

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.507-519

УДК 519.67; 538.945

Математическое моделирование вольт-амперных характеристик высокотемпературных сверхпроводников с фрактальными границами кластеров нормальной фазы

© М. А. Васютин¹, Н. Д. Кузьмичев², Д. А. Шилкин³

Аннотация. Исследовано влияние фрактальности границ кластеров нормальной фазы высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO) на крип магнитного потока. Получены экспериментальные вольт-амперные и магниторезистивные характеристики YBCO при температуре кипения азота. На основе модели межгранульных кластеров с фрактальными границами проведена аппроксимация экспериментальных данных после геометрико-вероятностного анализа микрофотографий образцов. Предложена модель магниторезистивного состояния, обусловленного крипом потока, для разных транспортных токов и найдены экспериментальная и эмпирическая зависимости фрактальной размерности границ кластеров нормальной фазы YBCO от постоянного магнитного поля. Определена напряжённость магнитного поля для данной фрактальной размерности, при которой начинается проникновение вихрей в гранулы. Показано, что состояние образцов соответствует метастабильной фазе вихревого стекла. Вычислен индекс связности путей срыва связок вихрей на пороге перколяции.

Ключевые слова: высокотемпературные сверхпроводники, кластеры нормальной фазы, фрактальные границы, крип потока.

1. Введение

Моделирование разнообразных природных и общественных процессов на основе фрактальных объектов было предложено Б. Мандельбротом в конце прошлого столетия [1] и с тех пор используется во многих областях науки, в частности в физике [2]. Учёт влияния фрактальности различных структур на их свойства, в т. ч. в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) [3], позволяет строить модели явлений,

¹Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

²Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

³Шилкин Дмитрий Алексеевич, инженер кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9061-3174>, dwi8hi@outlook.com

которые в значительной степени обусловлены топологией перколирующего фрактального множества. ВТСП начинают применяться в промышленных масштабах, поэтому актуальным остаётся вопрос о повышении их критического тока, что, в свою очередь, связывается с необъяснёнными явлениями в ВТСП, накладывающими сильные ограничения на их дальнейшее внедрение [4–6].

Исследуемый образец ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO) представляет собой естественную модель слабосвязанной сети, в которой реализуются самоподобные области (фракталы) [7]. Статистическое подобие этих структур обусловлено как равновероятным изменением их кислородного наполнения, так и наличием разномасштабных пустот, дефектов и т. п.

Дефекты в ВТСП рассматриваются как фрактальные кластеры со специфическими магнитными и транспортными свойствами, сильно влияющими на его вольт-амперную характеристику (ВАХ) [8–9]. Дипиннинг вихрей в ВТСП определяется перколяцией [10], которая происходит по сверхпроводящему кластеру (ток) и по слабым связям (магнитный поток). Слабые связи легко образуются на структурных дефектах вследствие малой длины когерентности ВТСП. Магнитное поле приводит к ещё большему появлению слабых связей, т. к. уменьшает длину когерентности [11]. При пиннинге и движении вихрей основной характеристикой является меняющаяся фрактальная размерность системы каналов транспорта вихрей D , которая увеличивается с увеличением напряженности магнитного поля при фиксированном токе [12] (в данном случае оставлены те же обозначения, что и для перколяции тока).

Функцию распределения кластеров нормальной фазы по площадям, а значит и функцию распределения критических токов этих кластеров, находят визуально. Так же определяют и фрактальную размерность границ кластеров [13]. Однако если границы существенно зависят от внешних условий (например, от магнитного поля), то их фрактальная размерность будет меняться, что чрезвычайно сложно зафиксировать обычными наблюдениями. Именно поэтому в данной работе, кроме неметрико-вероятностного анализа микрофотографий образцов, функция распределения критических токов и магнитополевая зависимость фрактальной размерности границ кластеров нормальной фазы найдены на основе модели ВАХ тонких пленок с искусственными центрами пиннинга [9]. Поскольку магнитное поле способствует появлению сильной токовой анизотропии [13], то двумерную модель можно применять и к массивному ВТСП.

Кроме фрактальной размерности D , которая является “внешней” характеристикой структуры, применяется понятие индекса связности θ – топологического инварианта объекта. В качестве “смешанной” характеристики выступает спектральная фрактальная размерность D_s , связанная с D и θ формулой:

$$D_s = 2 \cdot D / (2 + \theta). \quad (1.1)$$

Из теоремы об универсальном значении [2] следует, что спектральная размерность стягиваемого фрактального множества на пороге перколяции равна $C \approx 1,327\dots$ для размерностей пространства $2 \leq n \leq 5$, т. е. $D_s = C \approx 1,327$. Параметр C (постоянная протекания) является фундаментальной топологической константой, характеризующей геометрию перколяционного перехода. При рассмотрении перколяции как критического явления из формулы (1.1) можно определить индекс связности фрактала по его фрактальной размерности на пороге перколяции.

