртая окружность не пересекается с первыми тремя.

Таким образом, поставленная выше задача состоит в изотопической классификации моделей, реализуемых как вещественные схемы некоторых кривых степени 7.

## 2. Перечисление допустимых моделей

Допустимыми мы называем модели, удовлетворяющие топологическим следствиям теоремы Безу, а также известным ограничениям на взаимные расположения кубики и коники и на взаимные расположения пары коник.

Ограничения на взаимные расположения  $M$ -кубики и неособой коники состоят в том, что существуют ровно три расположения, в которых нечётная ветвь кубики пересекает конику в шести вещественных точках – см. Рис. 2.1<sup>4</sup> (доказательство есть в [4]).

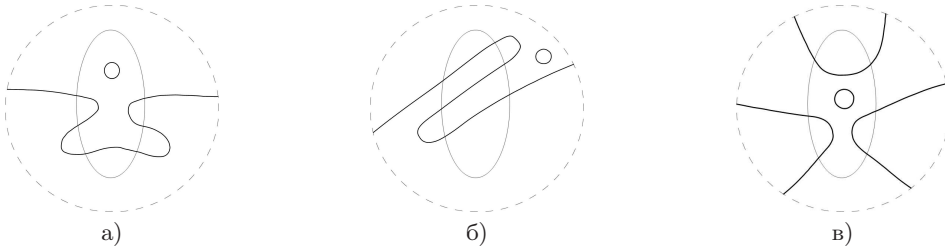


Рис. 2.1. Типы расположений  $M$ -кубики и коники.

Возможные расположения в  $\mathbb{R}P^2$  двух неособых коник с четырьмя общими точками показаны на рис.2.2. Поскольку нельзя добавить к правому из них нечётную ветвь, удовлетворяющую условию (v), то *всюду ниже рассматривается только левое расположение* Рис. 2.2.

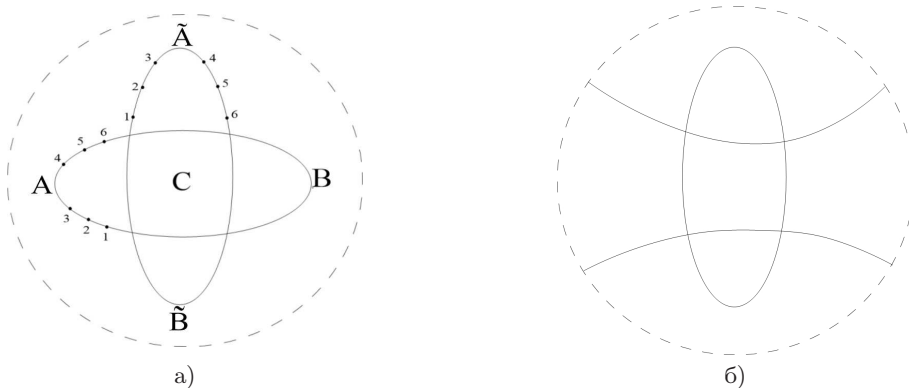


Рис. 2.2. Типы расположений двух неособых коник.

Пусть  $\mathbb{R}C_2$  – «горизонтальный» овал на Рис. 2.2,  $\mathbb{R}\tilde{C}_2$  – «вертикальный», и  $A, \tilde{A}$

<sup>4</sup>Здесь и даже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, (изображаемой пунктиром) считаются отождествлёнными.

– дуги, несущие по шесть точек пересечения с нечётной ветвью кубики. Пронумеруем эти точки так, как на Рис. 2.2, и будем двигаться по нечётной ветви кубики, проходя сначала точки на дуге  $A$ , а затем – точки на дуге  $\tilde{A}$ . Записывая номера этих точек при таком движении по нечётной ветви, мы получим пару перестановок порядка 6.

Следующая лемма доказывается непосредственным перебором с учётом Рис. 2.1.

**Л е м м а 2.1** *На данной дуге возможны только перестановки*

(123456), (165432), (321654), (543216) (отвечают случаю) Рис. 2.1, а);

(123654), (165234), (321456), (345216) (отвечают случаю) Рис. 2.1, б);

(125634), (163254) (отвечают случаю) Рис. 2.1, в),

и обратные к этим перестановкам.<sup>5</sup>

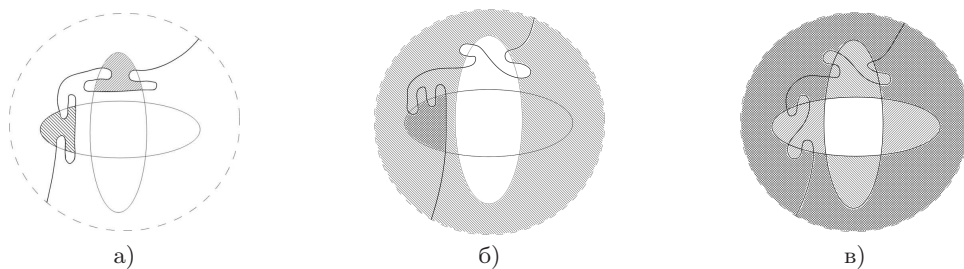
**Л е м м а 2.2** а) случаи, когда нечётная ветвь пересекает одну из дуг  $A, \tilde{A}$  в соответствии с какой-либо перестановкой из списка леммы 2.1, а вторую – в соответствии с обратной к какой-либо перестановке из этого списка, невозможны<sup>6</sup>;

б) пересечения с дугами  $A, \tilde{A}$ , одновременно отвечающие перестановкам из третьей строки списка леммы 2.1 или обратным к ним, невозможны.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отрицание утверждения а) влечёт самопересечение нечётной ветви, а отрицание утверждения б) противоречит условию (vi).

