DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.480-487

УДК 517.9

О периодических точках эндоморфизмов тора

© **Е. Д. Куренков** [1], **Д. И. Минц** [2]

Аннотация. Известно, что аносовские эндоморфизмы n-мерного тора, отличные от автоморфизмов и растягивающих эндоморфизмов, не являются структурно устойчивыми и в общем случае не сопряжены с алгебраическими эндоморфизмами. Тем не менее гиперболические алгебраические эндоморфизмы тора сопряжены со своими C^1-возмущениями на множестве периодических точек. Поэтому изучение алгебраических эндоморфизмов тора представляет особый интерес. Настоящая работа посвящена изучению структуры множества периодических и предпериодических точек алгебраических эндоморфизмов тора. Изучаются различные групповые свойства указанного множества точек. Доказана плотность периодических и предпериодических точек для алгебраических эндоморфизмов n-мерного тора. Исследована зависимость между числом периодических и предпериодических точек с фиксированным знаменателем и свойствами характеристического многочлена. Основным результатом работы является теорема 1.1. В ней приводится алгоритм, который позволяет различать множества периодических и предпериодических точек заданного алгебраического эндоморфизма двумерного тора.

Ключевые слова: аносовский эндоморфизм, алгебраический эндоморфизм тора, периодические точки, полусопряженность

1. Введение

Хорошо известно, что произвольный диффеоморфизм Аносова, заданный на n-мерном торе, является структурно устойчивым и сопряжен с алгебраическим гиперболическим автоморфизмом [1–3]. Что же касается аносовских эндоморфизмов, не являющихся диффеоморфизмами и растягивающими эндоморфизмами, то такой результат, не имеет места, что следует из работ [4–5]. Более того, в работе [6] было показано, что во множестве эндоморфизмов Аносова на n-мерном торе множество эндоморфизмов, не сопряженных с алгебраическим, образует массивное множество. Из работы Ф. Пшетыцкого [4] следует, что гиперболические алгебраические эндоморфизмы тора сопряжены со своими C^1- возмущениями на множестве периодических точек. Именно поэтому изучение алгебраических эндоморфизмов тора представляет особый интерес.

В настоящей работе исследуются свойства алгебраических эндоморфизмов n-мерного тора $\mathbb{T}^n$. Мы будем представлять n-мерный тор как фактор-пространство $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Тогда алгебраический эндоморфизм $f_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ задается $(n \times n)$-матрицей A с целочисленными коэффициентами. Если $|detA| = 1$, то эндоморфизм $f_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, индуцированный матрицей A, является автоморфизмом. Если собственные значения матрицы A отличны от 0 и 1, то алгебраический эндоморфизм называется гиперболическим.

[1] **Куренков Евгений Дмитриевич**, стажер-исследователь, лаборатория Топологических методов в динамике, Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3544-1143, ekurenkov@hse.ru

[2] **Минц Дмитрий Ильич**, стажёр-исследователь, лаборатория топологических методов в динамике НИУ ВШЭ НН (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0329-6946, dmincz@hse.ru

Известно, что в случае произвольного алгебраического эндоморфизма множество периодических и предпериодических точек может включать в себя как точки с рациональными, так и точки с иррациональными координатами. Но в случае гиперболического алгебраического эндоморфизма периодическими и предпериодическими точками являются все точки с рациональными координатами и только они. Встаёт вопрос о классификации точек с рациональными координатами на периодические и предпериодические для конкретно заданного алгебраического эндоморфизма. Легко видеть, что для алгебраического автоморфизма тора (см., например, [7]) любая точка с рациональными координатами является периодической. В данной работе для двумерного тора приведен алгоритм, позволяющий различать периодические и предпериодические точки заданного алгебраического эндоморфизма.