2. Теоретическая модель сопротивления сверхпроводника с фрактальными границами кластеров нормально фазы

Как установлено в работе [8], кластеры нормальной фазы могут иметь фрактальные границы, что существенно влияет на динамику захваченного магнитного потока [7, 9]. При увеличении транспортного тока через образец в некоторый момент начинается срыв вихрей с кластеров, сила пиннинга которых меньше силы Лоренца, создаваемой током. Вихри пересекают сверхпроводящее пространство по слабым связям, соединяющим кластеры и играющим роль каналов транспорта магнитного потока. Движение вихрей приводит к появлению электрического напряжения и образец переходит в резистивное состояние. Критический ток каждого кластера пропорционален силе пиннинга. Наиболее общим распределением критических токов для кластеров с фрактальными границами является гамма-распределение [14–15]:

$$f(i) = \frac{2G^{g+1}}{\Gamma(g+1)} \cdot i^{-\frac{2}{D}(g+1)-1} \cdot \exp(-Gi^{-\frac{2}{D}}), \quad (2.1)$$

где

$$G \equiv \frac{\theta^{\frac{2}{D}(g+1)+1}}{[\theta^{g+1} - \frac{D}{2} \cdot \exp(\theta)\Gamma(g+1, \theta)]^{\frac{2}{D}}}, \quad \theta \equiv \frac{D}{2} + g + 1 \quad (2.2)$$

$\Gamma(\nu)$ – гамма-функция Эйлера; $g > -1$ – параметр гамма-распределения, определяющий среднеквадратичное отклонение площади кластера; $\Gamma(\nu, z)$ – дополнительная неполная гамма-функция; $i \equiv I/I_c$ – безразмерный ток, нормированный на критический ток перехода в резистивное состояние $I_c = a(CS)^{-D/2}$; I – транспортный ток; $C = ((2+D)/2)(2/D) + 1$ – константа, зависящая от фрактальной размерности, S – средняя площадь кластера; a – фактор формы кластера.

Для YBCO было получено экспоненциально-гиперболическое распределение [8–9]:

$$f(i) = (2 \cdot C/D)i^{(-2/D)-1} \exp(-C \cdot i^{-2/D}). \quad (2.3)$$

Фрактальная размерность определяет соотношение между периметром и площадью кластера:

$$P^{1/D} \propto S^{1/2}. \quad (2.4)$$

На плоскости фрактальная размерность границы кластера строго больше единицы и достигает максимума ($D = 2$) для кластеров максимальной степени фрактальности (изрезанности границ).

Напряжение на сверхпроводнике определяется выражением:

$$u = r_f \int_0^i (i - i') f(i') di', \quad (2.5)$$

где u – безразмерное напряжение; r_f – безразмерное сопротивление течения потока.

Используя интеграл свёртки (2.5), можно получить вольт-амперные характеристики и зависимости сопротивления от тока различных сверхпроводящих фрактальных

структур. Стандартными параметрами при этом являются сопротивление постоянно-му току $r = u/i$ (статическое) и дифференциальное сопротивление $r_d = du/di$ (динамическое). Соответствующие размерные сопротивления вычисляются по формулам: $R = rR_f/r_f$, $R_d = r_dR_f/r_f$, где R_f – размерное сопротивление течения потока.

Экспоненциально-гиперболическое распределение критических токов (2.3) приводит к выражениям для сопротивлений сверхпроводника с фрактальными границами кластеров нормальной фазы:

$$r = r_f(\exp(-Ci^{-2/D}) - (C^{D/2}/i)(1 - D/2, Ci^{-2/D})), r_d = r_f \exp(-Ci^{-2/D}). \quad (2.6)$$

3. Эксперимент и обсуждение

Поликристаллы YBCO с температурой перехода в сверхпроводящее состояние $T_c \approx 92,0$ К и шириной перехода $\Delta T_c \approx 1,5$ К исследовались четырёхзондовым методом. Через токовые контакты пропускались переменный и постоянный токи. Измерялся начальный участок ВАХ в постоянном магнитном поле при температуре $T \approx 77$ К. Подробнее техника эксперимента изложена в [16].