Составляя пары перестановок, допустимые леммами 2.1 и 2.2, получим  $2(8 \cdot 8 + 8 \cdot 2) = 160$  случаев. Однако в силу симметрии (равноправия дуг  $A, \tilde{A}$ ) не все из этих 160 случаев различны; кроме этого, как будет показано ниже, многие из них не удовлетворяют топологическим следствиям теоремы Безу при пересечении с прямой. Наконец, чтобы получить модель, каждое расположение следует дополнить четвёртой окружностью (отвечающей овалу кубики), а сделать это, как мы сейчас покажем, иногда невозможно, а иногда можно двумя способами.

Действительно, в случае Рис. 2.1, а овал кубики расположен в шестиугольной компоненте связности дополнения к объединению коники и нечётной ветви кубики внутри коники, а в случае Рис. 2.1, б) – в шестиугольной компоненте вне коники.



**Рис. 2.3.** Области для расположения овала кубики.

Если пересечение области, допустимой для овала относительно коники  $C_2$ , с областью, допустимой для овала относительно коники  $\tilde{C}_2$ , пусто (см. пример на Рис. 2.3,

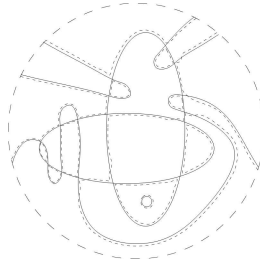
<sup>5</sup>Случаи, когда нечётная ветвь кубики пересекает дугу  $A$  в порядке (123456), первоначально рассматривались в дипломной работе студентки мехмата ННГУ О. Н. Новаковской (2010 г.).

<sup>6</sup>Как выяснится в дальнейшем, схемы расположений, в которых нечётная ветвь пересекает обе дуги  $A$  и  $\tilde{A}$  в соответствии с обратными перестановками к перестановкам из списка леммы 2.1 (тогда эта нечётная ветвь охватывает внешние дуги  $B$  и  $\tilde{B}$  наших коник), не могут быть реализованы кривыми степени 7, но это требует более сложного доказательства.

а), то из данного расположения модель получить невозможно. Если это пересечение состоит из одной или двух компонент связности (заштрихованы дважды на Рис. 2.3, б и Рис. 2.3 в, то получаются одна или две модели соответственно.

Запреты схем расположений кубики и двух коник, получаемые сведением к противоречию с теоремой Безу, проиллюстрируем на примерах, оформленных в виде следующих трёх лемм.

**Л е м м а 2.3** *Модель, показанная на Рис. 2.4, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*

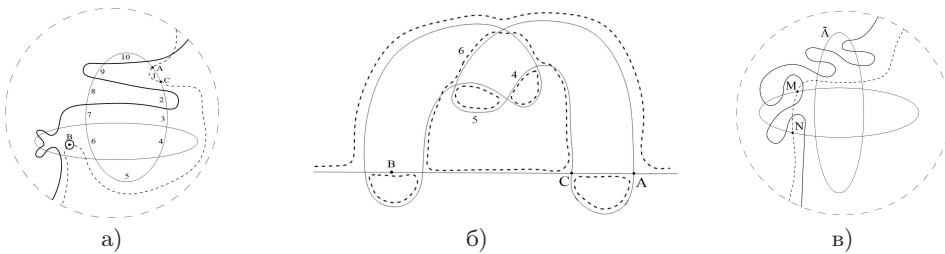


**Рис. 2.4.** Пример применения теоремы Брюзотти.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой степени 7. Возмутим эту кривую в классе кривых степени 7 так, чтобы после устранения её двойных точек образовалась кривая со схемой, показанной на Рис. 2.4 пунктиром, – такое возмущение найдётся в силу теоремы Брюзотти о независимости возмущений двойных точек простой кривой<sup>7</sup>. Схема возмущённой кривой степени 7 содержит гнездо веса три<sup>8</sup> и ещё один овал, что противоречит теореме Безу<sup>9</sup>.

Заметим, что в других случаях применения рассуждений из доказательства этой леммы иногда получаются два гнезда веса 2, что также противоречит теореме Безу.

**Л е м м а 2.4** *Модель, показанная на Рис. 2.5 а, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*



**Рис. 2.5.** Примеры применения теоремы Безу.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой  $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \hat{C}_2$ . Пронумеруем дуги, на которые коника  $\hat{C}_2$  делится

<sup>7</sup>Подробную формулировку теоремы Брюзотти см., например, в [8, с. 14]; кривая называется *простой*, если все её особенности – невырожденные двойные точки.

<sup>8</sup>Т. е. три последовательно вложенных друг в друга овала.

<sup>9</sup>Прямая, проходящая через точку, лежащую внутри самого внутреннего овала гнезда, и через точку внутри любого четвёртого овала, пересечёт кривую не менее чем в девяти точках.

