

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.488-506

УДК 532.5: 539.3: 517.968.74

## Динамика вязкоупругого элемента проточного канала

© Н. И. Еремеева<sup>1</sup>, П. А. Вельмисов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при двустороннем обтекании вязкоупругого элемента, расположенного на прямолинейной стенке бесконечного канала. Сформулирована математическая модель, описывающая задачу в линейной постановке и соответствующая малым возмущениям однородных дозвуковых потоков и малым прогибам вязкоупругого элемента. С помощью методов теории функций комплексного переменного решение задачи сведено к исследованию интегро-дифференциального уравнения с частными производными относительно функции прогиба элемента. Для решения этого уравнения предложен численный метод, основанный на применении метода Бубнова-Галеркина, с последующим сведением получаемой системы интегро-дифференциальных уравнений к векторному уравнению Вольтерра второго рода. На основе разработанного численного метода проведено моделирование на ЭВМ динамики деформируемого элемента.

**Ключевые слова:** аэрогидродинамическое воздействие, вязкоупругий элемент, аэрогидроупругость, интегро-дифференциальное уравнение, метод Бубнова-Галеркина, векторное уравнение Вольтерра второго рода, теория функции комплексного переменного

## 1. Введение

При проектировании конструкций и устройств, обтекаемых потоком жидкости или газа, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости деформируемых элементов.

Теории взаимодействия деформируемых тел с потоком жидкости или газа посвящено много теоретических и экспериментальных исследований. Среди работ по данной тематике отметим [1–9].

Предметом исследований в данной статье являются совместные малые колебания идеальной несжимаемой жидкости и вязкоупругого элемента, расположенного на прямолинейной стенке проточного канала бесконечной длины. При этом на вязкоупругий элемент воздействует как неограниченный поток над стенкой (распространяющийся в верхней полуплоскости), так и поток внутри канала, поперечный разрез которого имеет вид прямолинейной бесконечной полосы (Рис. 1.1)

Предполагаемая математическая модель может быть основой для решения задачи о динамике части ледяного покрова, толщина которого значительно меньше толщины

<sup>1</sup>Еремеева Нина Игоревна, доцент кафедры высшей математики, Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал ФГБОУ ВО Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (433351, г. Димитровград, ул. Куйбышева, д. 294), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6160-2572>, NIEremeeva@mephi.ru

<sup>2</sup>Вельмисов Петр Александрович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО Ульяновский государственный технический университет (432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmiso@ulstu.ru

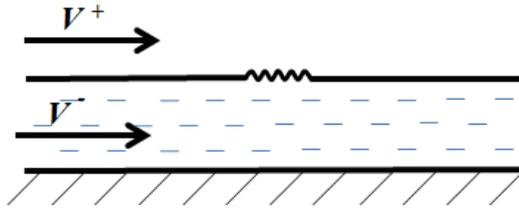


Рис. 1.1. Бесконечный резервуар с вязкоупругой вставкой

основной (бесконечно простирающейся) части ледяной поверхности. При этом учитывается взаимодействие ледяного покрова как с подлёдным течением, так и с ветровым потоком, распространяющимся над ледяной поверхностью.

## 2. Математическая модель

Введем систему координат, как показано на Рис. 2.1. На плоскости  $xOy$ , в которой происходят совместные колебания вязкоупругой вставки и жидкости, на прямой  $y = h$  недеформируемым прямолинейным участкам стенки соответствуют промежутки  $x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty)$ , вставке –  $x \in (0; a)$ . В бесконечно удаленных точках скорости жидкости (газа) сверху и снизу равны соответственно  $v^+$  и  $v^-$ , и имеют направления, совпадающие с направлением  $Ox$ .