Пусть P_q — множество рациональных точек на n-мерном торе вида $(s_1/q, ..., s_n/q)$, где $0 \leqslant s_i < q, i = \overline{1,n}$. Легко видеть, что объединение $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}} P_q$ совпадает с множеством всех периодических точек на торе, имеющих рациональные координаты. Для произвольного алгебраического эндоморфизма $f_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ данное множество является инвариантным, т. е. $f_A(P_q) \subset P_q$. Тогда корректно определено ограничение $f_A|_{P_q}$. Рассмотрим кольцо вычетов $\mathbb{Z}_q$ по модулю q. Пусть A_q — матрица с коэффициентами a'_{ij} в $\mathbb{Z}_q$ такая, что $a'_{ij} = a_{ij} \mod q$. Матрица A_q естественным образом индуцирует эндоморфизм[3] абелевой группы $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_q$, причем справедлива следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_q & \xrightarrow{f_A|_{P_q}} & P_q \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\varphi \\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_q & \xrightarrow[A_q]{} & \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_q \end{array},$$

где $\varphi(s_1/q, ..., s_n/q) = (s_1, ..., s_n)$.

Теорема 1.1 *Пусть даны произвольный алгебраический эндоморфизм* $f_A\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *и ненулевая рациональная точка* M *с координатами* $(s_1/q, s_2/q)$, *где числа* s_1, s_2, q *взаимно просты в совокупности. Пусть* $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ *— разложение на простые сомножители числа* q. *Точка* M *является периодической точкой эндоморфизма* f_A *тогда и только тогда, когда для любого* $i = \overline{1,t}$ *точка* $(s_1, s_2) \mod p_i^{\alpha_i}$ *является периодической точкой эндоморфизма* $A_{p_i^{\alpha_i}}$.

При этом точка $(s_1, s_2) \mod p_i^{\alpha_i}$ *является периодической для эндоморфизма* $A_{p_i^{\alpha_i}}$ *тогда и только тогда, когда характеристический многочлен оператора* A_p *либо не имеет нулевых корней, либо имеет ровно один нулевой корень, и существует* $\lambda \in \mathbb{Z}_{p^k}$, *обратимое в кольце* $\mathbb{Z}_{p^k}$, *такое, что* $A_{p^k}x = \lambda x$.

2. Доказательство основных результатов

Рассмотрим введённый в разделе 1 эндоморфизм $A_q\colon \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_q \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_q$. Из его определения непосредственно вытекает, что для любого w, являющегося делителем q, эн-

[3]Здесь и далее мы для удобства обозначений не делаем различий между матрицей A_q и индуцированным ею эндоморфизмом группы $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_q$.

доморфизм A_q полусопряжен с эндоморфизмом $A_w\colon \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_w \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_w$, т. е. справедлива следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q \arrow[r, "A_q"] \arrow[d, "\varphi_w"'] & \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q \arrow[d, "\varphi_w"] \\
\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_w \arrow[r, "A_w"'] & \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_w
\end{tikzcd},$$

где $\varphi_w(s_1,...,s_n)=(s_1,...,s_n) \mod w$.

Л е м м а 2.1 *Пусть $q=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$ — разложение на простые сомножители числа q. Тогда точка $(s_1,...,s_n)\in\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$ является периодической точкой эндоморфизма A_q тогда и только тогда, когда для любого $i=\overline{1,t}$ точка $\varphi_{p_i^{\alpha_i}}(s_1,...,s_n)$ является периодической точкой эндоморфизма $A_{p_i^{\alpha_i}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Результат немедленно следует из китайской теоремы об остатках, утверждающей, что гомоморфизм $\psi\colon \mathbb{Z}_{n_1n_2\dots n_k}\to\mathbb{Z}_{n_1}\oplus\mathbb{Z}_{n_2}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{n_k}$, $\psi(x)=(x \mod n_1, x \mod n_2,\dots,x \mod n_k)$ является изоморфизмом при попарно взаимно простых $n_1,n_2,\dots,n_k$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

З а м е ч а н и е 2.1 *Пусть точка $(s_1,...,s_n)\in\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$ — периодическая точка эндоморфизма A_q, a_i — период точки $\varphi_{p_i^{\alpha_i}}(s_1,...,s_n)$, где $i=\overline{1,t}$. Тогда период точки $(s_1,...,s_n)$ равен $[a_1,a_2,...,a_t]$*[4].