точками пересечения с коникой  $C_2$  и с нечётной ветвью кубики так, как показано на Рис. 2.5а. Выберем точку  $A$  на дуге с номером 1 и точку  $B$  внутри овала кубики и посмотрим, как может проходить прямая  $AB$ , учитывая, что эта прямая не может пересекать каждую конику более чем в двух точках и нечётную ветвь кубики более чем в одной точке (поскольку в силу выбора точки  $B$  обязательно имеются две точки пересечения с овалом кубики).

Без ограничения общности считаем, что прямая  $AB$  в точке  $A$  не касается коники  $\tilde{C}_2$  – этого всегда можно добиться малым шевелением точки  $A$ . Обозначим  $C$  вторую точку пересечения прямой  $AB$  с коникой  $\tilde{C}_2$  и предположим, что точка  $C$  тоже лежит на дуге 1. Тогда прямая может проходить только так, как показано пунктиром на Рис. 2.5 а. Следовательно, прямая  $AB$  расположена относительно коник  $C_2$  и  $\tilde{C}_2$  так, как показано на Рис. 2.5 б, что невозможно: устраняя двойные точки так, как показано на Рис. 2.5 б, получим кривую степени 5, содержащую два овала внутри одного, что противоречит теореме Безу.

Аналогично доказывается невозможность расположения точки  $C$  на дугах 8–10 коники  $\tilde{C}_2$ , а расположение точки  $C$  на любой из остальных дуг влечёт более чем однократное пересечение прямой с нечётной ветвью кубики.

**Л е м м а 2.5** *Модель, показанная на Рис. 2.5 в, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой  $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$ . Выберем точки  $M$  и  $N$  так, как показано на Рис. 2.5 в. В силу теоремы Безу прямая  $MN$  может проходить только так, как показано на данном рисунке. Будем поворачивать прямую  $MN$  вокруг точки  $M$  против часовой стрелки. Тогда точка  $N$  будет двигаться против часовой стрелки по конике  $C_2$  и в какой-то момент должна дойти до коники  $\tilde{C}_2$ . Однако это возможно только после того, как точки пересечения прямой с дугой  $\tilde{A}$  сольются и исчезнут. При этом прямая должна будет пересечь нечётную ветвь кубики внутри коники  $\tilde{C}_2$ , что невозможно, т. к. по крайней мере до того, как точка  $N$  дойдёт до коники  $\tilde{C}_2$ , число точек пересечения прямой с нечётной ветвью (две из них – вблизи точки  $M$ ) будет сохраняться равным трём.

С помощью приёма, описанного в доказательстве леммы 2.4, удалось запретить 15 моделей:  $(1R23456)(123654)$ ;  $(1R2345)(165234)$  (рассмотрена в лемме 2.4);  $(1236R54)(123654)$ ;  $(1236R54)(165234)$ ;  $(16R5234)(165234)$ ;  $(321456R)(123654)$ ;  $(321456R)(165234)$ ;  $(345216R)(165234)$ ;  $(345216R)(345216)$ ;  $(321456)(1R2^*56^*34)$ ;  $(321456)(12^*56^*34)\tilde{B}$ ;  $(345216)(1R2^*56^*34)$ ;  $(345216)(12^*56^*34)\tilde{B}$ ;  $(612543)(6L5^*21^*43)$ ;  $(654123)(6L5^*21^*43)$ . Модель  $(123654)(16R5234)$  запрещается так же, как модели  $(123654)(1236R54)$ ,  $(1236R54)(123654)$ , отвечающие рис.2.5в), в лемме 2.5.

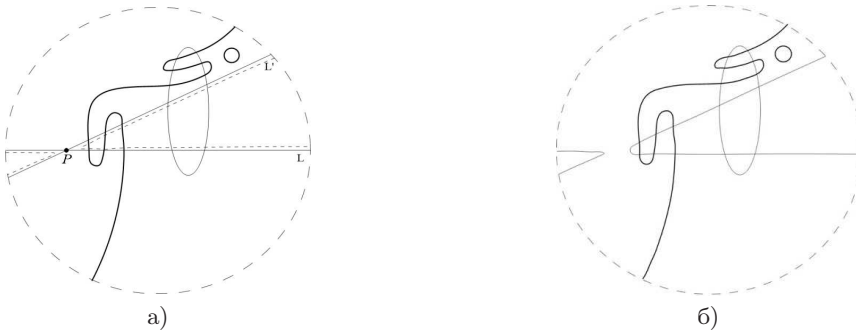
Здесь и далее, чтобы избежать большого количества рисунков, мы применяем кодировку моделей, представляющую собой две перестановки 6-го порядка, снабжённые дополнительными символами из набора  $\{R, L, B, \tilde{B}, C, *\}$ . Чтобы по коду получить рисунок, нужно нарисовать «заготовку», показанную на Рис. 2.2 а, и провести нечётную ветвь, пересекающую дуги  $A$  и  $\tilde{A}$  в нумерованных точках в порядке, указанном в первой и второй перестановках соответственно, причём дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие первым двум символам первой перестановки, расположена внутри двугрульника, ограниченного дугой  $A$ . Если между соседними (в циклическом порядке, причём скобки не замечаются) символами  $i$  и  $j$  записана буква  $R$  ( $L$ ), то в области, примыкающей справа (соответственно, слева) к дуге  $(i, j)$  нечётной ветви, следует расположить овал. Если же после перестановки записана буква  $B$  ( $\tilde{B}$ , или  $C$ ), то овал

следует нарисовать в двуугольнике, ограниченном дугой  $B$  (соответственно, в двуугольнике, ограниченном дугой  $\tilde{B}$ , или в четырёхугольнике внутри коник). Дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие последнему символу второй перестановки и первому символу первой перестановки, а также дуги нечётной ветви, отвечающие символам, между которыми стоит «\*», пересекают один раз граничную окружность модели проективной плоскости.