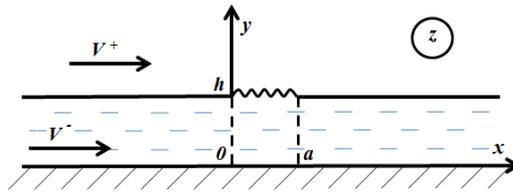


Рис. 2.1. Схема задачи

Обозначим через  $\bar{w}(x, t)$  прогиб деформируемого элемента;  $\bar{\phi}_1(x, y, t)$  – потенциал возмущенного потока жидкости над стенкой;  $\bar{\phi}_2(x, y, t)$  – потенциал возмущенного течения в полосе. Будем считать изменения этих величин малыми, т. е.  $\bar{w}(x, t) = \epsilon w(x, t)$ ,  $\bar{\phi}_1(x, y, t) = v^+ x + \epsilon \phi_1(x, y, t)$ ,  $\bar{\phi}_2(x, y, t) = v^- x + \epsilon \phi_2(x, y, t)$ ,  $\epsilon \ll 1$ .

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta \phi_1 \equiv \phi_{1_{xx}} + \phi_{1_{yy}} = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y > h; \tag{2.1}$$

$$\Delta \phi_2 \equiv \phi_{2_{xx}} + \phi_{2_{yy}} = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in (0, h); \tag{2.2}$$

$$\phi_{1_y}(x, h, t) = 0, \quad x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty); \tag{2.3}$$

$$\phi_{1_y}(x, h, t) = w_t + v^+ w_x, \quad x \in (0; a); \tag{2.4}$$

$$\phi_{2_y}(x, h, t) = 0, \quad x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty); \tag{2.5}$$

$$\phi_{2_y}(x, h, t) = w_t + v^- w_x, \quad x \in (0; a); \tag{2.6}$$

$$\phi_{2_y}(x, 0, t) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty); \tag{2.7}$$

$$|\nabla\phi_1|^2 = (\phi_{1_x}^2 + \phi_{1_y}^2 + \phi_{1_t}^2) = 0, y > h, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty; \tag{2.8}$$

$$|\nabla\phi_2|^2 = (\phi_{2_x}^2 + \phi_{2_y}^2 + \phi_{2_t}^2) = 0, y \in (0, h), x \rightarrow -\infty; \tag{2.9}$$

$$L(w) = \rho_1 (\phi_{1_t} + v^+ \phi_{1_x}) - \rho_2 (\phi_{2_t} + v^- \phi_{2_x}) + P_2 - P_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v^{+2} - \frac{1}{2}\rho_2 v^{-2}, x \in (0, a), y = h; \tag{2.10}$$

где  $\rho_1, \rho_2$  – плотности потоков;  $P_1, P_2$  – давления в этих потоках в состоянии покоя, а оператор  $L(w)$  задаётся формулой (см. [10–11])

$$L(w) = D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \int_0^t R_1(\tau, t) \frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} d\tau \right] + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \beta_0 \left[ w - \int_0^t R_2(\tau, t) w(x, \tau) d\tau \right], \tag{2.11}$$

где  $D$  – изгибная жесткость;  $m$  – погонная масса;  $P$  – сжимающая (растягивающая) сила;  $R_1(\tau, t), R_2(\tau, t)$  – ядра релаксации, характеризующие вязкоупругие свойства материала вставки и ее основания;  $\beta_1, \beta_2$  – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования;  $\beta_0$  – коэффициент жёсткости основания.

### 3. Решение аэрогидродинамической задачи

Для решения задачи введем два комплексных потенциала (аналогичные задачи рассмотрены в работе [11]):

1)  $f_1(z, t) = \phi_1(x, y, t) + i\psi_1(x, y, t)$  для точек  $\varkappa_1 = \{z = x + iy, Imz > h\}$  над прямой  $y = h$ ;

2)  $f_2(z, t) = \phi_2(x, y, t) + i\psi_2(x, y, t)$  для точек  $\varkappa_2 = \{z = x + iy, 0 < Imz < h\}$  внутри полосы.

Из условий Коши-Римана [12] для функции  $f_1(z, t)$  получим

$$\psi_{1_x} = -\phi_{1_y} \Rightarrow -\psi_1(x, h, t) = \int_{-\infty}^x \phi_{1_y}(\tau, h, t) d\tau.$$

Обозначая

$$\psi_1(x, h, t) = -\omega_1(x, t)$$

и используя (2.3) и (2.4), получим:

$$\omega_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty), \\ \int_0^x (w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)) d\tau, & \text{если } x \in (0; a). \end{cases} \tag{3.1}$$

При этом было учтено, что  $\int_0^a (w_t + v^+ w_x) dx = 0$  (следствие несжимаемости).