Зависимость первой гармоники напряжения от постоянного тока $V_1(I_d)$ пропорциональна (в случае слабого тока) дифференциальному сопротивлению. Экспериментальные $V_1(i)$, снятые на одном из трёх исследованных образцов для разных магнитных полей (рис. 3.4), аппроксимировались с помощью функции (2.6):

$$V_1 = R_d \cdot I_a = I_a \cdot [R_{d1} \cdot \exp(-C_1 \cdot C_0 \cdot i^{-\mu}) + R_{d2} \cdot \exp(-C_2 \cdot C_0 \cdot i^{-\mu})], \quad (3.1)$$

где V_1 – первая гармоника напряжения; $i = I_d/I_c$ – безразмерный ток; $I_c = 316$ мА – критический ток при $H = 0$; $R_d = (dV/dI_d)$ – дифференциальное сопротивление; $I_a = 27$ мА – амплитуда переменного тока; $C_0 = (1 + 1/\mu)^{\mu+1}$; $\mu = 2/D$ – показатель стекловидности [17]; $C_1 = 0,02$; $C_2 = 0,14$; $R_{d1} = 0,03$ мΩ; $R_{d2} = 0,78$ мΩ.

Введение двух слагаемых в формуле (3.1) обусловлено существованием в поликристаллических YBCO с естественными центрами пиннинга двух функций распределения слабых связей по площадям, что объясняется наличием в них двух основных подуровней: гранулярная и межгранулярная среды.

Формула (3.1), справедливая в случае малых амплитуд модуляции I_a , должна быть дополнена производными более высоких порядков при увеличении I_a . Общее выражение получено в работе [18]. При учёте производных третьего и пятого порядков приходим к дифференциальному уравнению:

$$V_1 \approx I_a \cdot (dV/dI_d) + (1/8) \cdot (I_a)^3 \cdot (d^3V/d(I_d)^3) + (1/192) \cdot (I_a)^5 \cdot (d^5V/d(I_d)^5). \quad (3.2)$$

Данное уравнение справедливо при условии, что отношение амплитуд 5-й и 1-й гармоник порядка 10 %. Учёт 2-го и 3-го слагаемых может помочь в более точной аппроксимации экспериментальной гармоники. Кроме того, решая дифференциальное уравнение (3.2), можно найти саму функцию $V(I_d)$. Решение уравнения находится численно с начальными условиями, определяемыми экспериментом или теоретически.

Геометрико-вероятностный анализ распределения кластеров дефектов межгранулярной среды по площадям был сделан для трёх выборок, полученных по микрофотографии поверхности поликристалла YBCO с последующей компьютерной обработкой. Фотография одной из выборок (425 элементов) представлена на Рис. 3.1.



Рис. 3.1. Микрофотография одной из выборок (425 элементов) поверхности образца YBCO (сторона квадрата — $500 \mu\text{m}$).

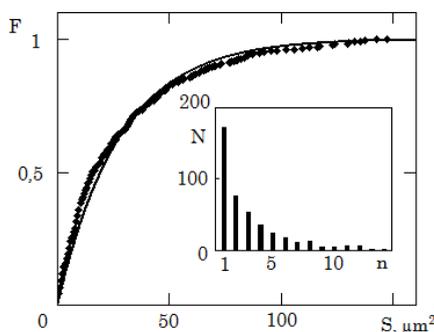


Рис. 3.2. Эмпирическая зависимость распределения площадей кластеров нормальной фазы (ромбики) и её аппроксимация функцией $F(S) = 1 - \exp(-S/S_0)$ (сплошная линия). На вставке показана гистограмма выборки площадей S , где n – номер группы разбиений; N – количество кластеров, попавших в данную группу. Гистограмма соответствует экспоненциально-гиперболическому распределению (формула (2.3))

Выборочное среднее равно $28,03 \mu\text{m}^2$, стандартное отклонение составляет $30,39 \mu\text{m}^2$, асимметрия – 1,69. На Рис. 3.2 представлена аппроксимация эмпирической функции распределения стандартной экспоненциальной зависимостью. При этом среднее значение площади кластера нормальной фазы $S_0 = 27,78 \mu\text{m}^2$ отличается от выборочного среднего менее чем на 3 %, что подтверждает целесообразность применения экспоненциального распределения. На вставке показана гистограмма выборки площадей кластеров по 14 группам.