После применения методов, описанных в леммах 2.3–2.5, для дальнейшего исследования остаются 57 моделей, коды которых перечислены во вторых столбцах таблиц 1–2; смысл остальных столбцов таблиц будет объяснён ниже.

### 3. Построения

В работе [4] найдена классификация взаимных расположений прямой, коники и кубики при условиях максимальности и общего положения, аналогичных условиям (i)–(iii), состоящая из 163 схем. «Удвоение» прямой в некоторых расположениях, построенных в [4], даёт реализацию кривыми степени 7 четырёх моделей из таблиц 1–2.



**Рис. 3.1.** Построение кривой с расположением (165234)(16R5234).

Рассмотрим, например, построенное в [4] расположение, показанное на Рис. 3.1 а (см. № 6 в таблице 2 в [4]), и немного повернём прямую  $L$  вокруг точки  $P$  в положение  $L'$  так, чтобы  $L'$  тоже пересекала нечётную ветвь кубики в трёх точках. Устраняя двойную точку  $P$  кривой  $L \cup L'$  с помощью достаточно малого возмущения, получим неособую конику, объединение которой с исходными коникой и кубикой Рис. 3.1 а реализует модель № 28 из таблицы 2 – см. Рис. 3.1 б).

Аналогично из расположений №№ 3, 105, 126 таблицы 2 работы [4] получаются кривые, реализующие соответственно модели № 35 таблицы 2 и №№ 4, 16 таблицы 1.

### 4. Запреты с помощью теории кос и зацеплений

В этом параграфе опишем применение предложенного С. Ю. Оревковым в [9] метода запрета изотопических типов алгебраических кривых, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод неоднократно излагался в литературе, поэтому приведём лишь его краткое изложение, необходимое для понимания дальнейшего.

Пусть  $C_m$  – простая кривая. Предположим, что существует точка  $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C_m$  такая, что пучок  $L_p$  прямых с центром в этой точке обладает следующими свойствами:

а) в  $L_p$  найдется прямая  $l_0$ , пересекающая кривую  $\mathbb{R}C_m$  в  $m$  различных точках (максимальная прямая);

б) любая прямая  $l \in L_p$  пересекает кривую  $\mathbb{R}C_m$  не менее, чем в  $(m - 2)$  различных точках;

с) каждая прямая пучка имеет не более одной точки двукратного пересечения с  $\mathbb{R}C_m$ , т. е. каждая из таких *критических прямых* либо касается  $\mathbb{R}C_m$ , либо пересекает  $\mathbb{R}C_m$  в её двойной точке без касания.

Пучок, удовлетворяющий условиям а)–с), будем называть *максимальным*. Заметим, что выполнения условия с) всегда можно добиться малым шевелением центра пучка.

Выберем аффинные координаты  $(x, y)$  так, чтобы прямая  $l_0$  (а следовательно, и точка  $p$ ) оказалась в бесконечности, тогда пучок  $L_p$  станет пучком параллельных прямых  $\{l_t\}$  (см. Рис. 4.1 а), где  $l_t$  – прямая, заданная уравнением  $x = t$ . Изображение схемы кривой в таком виде будем называть *развёрткой, отвечающей прямой  $l_0$* .

Данную развёртку удобно кодировать *X-кодом*  $u_1 u_2 \dots u_s$ , где символ  $u_i$  характеризует расположение кривой  $\mathbb{R}C_m$  в окрестности критической прямой  $l_{t_i}$  и принимает одно из значений  $\supset_k, \subset_k, \times_k$  ( $k \in \{1, \dots, m - 1\}$ ) в соответствии с Рис. 4.2<sup>10</sup>, а  $\{l_{t_1}, \dots, l_{t_s}\}$  – набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию параметра  $t_i$ .

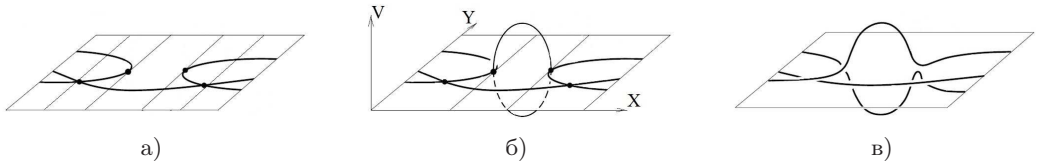


Рис. 4.1. Образование косы.

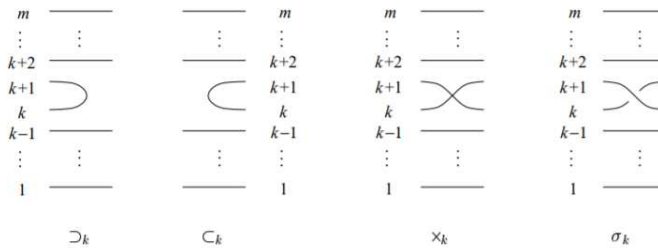


Рис. 4.2. Символы  $\times$ -кода и образующие группы кос.