Л е м м а 2.2 *Пусть A — целочисленная матрица и $u_1,u_2,...,u_n$ — ее элементарные делители*[5]*, тогда система сравнений $Ax\equiv 0 \pmod q$ имеет ровно $\prod\limits_{i=1}^{n}(u_i,q)$ различных по модулю q решений*[6].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U — целочисленная унимодулярная матрица. Легко видеть, что x является решением системы сравнений $Ax\equiv 0 \pmod q$ тогда и только тогда, когда x является решением системы сравнений $UAx\equiv 0 \pmod q$.

Известно [8], что для любой целочисленной матрицы A существуют такие унимодулярные матрицы U и V, что матрица $A'=UAV$ имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & u_n\end{pmatrix}$, где $u_1,...,u_n$ — элементарные делители матрицы A. Тогда любое решение исходной системы сравнений имеет вид Vy, где y — решение системы сравнений $A'y\equiv 0 \pmod q$.

[4] $[m,n]$ обозначает наименьшее общее кратное чисел m и n.
[5] Напомним, что u_i может быть вычислено, как отношение наибольшего общего делителя миноров матрицы A порядка i к наибольшему общему делителю миноров матрицы A порядка $i-1$.
[6] (m,n) обозначает наибольший общий делитель чисел m и n.

Легко видеть, что система сравнений $A'y \equiv 0 \pmod q$ имеет ровно $\prod\limits_{i=1}^{n}(u_i,q)$ различных решений по модулю q. Однако в силу унимодулярности матрицы V исходная система сравнений также имеет ровно $\prod\limits_{i=1}^{n}(u_i,q)$ различных решений по модулю q.
Доказательство завершено.

Следствие 2.1 *Справедливо равенство* $|\ker A_q| = \prod\limits_{i=1}^{n}(u_i,q)$, *где* $u_1,...,u_n$ *— элементарные делители матрицы* A.

Лемма 2.3 *Эндоморфизм* A_q *является автоморфизмом тогда и только тогда, когда* $(det(A),q)=1$.

Доказательство. Если $(det(A),q)=1$, то существуют такие числа w и v, что $v\cdot det(A)+wq=1$. Перепишем равенство в виде $v\cdot det(A)=1-wq$. Отсюда получим, что $v\cdot det(A)\equiv 1 \pmod q$. Значит, $\det(A)$ есть обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}_q$, следовательно, существует A_q^{-1}.

Обратно, если $(det(A),q)\neq 1$, то в силу того, что $det(A)=\prod\limits_{i=1}^{n}u_i$, где $u_1...,u_n$ — элементарные делители матрицы A, хотя бы для одного i верно неравенсто $(u_i,q)>1$. Однако тогда $|\ker A_q|>1$, и эндоморфизм A_q необратим.
Доказательство завершено.

Следствие 2.2 *Если* $(det(A),q)=1$, *то любая точка* $(s_1,...,s_n)\in\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$ *является периодической точкой отображения* A_q.

Следствие 2.3 *Если* $detA\neq 0$, *то множество периодических точек отображения, индуцированного матрицей* A, *всюду плотно.*

Лемма 2.4 *Множество периодических точек* F_q *эндоморфизма* A_q *есть подгруппа в* $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$. *Кроме того, существует такая подгруппа* $K_q\subset\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$, *что* $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q\cong$ $\cong F_q\oplus K_q$.