Рассмотрим функцию  $F(z, t) = i f_1(z, t)$ . Заметим, что

$$Re(F(z, t))|_{z=x+ih} = -Im(f_1(z, t))|_{z=x+ih} = \omega_1(x, t).$$

Тогда, согласно интегралу Шварца для верхней полуплоскости [12]:

$$F(z, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + i C(t), \quad C(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1(z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + C(t).$$

Дифференцируя функцию  $f_1(z, t)$  по  $z$  и по  $t$ , получим:

$$f_{1_z}(z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_1(\tau, t) \left( \frac{1}{\tau - z} \right)_z d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_1(\tau, t) \left( \frac{1}{\tau - z} \right)_\tau d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_{1_\tau}(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$$f_{1_t}(z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_{1_t}(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + C'(t).$$

Воспользовавшись формулами Сохоцкого [12], найдем

$$\lim_{z \rightarrow x+hi} f_{1_t}(z, t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow x+hi} \int_0^a \frac{\omega_{1_t}(\tau, t)}{\tau - z} d\tau + C'(t) = -i\omega_{1_t}(x, t) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1_t}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + C'(t).$$

Аналогично:

$$\lim_{z \rightarrow x+hi} f_{1_z}(z, t) = -i\omega_{1_x}(x, t) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1_\tau}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau.$$

С другой стороны,

$$f_{1_t}(x, h, t) = \phi_{1_t}(x, h, t) + i\psi_{1_t}(x, h, t), \quad f_{1_z}(x, h, t) = \phi_{1_x}(x, h, t) + i\psi_{1_x}(x, h, t).$$

Тогда, приравняв действительные части  $f_{1_t}(x, h, t)$  и  $f_{1_z}(x, h, t)$ , получим:

$$\phi_{1_x}(x, h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1_\tau}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau, \quad (3.2)$$

$$\phi_{1_t}(x, h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1_t}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + ReC'(t).$$

Заметим, что из условия (2.8) следует, что  $ReC'(t) = 0$ , тогда:

$$\phi_{1_t}(x, h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1_t}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau. \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь второй комплексный потенциал  $f_2(z, t) = \phi_2(x, y, t) + i\psi_2(x, y, t)$ , заданный в  $\varkappa_2 = \{z = x + iy, 0 < Imz < h\}$ .

Найдем функцию, которая конформно отображает бесконечную полосу на верхнюю полуплоскость. В качестве такой функции можно взять  $\zeta = -e^{-\frac{\pi}{h}z}$  (Рис. 3.1).

При этом отображении точки нижней границы полосы  $\{z = x + 0i, x \in (-\infty, +\infty)\}$  переходят в отрицательную часть действительной оси  $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (-\infty, 0)\}$ , левая часть верхней границы полосы  $\{z = x + hi, x \in (-\infty, 0)\}$  – в

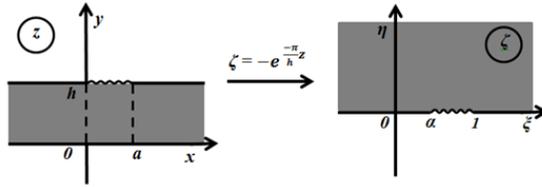


Рис. 3.1. Отображение бесконечной полосы на верхнюю полуплоскость

луч  $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (1, +\infty)\}$ , правая часть верхней границы полосы  $\{z = x + hi, x \in (0, +\infty)\}$  – в интервал  $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (0, 1)\}$ . Заметим, что точки вязкоупругой вставки  $\{z = x + hi, x \in (0, a)\}$  отражаются в  $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (\alpha, 1)\}$ ,  $\alpha = e^{-\frac{\pi}{h}a}$ .