Пусть  $\mathbb{C}L_p$  – пучок комплексных прямых с центром в точке  $p$  в комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$  и  $M = \mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}L_p$ . Множество  $M$  гомеоморфно набору окружностей; некоторые из них попарно склеены в двойных точках кривой  $\mathbb{R}C_m$  и в точках касания прямых пучка  $L_p$  с этой кривой (см. Рис. 4.1 б<sup>11</sup>).

Устранив все точки склейки некоторым стандартным образом (см. Рис. 4.1 в; подробности см. в [9–10]), получим зацепление  $K(C_m, p)$ . Пусть  $b(C_m, p)$  – коса из  $m$  нитей, замыкание которой совпадает с  $K(C_m, p)$ . Для дальнейшего важно, что в силу предположения о максимальной пучка коса  $b(C_m, p)$  однозначно (с точностью до сопряжённости в группе  $B_m$  кос из  $m$  нитей) определяется взаимным расположением в  $\mathbb{R}P^2$  кривой  $\mathbb{R}C_m$  и пучка  $L_p$ , т. е. развёрткой, отвечающей максимальной прямой.

Из [11] известно, что полученная описанным выше способом коса  $b(C_m, p)$  должна быть *квазиположительной*, т. е. допускать запись в виде  $\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$ , где  $\omega_j$  – неко-

<sup>10</sup>Рис. 4.2 взяты нами из [10], а часть Рис. 4.1 – из [9].

<sup>11</sup>Этот рисунок условный – «мнимая ось»  $V$  двумерна.



торые слова в алфавите  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{m-1}^{-1}\}$ , а  $\sigma_s, 1 \leq s \leq m-1$ , – стандартные образующие группы  $B_m$  (см. Рис. 4.2). Следовательно, если для топологической модели гипотетической кривой  $\mathbb{R}C_m$  при каждом возможном взаимном расположении пучка  $L_p$  и этой модели коса  $b(C_m, p)$  не является квазиположительной, то эта модель не может быть реализована алгебраической кривой степени  $m$ .

В качестве необходимого условия квазиположительности С. Ю. Оревков в [9] предложил использовать

**Неравенство Мурасуги-Тристрама.** Если  $b = \prod \sigma_i^{k_i}$  – квазиположительная коса из  $m$  нитей, то для её замыкания выполняется неравенство

$$|\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где  $\sigma(b)$  и  $n(b)$  – сигнатура и дефект замыкания косы  $b$ ;  $e(b) = \sum k_j$  – алгебраическая степень косы  $b$ .

**Таблица 4.1.** Центр пучка внутри овала кубики.

№пп	Код модели	X-код	h
1	(123456)(123456)C	x3x3x3x3x3x3x4x4x4x4x4x2x2x2x5	2
2	(123456)(123654)B	x4x4x4x3x2)3(3x4x4x4x3x3x5x4x3x3x3	2
3	(123456)(12*56*34)C	x2x2x4x3x3x4x4x5x4x4x4x4x4x3x5	0 (?)
4	(123456)(165234)B	x4x4x4x3x2)3(3x4x3x3x4x4x3x5x4x3x3x3	0 (∅)
5	(1R23456)(321456)	x4x5x2x2x2x3x3x3x4x4x4)3x3x3x3(3x2x3	4
6	(1R23456)(345216)	x4x5x2x2x2x3x4x4x3x3x4)3x3x3x3(3x2x3	2
7	(123654)(1R25634)	x2x3x3x2)3x3x2x2x3x3(3x4x4x4x3x3x3x2	2
8	(165234)(1R25634)	x2x3x3x2)3x3x2x2x3x3(3x4x3x3x4x4x3x2	2
9	(1L65432)(123654)	x4x5x5x5x5x5x4x4x4x3x3x3)4x2(4x3x4x4	2
10	(1L65432)(165234)	x4x5x5x5x5x5x4x3x3x4x4x3)4x2(3x4x4x4	0 (?)
11	(321456)(1L6*32*54)	x3x4x4x3)4x2x3x3x2x2(4x3x3x3x4x4x4x5	2
12	(321456)(1L65432)	x4x4x4)3x2x2x2x2x2(4x3x3x3x4x4x4x5x4	2
13	(321L654)(123654)	x4x5x5x5x4x4x4x3x3x3)4x2x2x2(3x4x4x4	2
14	(321L654)(165234)	x5x5x5x4x3x3x4x4x3)4x2x2x2(4x3x4x4x3	2
15	(345216)(1L6*32*54)	x4x3x2)4x3x3x2x2(4x3x4x4x3x3x4x5x4x3	4
16	(345216)(1L65432)	x4x4x4)3x2x2x2x2x2(4x3x4x4x3x3x4x5x4	0 (∅)
17	(432561)(6L5*21*43)	x3x2)3x2x2x3x3x2x2(4x3x3x3x4x4x3x5x4	2
18	(456321)(6L5*21*43)	x3x2)3x2x2x3x3x2x2(4x3x4x4x3x3x3x5x4	2
19	(654321)(65*21*43)C	x5x4x4x4x4x4x4x3x3x5x4x4x3x3x2x2	2
20	(6L54321)(654123)	x4x5x3x3x3x4x4x4)3x2x2x2x2x2(3x2x3	2
21	(654321)(654321)C	x5x4x4x4x4x4x4x3x3x3x3x3x2x2x5	2

Приведём пример применения описанного метода к моделям из таблиц 4.1–4.2. Рассмотрим модель Рис. 4.3 а, отвечающую коду (16R5234)(345216) (№ 31 в таблице 4.2), выберем точку  $p$  в области  $S$ , а прямую  $l_0$  так, как показано на Рис. 4.3 а. Развёртка, отвечающая этой прямой, и соответствующий этой развёртке X-код показаны на Рис. 4.3 б. Вычисления дают  $h = 2$ , где через  $h$  мы обозначаем значение левой части неравенства Мурасуги-Тристрама. Следовательно, рассматриваемая модель не может быть реализована схемой какой-либо кривой степени 7.