Распределение гранул по площадям сечений также должно быть экспоненциальным

в силу одинаковости условий формирования гранул и межгранулярной среды. Экспоненциальный закон распределения можно применить в данном случае и к длинам границ двойникования, являющихся основной причиной пиннинга вихрей при $H > 20$ Oe (площадь кластера, захватившего магнитный поток, составляет $1\mu m^2$ для $H = 20$ Oe). Различия связаны с коэффициентом в показателе экспоненты, что можно пояснить на примере простейшей ситуации, когда сечением гранулы является квадрат. Тогда число двойников определённой длины для квадрата площадью S будет $nS^{1/2}$, где n – плотность двойников, приблизительно одинаковая в каждой грануле; т. е. плотность распределения $\lambda S^{1/2} \exp(-\lambda S)$. В рассматриваемом случае влияние экспоненты значительно больше, чем корневой зависимости, поэтому сохраняется возможность описания распределения экспонентой $\lambda \exp(-\lambda S)$ с другой постоянной λ .

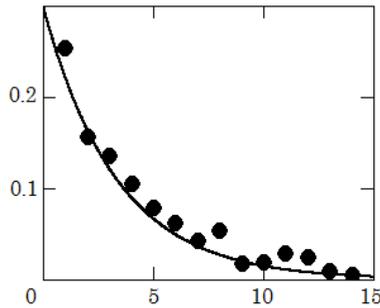


Рис. 3.3. Эмпирическая плотность распределения (сплошная кривая). Чёрные точки соответствуют вставке на Рис. 3.2

Для иллюстрации на Рис. 3.3 приводится эмпирическая плотность распределения с умножением значения ординаты для каждой группы на квадратный корень из номера группы ($f(n) = 0.3 \cdot \exp(-0.3n)$). Здесь плотность функции распределения нормирована на сумму значений всех групп.

Как известно, фрактальные кластеры должны характеризоваться скейлингом между периметром P кластера и его площадью S .

Такой скейлинг действительно наблюдался для исследованной выборки кластеров (Рис.3.4, $D = 1, 16$).

Полагая, что экспоненциальное распределение свойственно обеим средам, различия в коэффициентах можно связать со значительно большей плотностью внутригранулярной среды по сравнению с межгранулярной и, вследствие этого, большим сопротивлением движению вихрей по каналам дефектной структуры [19].

На вставке Рис. 3.5 показана зависимость $D(H)$. Видно, что при $H \approx 70$ Oe происходит резкое изменение $D(H)$, что соответствует началу проникновения вихрей в гранулы поликристалла. Фрактальная размерность D меняется от 1.2 до 1,9, что соответствует изменению Θ от -0.2 до 1.43. При $D = C \approx 1.327$ происходит изменение знака индекса связности с минуса на плюс, что означает переход от несвязной системы к связанной, т. е. начало перколяции. Если при малых полях вихри «не замечают» дефектной структуры внутри гранул, то при достижении поля 70 Oe пиннинг вихрей на внутригранулярных неоднородностях становится преобладающим, т. е. связность дефектной структуры для движения вихрей становится непрерывной. При этом её фрактальная размерность внутри и между гранул одинакова. Показатель стекловидности μ в данном случае меняется от 2 до 1, что можно интерпретировать как состояние вихревого

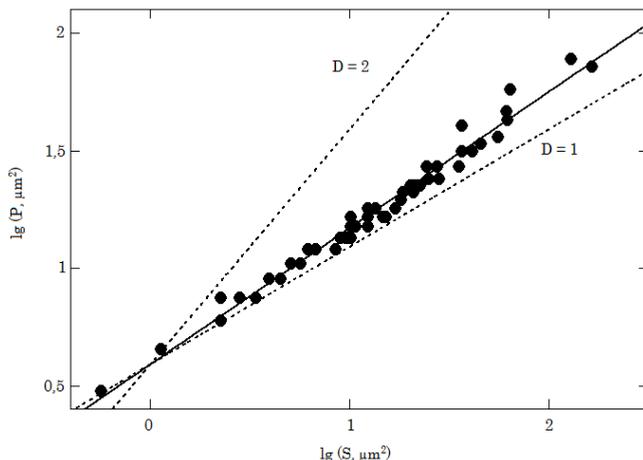


Рис. 3.4. Обработка данных (формула (2.4)) по площади S и периметру P кластера для 53 объектов. Эмпирические данные (точки) аппроксимированы с помощью формулы $P = kS^{D/2}$, где k – коэффициент, D – фрактальная размерность границы кластера. Для сплошной прямой получено: $k = 0,59$, $D = 1,16$