Пусть

$$G(z, t) = i f_2(z, t) = i \phi_2(x, y, t) - \psi_2(x, y, t).$$

Тогда

$$G_z(z, t) = i \phi_{2_x}(x, y, t) - \psi_{2_x}(x, y, t) = i \phi_{2_x}(x, y, t) + \phi_{2_y}(x, y, t).$$

Следовательно,  $Re(G_z(z, t)) = \phi_{2_y}(x, y, t)$ , а значит,

$$Re(G_z(z(\zeta), t))|_{\zeta=\xi+0i} = \begin{cases} \phi_{2_y}(x, 0, t), & x \in (-\infty, +\infty), & \text{если } \xi \in (-\infty; 0], \\ \phi_{2_y}(x, h, t), & x \in (0, a), & \text{если } \xi \in (\alpha; 1), \\ \phi_{2_y}(x, h, t), & x \in (-\infty, 0] \cup [a, +\infty), & \text{если } \xi \in [0, \alpha] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \in (-\infty; 0], \\ w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t), & \text{если } \xi \in (\alpha; 1), \\ 0, & \text{если } \xi \in [0, \alpha] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

Обозначим

$$\omega_2(\xi, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \in (-\infty; \alpha] \cup [1, +\infty), \\ w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t), & \text{если } \xi \in (\alpha; 1). \end{cases} \tag{3.4}$$

Тогда по лемме Шварца для верхней полуплоскости:

$$G_z(z(\zeta), t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + i C(t), \quad C(t) \in \mathbb{R}.$$

Значит,

$$f_{2_z}(z(\zeta), t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + C(t), \quad C(t) \in \mathbb{R}.$$

По формуле Сохоцкого:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi + 0i} f_{2_z}(z(\zeta), t) = -i \omega_2(\xi, t) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau + C(t).$$

С другой стороны,

$$f_{2_z}(x(\xi), h, t) = \phi_{2_x}(x(\xi), h, t) + i\psi_{2_x}(x(\xi), h, t).$$

Приравняв действительные части с учётом того, что  $C(t) \in \mathbb{R}$ , получим:

$$\phi_{2_x}(x(\xi), h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \xi} + C(t).$$

Отметим, что если  $z = x + ih$ ,  $x \rightarrow -\infty$ , то  $\zeta \rightarrow \xi + 0i$ ,  $\xi \rightarrow +\infty$ , значит,

$$\phi_{2_x}(-\infty, h, t) = -\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \xi} + C(t) = C(t).$$

При этом  $C(t) = 0$ , т. к. из условия (2.9) следует  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_{2_x}(x, h, t) = 0$ .

Тогда

$$\phi_{2_x}(x(\xi), h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \xi}, \tag{3.5}$$

а также

$$f_{2_z}(z(\zeta), t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta}. \tag{3.6}$$

Отметим еще один факт, следующий из условия несжимаемости:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t) d\tau}{\tau} &= \int_{\alpha}^1 \frac{w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t)}{\xi} d\xi = \left[ \begin{array}{l} \xi = e^{-\frac{\pi}{h}x} \\ dx(\xi) = -\frac{h}{\pi\xi} d\xi \\ x \in (a, 0) \end{array} \right] = \\ &= \frac{\pi}{h} \int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) dx = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для нахождения  $\phi_{2_t}(x(\xi), 0, t)$  восстановим функцию  $f_2(z(\zeta), t)$  по известной производной  $f_{2_z}(z(\zeta), t)$ . Поскольку

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\pi}{h} e^{-\frac{\pi}{h}z} = -\frac{\pi}{h}\zeta,$$

то, используя (3.6), получим:

$$f_{2_{\zeta}}(z(\zeta), t) = f_{2_z}(z(\zeta), t) \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \cdot \frac{h}{\pi\zeta} = \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{(\tau - \zeta)\zeta} d\tau.$$

Поскольку

$$\frac{1}{(\tau - \zeta)\zeta} = \frac{1}{\tau - \zeta} + \frac{1}{\zeta},$$

то

$$f_{2\zeta}(z(\zeta), t) = \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{(\tau - \zeta)\tau} d\tau + \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{\zeta\tau} d\tau = \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{(\tau - \zeta)\tau} d\tau.$$