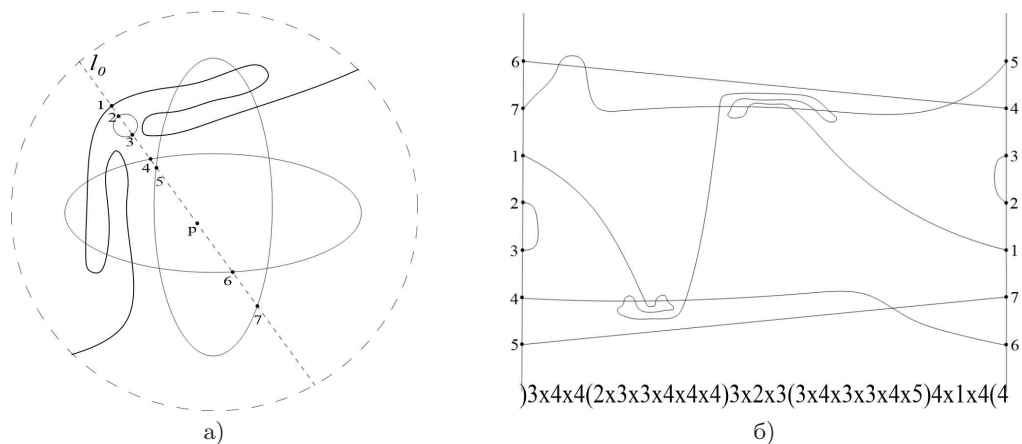


Рис. 4.3. Пример применения метода Оревкова.

Таблица 4.2. Центр пучка внутри коник.

№пш	Код модели	X-код	h
22	(1236R54)(321456)	$x2x2x2)3(3x4x4x4)5(4)4x1x1x1x4(5x4x4x4)3(3x2x2x2$	6
23	(12L3654)(321456)	$)4x2x2x2x3x3x3(3x4x4x4)5x1x1x1x4(5x4x4x4)3(3$	4
24	(1236R54)(345216)	$)3(3x2x3x3)4x2x2x2x3(3x4x3x3x4x4)5x1x1x1x4(4$	2
25	(12L3654)(345216)	$)4x2x2x2x3(4x3x3x3x4x4)5x1x1x1x4(5x4x4x4)3(3$	2
26	(16R5234)(123654)	$)3(2x3x3x4x4x4)3x2(5x4x4x3)4x3x3x3x1x1x1x4(4$	4
27	(165234)(1236R54)	$)4x2(5x4x4x4)3x3x3x3x1x1x1x4(5x4x4x3x3x3)4(3$	2
28	(165234)(16R5234)	$)3(5x4x3x3x4x4x3)4x2x1(4x3x2x4x3)4(4x5x4x4x5)6(4$	0 (∅)
29	(16R5234)(321456)	$)3(3x2x3x4x4x4)3x2x3x3x3(4x3x4x4)5x1x1x1x4(4$	2
30	(1652L34)(321456)	$)4x2x3x3x3(3x4x4x4)5x1x1x1x4(4x5x4x3x3x4)3(3$	4
31	(16R5234)(345216)	$)3x4x4(2x3x3x4x4x4)3x2x3(3x4x3x3x4x5)4x1x4(4$	2
32	(1652L34)(345216)	$)4x2x3(4x3x3x3x4x4)5x1x1x1x4(5x4x4x3x3x3)4(3$	2
33	(32R1456)(123654)	$)4(4x3x3x3)2(5x4x4x4)3x1x1x1x3x3x3x4x3x3x3(3$	4
34	(32R1456)(165234)	$)4(4x3x3x3)2(5x4x4x3x3x4)3x3x1x1x1x4x3x3x3(3$	2
35	(345216)(16R5234)	$)4(3x4x4x4x3x3)2(4x5x4x3x3x3)4x3x4x1x1x1x3(3$	0 (∅)
36	(4325L61)(456321)	$)3(5x4x4x4)3x3x3x3(3x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(4$	4
37	(432561)(45L6321)	$)4(5x4x4x4)3x3x3x3(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3$	4
38	(4325L61)(432561)	$)3(5x4x4x3x3x3)4x3(3x2x3x4x4x3)4x2x1x1x1x4(4$	4
39	(432561)(4325L61)	$)4(5x4x4x3x3x3)4x3(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3$	4
40	(4325L61)(612543)	$)3(4x3x3x3x4x4)5(3x2x3x4x4x3)4x2x1x1x1x4x2(4$	2
41	(432561L)(612543)	$)4x3(3x4x3x3x4x5)4(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3$	4
42	(4325L61)(654123)	$)3x3x3(3x4x4x4)5(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4x2(4$	4
43	(432561L)(654123)	$)4x3x3x3(3x4x4x4)5(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3$	4
44	(45L6321)(432561)	$)3x4(5x4x4x3x3x3)4x3(3x2x3x3)4x2x2x2x4x1x1(4$	4
45	(456321)(4325L61)	$)4(5x4x4x3x3x3)4x3(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(3$	4
46	(45L6321)(456321)	$)3x4(5x4x4x4)3x3x3x3(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(4$	6
47	(456321)(45L6321)	$)4(5x4x4x3)4x3x3x3(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(3$	6