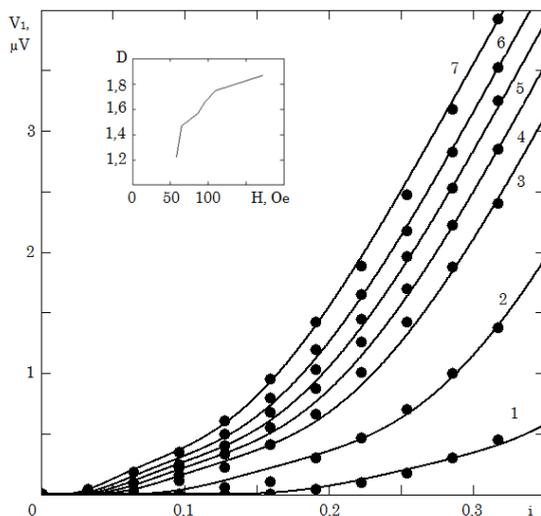


Рис. 3.5. Токвая зависимость первой гармоники напряжения в постоянном магнитном поле H : 1 – $H = 47,4$ Oe; 2 – $H = 58,1$ Oe; 3 – $H = 64,3$ Oe; 4 – $H = 86,1$ Oe; 5 – $H = 95,8$ Oe; 6 – $H = 109,8$ Oe; 7 – $H = 172,2$ Oe. Точки означают экспериментальные данные, сплошные линии – расчет по формуле (3.1). На вставке показана магнитополевая зависимость фрактальной размерности каналов движения вихрей.

стекла, при котором реализуется пиннинг связок вихрей [17], [20–21].

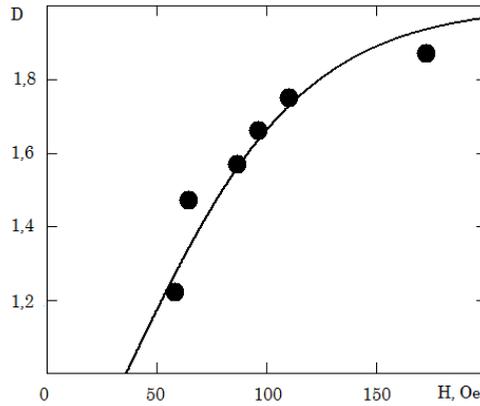


Рис. 3.6. Зависимость фрактальной размерности кластеров нормальной фазы от напряжённости постоянного магнитного поля. Чёрные круги – эксперимент, сплошная линия – эмпирическая зависимость (формула (3.3))

Функцию (3.1) с $R_{d1} = 0.012m\Omega$ можно использовать и для описания экспериментальных зависимостей амплитуды первой гармоники напряжения на образце YBCO от напряжённости магнитного поля для разных значений постоянного тока. Зависимость $V_1(H)$ обуславливается зависимостью от магнитного поля фрактальной размерности D , которую можно аппроксимировать эмпирической функцией:

$$D = 2/[exp(-(H - H_1)/H_0) + 1] \quad (3.3)$$

где $H_0 = 40$ Oe и $H_1 = 36$ Oe – напряжённости поля, характерные для данного образца (Рис.3.6).

На Рис.3.7 изображены экспериментальная и теоретическая зависимости $V_1(H)$ для разных значений I_d . Величина $R_{d1} = 0.012m\Omega$ в данной аппроксимации уменьшена, что связано с отсутствием сопротивления при значениях напряжённости поля до 50 Oe. Нулевое сопротивление в начале зависимости $V_1(H)$ в значительной степени обусловлено образованием гипервихрей в образце [22]. Поэтому начало роста напряжения определяется двумя процессами: распадом гипервихрей на отдельные джозефсоновские вихри и увеличением фрактальной размерности кластеров нормальной фазы с ростом поля. Альтернативным объяснением может быть отсутствие течения магнитного потока при токах, меньших критического, и коллективного крипа потока, в котором, в отличие от крипа Андерсона-Кима, потенциальный барьер пиннинга вихрей U связан с силой тока I гиперболической, а не линейной зависимостью ($U(I) \propto (I_c/I)^\mu$) [23]. Модели течения и коллективного крипа потока приводят к качественно одинаковым результатам при рассмотрении начального участка ВАХ сверхпроводников с фрактальными границами кластеров нормальной фазы. Рост фрактальной размерности увеличивает в этой области тока статическое и дифференциальное сопротивление образцов ВТСП, что и наблюдается в эксперименте.