Доказательство. Так как в $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$ существует конечное число элементов, то найдётся такое целое число k, при котором все элементы $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$ являются неподвижными точками эндоморфизма A_q^k. Легко видеть, что $F_q=\operatorname{Im}A_q^k$, следовательно, F_q является подгруппой. Положим $K_q=\ker A_q^k$. Рассмотрим произвольный элемент $x\in\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q$. Тогда $x=A_q^k(x)+(x-A_q^k(x))$, причем $A_q^k(x)\in\operatorname{Im}A_q^k$ и $x-A_q^k(x)\in\ker A_q^k$. Следовательно, $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_q\cong F_q\oplus K_q$.
Доказательство завершено.

Следствие 2.4 *Пусть* p^k *— степень простого числа* p. *Тогда множество периодических точек эндоморфизма* A_{p^k} *есть подгруппа в* $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_{p^k}$, *изоморфная одной из групп* $\bigoplus\limits_{i=1}^{t}\mathbb{Z}_{p^k}$, *где* $t=\overline{0,n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство немедленно следует из теоремы о классификации конечнопорожденных абелевых групп.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Заметим, что $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p$ является n-мерным векторным пространством над полем $\mathbb{Z}_p$, а A_p является линейным оператором, действующим в этом пространстве. Его характеристический многочлен может иметь t корней ($t=\overline{0,n}$), лежащих в $\mathbb{Z}_p$.

Л е м м а 2.5 *Пусть χ_p — характеристический многочлен линейного оператора A_p. Тогда эндоморфизм A_p имеет подгруппу периодических точек, изоморфную $\bigoplus\limits_{i=1}^{t}\mathbb{Z}_p$ в том и только том случае, когда его характеристический многочлен χ_p имеет ноль своим корнем кратности $(n-t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из леммы 2.4 следует, что $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p \cong F_p \oplus K_p$, где F_p и K_p — образ и ядро линейного оператора A_p^k соответственно. Они являются инвариантными относительно оператора A_p, поскольку являются ядром и образом некоторого многочлена от оператора A_p. Значит, существует базис, в котором матрица оператора A_p имеет вид $\begin{pmatrix} M_K & 0 \\ 0 & M_F \end{pmatrix}$, где M_K и M_F — матрицы ограничений оператора A_p на инвариантные подпространства K_p и F_p соответственно. Обозначим ограничения оператора A_p на подпространства K_p и F_p за A_K и A_F соответственно. Заметим, что все точки подпространства K_p являются предпериодическими (кроме точки $(0,...,0)$), а все точки подпространства F_p являются периодическими.

Из конструкции подгруппы K_p следует, что существует такое число n, что $A_K^n = 0$. Значит, оператор A_K – нильпотентный, и все собственные значения его матрицы равны 0.

Покажем, что характеристический многочлен оператора A_F не имеет нулевых собственных значений. Из леммы 2.3 и того, что число p – простое, следует, что все точки пространства $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p$ являются периодическими тогда и только тогда, когда $det(A_p) \bmod p \neq 0$. Данный факт является верным и для эндоморфизма A_F, который действует в подпространстве F_p. Поскольку все точки подпространства F_p являются периодическими точками эндоморфизма A_F, то $det(M_F) \bmod p \neq 0$. Так как характеристический многочлен χ_p линейного оператора A_F имеет вид $\chi = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + {} + ... + a_1\lambda + a_0$, где $a_0 = det(M_F)$ и $det(M_F) \bmod p \neq 0$, то характеристический многочлен оператора A_F не имеет нулевых собственных значений.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Опираясь на полученные выше результаты, перейдём к исследованию множества периодических и предпериодических точек алгебраических эндоморфизмов двумерного тора.

Л е м м а 2.6 *Подгруппа периодических точек эндоморфизма A_p изоморфна $\bigoplus\limits_{i=1}^{t}\mathbb{Z}_p$, $t=\overline{0,2}$ тогда и только тогда, когда подгруппа периодических точек эндоморфизма A_{p^k} изоморфна $\bigoplus\limits_{i=1}^{t}\mathbb{Z}_{p^k}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Случай при $t = 2$ немедленно следует из леммы 2.3 (Все точки $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ являются периодическими точками эндоморфизма A_p тогда и только тогда, когда $(det(A), p) = 1$. Кроме того, $(det(A), p) = 1$ тогда и только тогда, когда $(det(A), p^k) = 1$).