Найдем функцию  $f_2(z(\zeta), t)$ , интегрируя по  $\zeta$ :

$$f_2(z(\zeta), t) = -\frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{\tau} \ln(\tau - \zeta) d\tau + \hat{C}(t).$$

Введем обозначение

$$\tilde{\omega}_2(\tau, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta. \quad (3.8)$$

Интегрируем по частям, учитывая, что  $\tilde{\omega}_2(1, t) = \tilde{\omega}_2(\alpha, t)$  (см. (3.7)):

$$\begin{aligned} f_2(z(\zeta), t) + \hat{C}(t) &= -\frac{h}{\pi} \left( \ln(\tau - \zeta) \tilde{\omega}_2(\tau, t) \Big|_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_2(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau \right) + \\ &+ \hat{C}(t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_2(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau + \hat{C}(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f_{2t}(z(\zeta), t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau + \hat{C}'(t). \quad (3.9)$$

По формуле Сохоцкого:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi + 0i} f_{2t}(z(\zeta), t) = ih \tilde{\omega}_{2t}(\xi, t) + \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau + \hat{C}'(t).$$

Значит,

$$\phi_{2t}(x(\xi), h, t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau + \operatorname{Re} \hat{C}'(t).$$

Если  $z = x + hi$ ,  $x \rightarrow -\infty$ , то  $\zeta = \xi + 0i$ ,  $\xi \rightarrow +\infty$ , тогда  $\operatorname{Re} \hat{C}'(t) = 0$ , следовательно,

$$\phi_{2t}(x(\xi), h, t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau. \quad (3.10)$$

#### 4. Исследование поведения найденного решения при $x \rightarrow +\infty$

Оценим величины  $\phi_{2x}^2$ ,  $\phi_{2y}^2$ ,  $\phi_{2t}^2$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Если  $z = x + iy$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \in (0, h)$ , то  $\zeta = -e^{-\frac{\pi}{h}x} \cdot e^{-\frac{\pi i}{h}y} \rightarrow 0$ , т. е.  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  для  $\forall y \in (0, h)$ .

Используя (3.6) и (3.7), получим:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2_z}(z(\zeta), t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau} = 0 \Rightarrow \phi_{2_x}(+\infty, y, t) = 0, \phi_{2_y}(+\infty, y, t) = 0,$$

значит,

$$\left(\phi_{2_x}^2 + \phi_{2_y}^2\right)_{+\infty} = 0. \tag{4.1}$$

Из равенств (3.9)–(3.10) следует:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2_t}(z(\zeta), t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau + \hat{C}'(t), \phi_{2_t}(+\infty, y, t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau.$$

Рассмотрим интеграл  $\int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau$ . Используя (3.8) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\tau} d\tau \int_{\tau}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta \int_{\alpha}^{\theta} \frac{1}{\tau} d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} \cdot \ln \tau \Big|_{\alpha}^{\theta} d\theta = \\ &= \frac{\ln \alpha}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} \cdot \ln \theta d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} \cdot \ln \theta d\theta = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 (w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t)) \cdot \frac{\ln \xi}{\xi} d\xi = \left[ \begin{array}{l} \xi = e^{-\frac{\pi}{h}x} \\ dx(\xi) = -\frac{h}{\pi \xi} d\xi \\ x \in (a, 0) \end{array} \right] = \\ &= \frac{\pi}{h^2} \int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) \cdot x dx. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) dx = 0$  для любого значения  $t$ , т. е.

$$\forall t: \Omega(t) = \int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) dx = 0,$$

следовательно,

$$\forall t: \frac{\partial \Omega(t)}{\partial t} = \int_0^a (w_{tt}(x, t) + v^- w_{xt}(x, t)) dx = 0.$$

Тогда  $\forall y \in (0, h), \forall t \phi_{2_t}(+\infty, y, t)$  – ограниченная величина.

Таким образом, учитывая (4.1), можно утверждать, что на бесконечном удалении справа в канале имеет место однородный поток, давление в котором является ограниченной величиной.