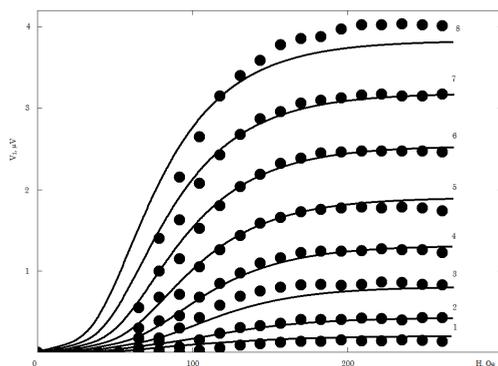


Рис. 3.7. Магнитопольевая зависимость амплитуды первой гармоники напряжения при разных значениях постоянного тока. Чёрные круги – экспериментальные зависимости, сплошные линии – теоретические кривые, рассчитанные по формуле (3.1); 1 – $I_d = 30 \text{ mA}$, 2 – $I_d = 40 \text{ mA}$, 3 – $I_d = 50 \text{ mA}$, 4 – $I_d = 60 \text{ mA}$, 5 – $I_d = 70 \text{ mA}$, 6 – $I_d = 80 \text{ mA}$, 7 – $I_d = 90 \text{ mA}$, 8 – $I_d = 100 \text{ mA}$.

4. Заключение

Таким образом, в работе показано, что резистивные характеристики высокотемпературного сверхпроводника YBCO могут быть адекватно описаны в модели фрактальных границ кластеров нормальной фазы. В рамках данной модели определена магнитопольевая зависимость фрактальной размерности границ кластеров. Из вида полученной зависимости найдено значение напряжённости магнитного поля, при котором начинается проникновение вихрей в гранулы образца. По изменению знака индекса связности определена фрактальная размерность, при которой система перколяции вихрей становится связной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.
2. Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, “Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики”, *Успехи физических наук*, **174**:8 (2004), 809–852.
3. M. Prester, “Experimental evidence of a fractal dissipative regime in *high* – T_c superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **60**:5 (1999), 3100–3103.
4. В. С. Флис, А. А. Каленюк, А. Л. Касаткин, В. О. Москалюк, А. И. Ребиков, В. Л. Свечников, К. Г. Третьяченко, В. М. Пан, “Пленки ВТСП купратов, допированные наночастицами, и их электродинамика, обусловленная вихрями Абрикосова”, *ФНТ*, **36**:1 (2010), 74–88.

5. Ю. Н. Ноздрин, Е. Е. Пестов, В. В. Курин, С. В. Барышев, А. В. Бобыль, С. Ф. Карманенко, Д. А. Саксеев, Р. А. Сурис, “Влияние микроструктуры эпитаксиальных пленок $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ на их электрофизические и нелинейные СВЧ свойства”, *ФТТ*, **48**:12 (2006), 2136–2145.
6. Т. В. Сухарева, В. А. Финкель, “Вклад сверхпроводящих гранул и межгранульных границ в магнитосопротивление керамических ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ в слабых магнитных полях”, *ФТТ*, **52**:8 (2010), 1479–1485.
7. Ю. И. Кузьмин, “Резистивное состояние сверхпроводящих структур с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *ФТТ*, **43**:7 (2001), 1157–1164.
8. Yu. I. Kuzmin, “Fractal geometry of normal phase clusters and magnetic flux trapping in $high - T_c$ superconductors”, *Phys. Lett. A.*, **267**:1 (2000), 66–70.
9. Yu. I. Kuzmin, “Dynamics of the magnetic flux trapped in fractal clusters of normal phase in a superconductor”, *Phys. Rev. B.*, **64**:9 (2001), 1–13.
10. M. Ziese, “Percolative vortex motion in high-temperature superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **53**:18 (1996), 12422–12429.
11. J. E. Sonier, R. F. Kiefl, J. H. Brewer, D. A. Bonn, S. R. Dunsiger, W. N. Hardy, R. Liang, R. I. Miller, D. R. Noakes, C. E. Stronach, “Expansion of the vortex cores in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ at low magnetic fields”, *Phys. Rev. B.*, **59**:2 (1999), R729–R732.
12. C. J. Olson, C. Reichhardt, F. Nori, “Fractal networks, braiding channels, and voltage noise in intermittently flowing rivers of quantized magnetic flux”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:10 (1998), 2197–2200.
13. Д. А. Балаев, И. Л. Белозерова, Д. М. Гохфельд, Л. В. Кашкина, Ю. И. Кузьмин, К. Р. Мигель, М. И. Петров, С. И. Попков, К. А. Шуйхутдинов, “Вольтамперные характеристики пенообразного высокотемпературного сверхпроводника $Bi_{1.8}Pb_{0.3}Sr_2Ca_2Cu_3O_x$ с фрактальной кластерной структурой”, *ФТТ*, **48**:2 (2006), 193–198.
14. Yu. I. Kuzmin, “Electric field induced by magnetic flux motion in superconductor containing fractal clusters of a normal phase”, *Phys. Lett. A.*, **281**:1 (2001), 39–43.
15. Ю. И. Кузьмин, “Гигантская дисперсия критических токов в сверхпроводнике с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *Письма в ЖТФ*, **28**:13 (2002), 74–82.
16. М. А. Васютин, Н. Д. Кузьмичев, “Нелинейность ВАХ ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, определенная с помощью модуляционной методики”, *Письма в ЖТФ*, **18**:23 (1992), 5–9.
17. Ю. И. Кузьмин, “Состояние вихревого стекла в сверхпроводниках с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *Письма в ЖТФ*, **36**:9 (2010), 17–25.
18. Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, “Дифференциальные уравнения для восстановления производной безгистерезисной нелинейной вольт-амперной характеристики полупроводниковой структуры”, *ФТП*, **53**:1 (2019), 111–114.
19. С. В. Мериакри, “Динамические фазовые переходы в движущихся вихревых структурах в сверхпроводниках 2-го рода”, *ЖТФ*, **75**:5 (2005), 87–91.