№пп	Код модели	X-код	h
48	(45L6321)(612543)	)3(4x3x3x3x4x4)5(3x2x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4x2(4	4
49	(456321L)(612543)	)4x3(3x4x3x3x4x5)4(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(3	4
50	(45L6321)(654123)	)3x3x3(3x4x4x5)4(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4x2(4	6
51	(456321L)(654123)	)4x4x3x3x3(3x4x4x4)5(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x4(3	6
52	(65R4123)(432561)	)3(5x4x4x3x3x3)4x3x2x2x2(4x3x3x2)3x1x1x1x4(4	4
53	(654123)(4325L61)	)4(5x4x4x3x3x3)4x3x2x2x2(4x3x3x3)2x1x1x1x4(3	4
54	(6125R43)(432561)	)3(5x4x4x3x3x3)4x2(4x3x4x4x3x3)3x1x1x1x4(4	4
55	(612543)(4325L61)	)4(5x4x4x3x3x3)4x3x2(4x3x4x4x3x2)3x1x1x1x4(3	2
56	(65R4123)(456321)	)3(5x4x4x4)3x3x3x3x2x2x2(4x3x3x2)3x1x1x1x4(4	4
57	(654123)(45L6321)	)4(5x4x4x4)3x3x3x3x2x2x2(4x3x3x3)2x1x1x1x4(3	4

Аналогично были рассмотрены все остальные допустимые модели. При этом для выбора центра  $p$  пучка прямых возможны разные варианты. Мы выбирали точку  $p$  внутри окружности, отвечающей овалу кубики (эти случаи собраны в таблицу 4.1) или в какой-либо точке в пересечении внутренних областей окружностей, отвечающих коникам (область  $S$  на Рис. 2.2 а – таблица 4.2. Развёртки и X-коды нетрудно находить «вручную», но вычисления значений  $h$  вряд ли возможны без компьютера (ввиду необходимости нахождения собственных чисел больших матриц для определения сигнатур и ввиду большого количества X-кодов). Мы использовали многократно применявшуюся ранее программу, написанную специально для таких задач М. А. Гуциным в 2003 г., когда он был студентом механико-математического факультета ННГУ. На вход этой программы подаётся X-код, а на выходе получается значение  $h$ .

**З а м е ч а н и е 4.1** В [6, 12] С.Ю. Оревков предложил применять для проверки квазиположительности условие Фокса-Милнора. Примеры применения этого условия можно найти также в [3]. В нашей ситуации было интересно применить его только в случаях, когда модель не удалось ни запретить с помощью неравенства Мурасуги-Тристрама, ни реализовать, т. е. для моделей №№ 3, 10 в таблице 4.1. Проведённые вычисления показали, что условие Фокса-Милнора не запрещает реализуемость этих моделей, поэтому описание этих вычислений мы не приводим.

Итог проведённого исследования сформулируем следующим образом.

**Т е о р е м а 4.1** Модели, отличные от шести моделей, показанных на Рис. 4.4–4.5, не могут быть реализованы как схемы кривых степени 7. Из этих шести моделей Рис. 4.4 реализуются распадающимися кривыми степени 7, удовлетворяющими условиям (i) – (vi), а вопрос о реализуемости двух оставшихся (Рис. 4.5) открыт.

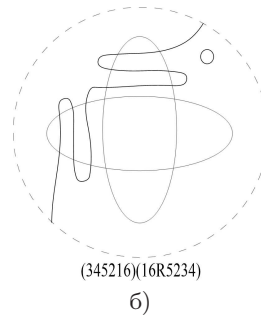
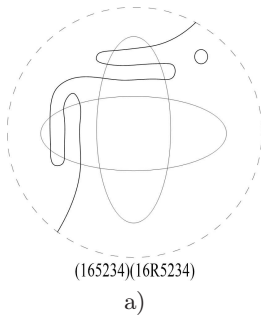




Рис. 4.4. Реализованные схемы.

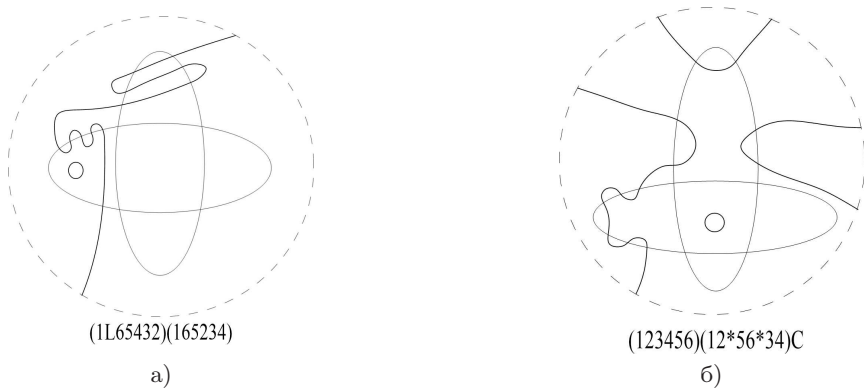


Рис. 4.5. Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Ученые записки Горьковского университета. 1969. № 87. 214 с.
2. Полотовский Г. М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Т. 236, № 3. С. 548–551.
3. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Тематические обзоры. 2020 (в печати).
4. Kuzmenko T. V., Polotovskii G. M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // AMS Translations, Ser. 2. 1996. Vol. 173. pp. 165–177.