2) Пусть $\varphi_k\colon \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ — естественный гомоморфизм, полусопрягающий эндоморфизмы A_{p^k} и A_p. Из существования данного полусопряжения и конечности числа элементов в $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$ непосредственно следует, что эндоморфизм A_{p^k} имеет не меньше периодических точек, чем эндоморфизм A_p, поскольку для любой периодической точки эндоморфизма A_p найдется хотя бы одна периодическая точка эндоморфизма A_{p^k}, проектирующаяся в нее в силу φ_k. Таким образом, доказана необходимость при $t = 1$.

Докажем достаточность. Предположим, что A_p имеет единственную периодическую точку, и при некотором $k > 1$ эндоморфизм A_{p^k} имеет подгруппу периодических точек, измоморфную $\mathbb{Z}_{p^k}$. Данная подгруппа имеет вид $H = \{h(x_1, x_2)\colon h \in \mathbb{Z}_{p^k}\}$ при некотором $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$.

Покажем, что хотя бы один из элементов x_1, x_2 является обратимым элементом кольца $\mathbb{Z}_{p^k}$. Предположим, что оба элемента x_1 и x_2 необратимы. Тогда множество H представимо в виде $H = \{p(hy_1, hy_2)\colon h \in \mathbb{Z}_{p^k}\}$, где $x_1 = py_1, x_2 = py_2$. Отсюда следует, что в множестве H не более p^{k-1} элементов. Однако множество H изоморфно $\mathbb{Z}_{p^k}$, поэтому в нём p^k элементов. Получили противоречие.

Таким образом, хотя бы один из элементов x_1, x_2 является обратимым элементом кольца $\mathbb{Z}_{p^k}$. Пусть для определенности этот элемент есть x_1. Тогда в множестве H найдется элемент вида $(1, h_1)$. Заметим, что:

$$\varphi_k((1, h_1)) = (1 \mod p^{k-1}, h_1 \mod p^{k-1}) = (1, h_1 \mod p^{k-1}) \neq 0.$$

В силу полусопряженности A_{p^k} и A_p элемент $\varphi_k((1, h_1))$ есть периодическая точка эндоморфизма A_p, что противоречит тому, что $(0, 0)$ есть единственная периодическая точка эндоморфизма A_p. Полученное противоречие доказывает достаточность при $t = 1$.

3) Верность леммы для $t = 0$ следует непосредственно из того, что она верна при $t = 1$ и $t = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

С л е д с т в и е 2.5 *Эндоморфизм A_{p^k} имеет подгруппу периодических точек, изоморфную $\bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}_{p^k}$ в том и только том случае, когда его характеристический многочлен χ_{p^k} имеет ноль своим корнем кратности $2 - t$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство непосредственно следует из леммы 2.6 и леммы 2.5 при $n = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Л е м м а 2.7 *Пусть эндоморфизм $A_{p^k}\colon \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$ имеет подгруппу периодических точек, изоморфную $\mathbb{Z}_{p^k}$. Тогда точка $x \in \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$ является периодической в том и только том случае, когда существует $\lambda \in \mathbb{Z}_{p^k}$, обратимое в кольце $\mathbb{Z}_{p^k}$, такое, что $A_{p^k} x = \lambda x$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем необходимость. Пусть x принадлежит подгруппе P периодических точек эндоморфизма A_{p^k}. Из того, что подгруппа P изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}_{p^k}$ следует, что ограничение A_{p^k} на P имеет вид $x \mapsto \lambda x$, а из того, что все точки P периодические следует, что λ обратимо в кольце $\mathbb{Z}_{p^k}$.