20. R. H. Koch, V. Foglietti, W. J. Gallagher, G. Koren, A. Gupta, M. P. A. Fisher, “Experimental evidence for vortex-glass superconductivity in Y-Ba-Cu-O”, *Phys. Rev. Lett.*, **63**:14 (1989), 1511–1514.
21. P. L. Gammel, L. F. Schneemeyer, D. J. Bishop, “SQUID picovoltometry of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ single crystals: Evidence for a finite-temperature phase transition in the high-field vortex state”, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:7 (1991), 953–956.
22. Н. Д. Кузьмичев, “Проникновение магнитного поля в систему слабых связей гранулярного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ”, *ФТТ*, **43**:11 (2001), 1934–1938.
23. Ю. И. Кузьмин, И. В. Плешаков, “Электрическое поле, индуцируемое коллективным крипом вихрей, в сверхпроводниках с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *Письма в ЖТФ*, **42**:3 (2016), 76–83.

Поступила 8.09.2019

MSC2010 97-04, 90C99, 82D55

Mathematical modeling of current-voltage characteristics of high-temperature superconductors with fractal boundaries of normal phase clusters

© М. А. Vasyutin¹, N. D. Kuzmichev², D. A. Shilkin³

Abstract. The fractality effect of the normal phase clusters' boundaries of a high-temperature superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO) on the magnetic flux creep is investigated. Experimental current-voltage and magnetoresistive characteristics of YBCO at the boiling point of nitrogen are obtained. Based on the model of intergranular clusters with fractal boundaries, an approximation of the experimental data is obtained after geometric-probability analysis of the photomicrographs of the samples. A model of the magnetoresistive state caused by flux creep is proposed for various transport currents, and experimental and empirical dependences of the fractal dimension of the normal YBCO phase cluster boundaries on the constant magnetic field are found. The magnetic field intensity is determined for a given fractal dimension, at which the vortex penetration into the granules begins. It is shown that the state of the samples corresponds to the metastable phase of the vortex glass. The connectivity index of the stall paths of the vortex bundles at the percolation threshold is calculated.

Key Words: high-temperature superconductor, clusters of the normal phase, fractal boundaries, flux creep

¹Mikhael A. Vasyutin, Associate Professor of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

²Nikolay D. Kuzmichev, Professor of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

³Dmitri A. Shilkin, Engineer of the Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9061-3174>, dwi8hi@outlook.com