5. Korchagin A. B., Polotovskii G. M. On arrangements of a plane real quintic curves with respect to a pair of lines // Commun. Contemp. Math. 2003. Vol. 5, No. 1. pp. 1–24.
6. Оревков С. Ю. Расположения М-квintики относительно коники, максимально пересекающей ее нечётную ветвь // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 4. С. 174–242.
7. Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21, № 2. С. 92–112.
8. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Т.29, № 4(178). С. 3–79.
9. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. Vol. 38. pp. 779–810.
10. Оревков С. Ю., Полотовский Г. М. Проективные М-кубики и М-квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 5. С. 166–184.
11. Lee R. Algebraic functions and closed braids // Topology. 1983. Vol. 22. pp. 191–202.
12. Orevkov S. Yu. Classification flexible M-curves of degree 8 up to isotopy // GAFA, Geom. Funct. Anal. 2002. Vol. 12, No. 4. pp. 723–755.

*Поступила 19.11.2019*

MSC2020 14H50,14P25

## On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane

© V. A. Gorskaya<sup>1</sup>, G. M. Polotovskiy<sup>2</sup>

**Abstract.** In the first part of the 16th Hilbert problem the question about the topology of nonsingular projective algebraic curves and surfaces was formulated. The problem on topology of algebraic manifolds with singularities belong to this subject too. The particular case of this problem is the study of curves that are decomposable into the product of curves in a general position. This paper deals with the problem of topological classification of mutual positions of a nonsingular curve of degree three and two nonsingular curves of degree two in the real projective plane. Additional conditions for this problem include general position of the curves and its maximality; in particular, the number of common points for each pair of curves-factors reaches its maximum. It is proved that the classification contains no more than six specific types of positions of the species under study. Four position types are built, and the question of realizability of the two remaining ones is open.

**Key Words:** nonsingular plane real algebraic curves, the 16th Hilbert problem, curves with singularities, decomposable curves, topological classification

<sup>1</sup>**Victoriya A. Gorskaya**, Undergraduate student, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-2598>, [victoriya.gorskaya@mail.ru](mailto:victoriya.gorskaya@mail.ru)

<sup>2</sup>**Grigory M. Polotovskiy**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12 Bol. Pecherskaya Ulitsa, Nizhny Novgorod, 603155, Russia); Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-2598>, [polotovskiy@gmail.com](mailto:polotovskiy@gmail.com)

## REFERENCES

1. D. A. Gudkov, G. A. Utkin, “[Topology of 6-th degree curves and 4-th degree surfaces (to the Hilbert 16th problem)]”, *Uchenye zapiski Gorkovskogo universiteta*, **87** (1969) (In Russ.), 214 p.
2. G. M. Polotovskiy, “[A catalogue of  $M$ -decomposing curves of sixth order]”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **236**:3 (1977), 548–551 (In Russ.).
3. I. M. Borisov, G. M. Polotovskiy, “[On the topology of plane real decomposable curves of degree 8]”, *Itoqi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Tematicheskie obzory*, 2019 (in press) (In Russ.).
4. T. V. Kuzmenko, G. M. Polotovskii, “Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of  $M$ -curves in general position”, *AMS Translations, Ser. 2*, **173** (1996), 165–177.
5. A. B. Korchagin, G. M. Polotovskii, “On arrangements of a plane real quintic curves with respect to a pair of lines”, *Commun. Contemp. Math.*, **5**:1 (2003), 1–24.
6. S. Yu. Orevkov, “[Arrangements of an  $M$ -quintic with respect to a conic that maximally intersects its odd branch]”, *Algebra i Analiz*, **19**:4 (2007), 174–242 (In Russ.).
7. A. B. Korchagin, G. M. Polotovskiy, “[On positions of a real plane quintic relative to a couple of lines]”, *Algebra i Analiz*, **21**:2 (2009), 92–112 (In Russ.).
8. D. A. Gudkov, “[The topology of real projective algebraic varieties]”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **29**:4(178) (1974), 3–79 (In Russ.).
9. S. Yu. Orevkov, “Link theory and oval arrangements of real algebraic curve”, *Topology*, **38** (1999), 779–810.
10. S. Yu. Orevkov, G. M. Polotovskiy, “[Projective  $M$ -cubics and  $M$ -quartics in general position with a maximally intersecting pair of ovals]”, *Algebra i Analiz*, **11**:5 (1999), 166–184.
11. Lee R., “Algebraic functions and closed braids”, *Topology*, 1983, no. 22, 191–202.
12. S. Yu. Orevkov, “Classification flexible  $M$ -curves of degree 8 up to isotopy”, *GAFa, Geom. Funct. Anal.*, **12**:4 (2002), 723–755.

*Submitted 19.11.2019*