Докажем достаточность. Пусть $A_{p^k}x = \lambda x$ при некотором обратимом $\lambda \in \mathbb{Z}_{p^k}$. Так как λ обратимо, то найдется такое число m, что $\lambda^m = 1$ в кольце $\mathbb{Z}_{p^k}$. Тогда, $A_{p^k}^m x = A_{p^k}^{m-1}\lambda x = \lambda A_{p^k}^{m-1} x = \lambda^m x = x$, следовательно x является периодической точкой.
Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 1.1. Утверждение теоремы немедленно следует из лемм 2.1, 2.5, 2.7.
Доказательство завершено.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041), за исключением доказательства лемм 2.4 и 2.5, полученных в рамках выполнения программы ЦФИ (проект ТЗ-100) НИУ ВШЭ за 2019 г.

Авторы выражают благодарность В. З. Гринесу за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

1. J. Franks, "Anosov diffeomorphisms on tori", *Proc. Symp. in Pure Math.*, **14** (1970), 61–93.
2. S. Newhouse, "On codimension one Anosov diffeomorphisms", *Am. J. Math.*, **92**:3 (1970), 761–770.
3. A. Manning, "There are no new Anosov diffeomorphisms on tori", *American Journal of Mathematics*, **96**:3 (1974), 422–429.
4. F. Przytycki, "Anosov endomorphisms", *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.
5. R. Mane, C. Pugh, "Stability of endomorphisms", *Lecture Notes in Math.*, **468** (1975), 175–184.
6. M. Zhang, "On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori", *Chin Ann Math Ser B.*, **10** (1989), 416–425.
7. А. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999, 768 с.
8. Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, МЦНМО, М., 2011, 592 с.

Поступила 12.11.2019

MSC2010 37D05

On periodic points of torus endomorphisms

© $\boxed{\text{E. D. Kurenkov}}$ [1], D. I. Mints[2]

Abstract. It is a well-known fact that Anosov endomorphisms of n-torus which are different from automorphisms and expanding endomorphisms are not structurally stable and, in general, are not conjugated to algebraic endomorphisms. Nevertheless, hyperbolic algebraic endomorphisms of torus are conjugated with their C^1 perturbations on the set of periodic points. Therefore the study of algebraic toral endomorphisms is very important. This paper is devoted to study of the structure of the sets of periodic and pre-periodic points of algebraic toral endomorphisms. Various group properties of this sets of points are studied. The density of periodic points for algebraic endomorphisms of n-torus is proved; it is clarifief how the number of periodic and pre-periodic points with a fixed denominator depends on the properties of the characteristic polynomial. The Theorem 1.1 is the main result of this paper. It contains an algorithm that allows to split the sets of periodic and pre-periodic points of a given algebraic endomorphism of two-dimensional torus.

Key Words: Anosov endomorphism, algebraic toral endomorphism, periodic points, semiconjugacy

References

1. J. Franks, "Anosov diffeomorphisms on tori", *Proc. Symp. in Pure Math.*, **14** (1970), 61–93.
2. S. Newhouse, "On codimension one Anosov diffeomorphisms", *Am. J. Math.*, **92**:3 (1970), 761–770.
3. A. Manning, "There are no new Anosov diffeomorphisms on tori", *American Journal of Mathematics*, **96**:3 (1974), 422–429.
4. F. Przytycki, "Anosov endomorphisms", *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.
5. R. Mane, C. Pugh, "Stability of endomorphisms", *Lecture Notes in Math.*, **468** (1975), 175–184.
6. M. Zhang, "On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori", *Chin Ann Math Ser B.*, **10** (1989), 416–425.
7. A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, **54**, Cambridge University Press, 1995, 824 p.
8. E. B. Vinberg, *[Course of algebra]*, MCNMO, Moscow, 2011, 592 p.

Submitted 12.11.2019

[1] $\boxed{\textbf{Evgeniy D. Kurenkov}}$, Doctoral Student, Department of Fundamental Mathematics, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3544-1143, ekurenkov@hse.ru

[2] **Dmitriy I. Mints**, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0329-6946, dmincz@hse.ru