REFERENCES

1. B. Mandelbrot, *Fractal geometry of nature.*, Times Books, NY, 1982.
2. L. M. Zelenyi, A. V. Milovanov, “Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems of cosmic electrodynamics”, *Uspekhi fizicheskikh nauk*, **174**:8 (2004), 809–852 (In Russ.).
3. M. Prester, “Experimental evidence of a fractal dissipative regime in $high - T_c$ superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **60**:5 (1999), 3100–3103.
4. V. S. Flis, A. A. Kalenyuk, A. L. Kasatkin, V. O. Moskalyuk, A. I. Rebikov, V. L. Svechnikov, K. G. Tretyachenko, V. M. Pan, “HTS cuprate films doped with nanoparticles and their electrodynamics caused by Abrikosov vortices”, *Fizika nizkikh temperatur*, **36**:1 (2010), 74–88 (In Russ.).
5. Yu. N. Nozdrin, E. E. Pestov, V. V. Kurin, S. V. Baryshev, A. V. Bobyl, S. F. Karmanenko, D. A. Sakseev, R. A. Suris, “The influence of the microstructure of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ epitaxial films on their electrophysical and non-linear microwave properties”, *Solid State Physics*, **48**:12 (2006), 2136–2145 (In Russ.).
6. T. V. Suhareva, V. A. Finkel, “Contribution of superconducting granules and intergranular boundaries to the magnetoresistance of ceramic HTSC $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ in weak magnetic fields”, *Solid State Physics*, **52**:8 (2010), 1479–1485 (In Russ.).
7. Yu. I. Kuzmin, “Resistive state of superconducting structures with fractal clusters of the normal phase”, *Solid State Physics*, **43**:7 (2001), 1157–1164 (In Russ.).
8. Yu. I. Kuzmin, “Fractal geometry of normal phase clusters and magnetic flux trapping in $high - T_c$ superconductors”, *Phys. Lett. A.*, **267**:1 (2000), 66–70.
9. Yu. I. Kuzmin, “Dynamics of the magnetic flux trapped in fractal clusters of normal phase in a superconductor”, *Phys. Rev. B.*, **64**:9 (2001), 1–13.
10. M. Ziese, “Percolative vortex motion in high-temperature superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **53**:18 (1996), 12422–12429.
11. J. E. Sonier, R. F. Kiefl, J. H. Brewer, D. A. Bonn, S. R. Dunsiger, W. N. Hardy, R. Liang, R. I. Miller, D. R. Noakes, C. E. Stronach, “Expansion of the vortex cores in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ at low magnetic fields”, *Phys. Rev. B.*, **59**:2 (1999), R729 – R732.
12. C. J. Olson, C. Reichhardt, F. Nori, “Fractal networks, braiding channels, and voltage noise in intermittently flowing rivers of quantized magnetic flux”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:10 (1998), 2197–2200.
13. D. A. Balaev, I. L. Belozerova, D. M. Gohfeld, L. V. Kashkina, Yu. I. Kuzmin, K. R. Migel, M. I. Petrov, S. I. Popkov, K. A. Shuihutdinov, “Current-voltage characteristics of a high-temperature foam superconductor $Bi_{1.8}Pb_{0.3}Sr_2Ca_2Cu_3O_x$ with a fractal cluster structure”, *Solid State Physics*, **48**:2 (2006), 193–198 (In Russ.).
14. Yu. I. Kuzmin, “Electric field induced by magnetic flux motion in superconductor containing fractal clusters of a normal phase”, *Phys. Lett. A.*, **281**:1 (2001), 39–43.

15. Yu. I. Kuzmin, “Giant dispersion of critical currents in a superconductor with fractal clusters of the normal phase”, *Technical Physics Letters*, **28**:13 (2002), 74–82 (In Russ.).
16. M. A. Vasyutin, N. D. Kuzmichev, “Nonlinearity of the current-voltage characteristics of HTSC $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, determined by modulation technique”, *Technical physics letters*, **18**:23 (1992), 5–9 (In Russ.).
17. Yu. I. Kuzmin, “The state of vortex glass in superconductors with fractal clusters of the normal phase”, *Technical Physics Letters*, **36**:9 (2010), 17–25 (In Russ.).
18. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, “Differential equations for reconstructing the derivative of a hysteresis-free nonlinear current-voltage characteristic of a semiconductor structure”, *Semiconductors*, **53**:1 (2019), 111–114 (In Russ.).
19. S. V. Meriakri, “Dynamic phase transitions in moving vortex structures in type-2 superconductors”, *Technical Physics*, **75**:5 (2005), 87–91 (In Russ.).
20. R. H. Koch, V. Foglietti, W. J. Gallagher, G. Koren, A. Gupta, M. P. A. Fisher, “Experimental evidence for vortex-glass superconductivity in Y-Ba-Cu-O”, *Phys. Rev. Lett.*, **63**:14 (1989), 1511–1514.
21. P. L. Gammel, L. F. Schneemeyer, D. J. Bishop, “SQUID picovoltometry of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ single crystals: Evidence for a finite-temperature phase transition in the high-field vortex state”, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:7 (1991), 953–956.
22. N. D. Kuzmichev, “Penetration of a magnetic field into the system of weak bonds of a granular superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ”, *Solid State Physics*, **43**:11 (2001), 1934–1938 (In Russ.).
23. Yu. I. Kuzmin, I. V. Pleshakov, “Electric field induced by collective creep of vortices in superconductors with fractal clusters of the normal phase”, *Technical Physics Letters*, **42**:3 (2016), 76–83 (In Russ.).

Submitted 8.09.2019