### 5. Сведение задачи к решению интегро-дифференциального уравнения

Используя равенства (3.1)–(3.3), получим:

$$\phi_{1_t}(x, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a d\tau \int_0^\tau \frac{w_{tt}(\theta, t)}{\tau - x} d\theta - \frac{v^+}{\pi} \int_0^a \frac{w_t(\tau, t)}{\tau - x} d\tau, \tag{5.1}$$

$$\phi_{1_x}(x, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)}{\tau - x} d\tau. \tag{5.2}$$

Учитывая (3.4), а также то, что точки вставки  $\{z = x + ih, x \in (0, a)\}$  отражаются в интервал  $\{\zeta = \xi + i0, \xi \in (\alpha, 1)\}$ ,  $\xi = e^{-\frac{\pi}{h}x}, \alpha = e^{-\frac{\pi}{h}a}$ , запишем (3.5) в виде:

$$\begin{aligned} \phi_{2_x}(x, 0, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_\alpha^1 (w_t(\theta, t) + v^- w_\theta(\theta, t)) \Big|_{\theta = -\frac{h}{\pi} \ln \tau} \frac{d\tau}{\tau - e^{-\frac{\pi}{h}x}} = \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^a (w_t(\theta, t) + v^- w_\theta(\theta, t)) \frac{d\theta}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\theta-x)}} = -\frac{1}{h} \int_0^a (w_t(\tau, t) + v^- w_\tau(\tau, t)) \frac{d\tau}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Аналогично преобразуем (3.10), используя (3.8):

$$\begin{aligned} \phi_{2_t}(x, 0, t) &= -\frac{h}{\pi} \int_\alpha^1 d\theta \int_\alpha^\theta \frac{w_{tt}(\varpi(\theta), t) + v^- w_{\varpi t}(\varpi(\theta), t)}{(\tau - \xi(x))\theta} d\tau = \left[ \begin{matrix} \xi(x) = e^{-\frac{\pi}{h}x} \\ \varpi(\theta) = -\frac{h}{\pi} \ln \theta \end{matrix} \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^a (w_{tt}(\tau, t) + v^- w_{\tau t}(\tau, t)) \ln |e^{-\frac{\pi}{h}\tau} - e^{-\frac{\pi}{h}x}| d\tau. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Подставив (5.1)–(5.4) в правую часть уравнения (2.10), запишем это уравнение в виде:

$$\begin{aligned} L(w) &= -\frac{\rho_1}{\pi} \int_0^a d\tau \int_0^\tau \frac{w_{tt}(\theta, t)}{\tau - x} d\theta - \frac{\rho_1 v^+}{\pi} \int_0^a \frac{2w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{2} \rho_1 v^{+2} - \frac{1}{2} \rho_2 v^{-2} + \\ &+ \frac{\rho_2 v^-}{h} \int_0^a (w_t(\tau, t) + v^- w_\tau(\tau, t)) \frac{d\tau}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}} + \frac{\rho_2}{\pi} \int_0^a (w_{tt}(\tau, t) + \\ &+ v^- w_{\tau t}(\tau, t)) \ln |e^{-\frac{\pi}{h}\tau} - e^{-\frac{\pi}{h}x}| d\tau + P_2 - P_1. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая вид оператора  $L(w)$  (2.11), приведём решение задачи к решению интегро-дифференциального уравнения относительно функции прогиба вязкоупругого элемента  $w(x, t)$ :

$$-\frac{\rho_1}{\pi} \int_0^a d\tau \int_0^\tau \frac{w_{tt}(\theta, t)}{\tau - x} d\theta - \frac{\rho_1 v^+}{\pi} \int_0^a \frac{2w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{2} \rho_1 v^{+2} - \frac{1}{2} \rho_2 v^{-2} + P_2 - P_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_2 v^-}{h} \int_0^a (w_t(\tau, t) + v^- w_\tau(\tau, t)) \frac{d\tau}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}} + \\
& + \frac{\rho_2}{\pi} \int_0^a (w_{tt}(\tau, t) + v^- w_{\tau t}(\tau, t)) \ln |e^{-\frac{\pi}{h}\tau} - e^{-\frac{\pi}{h}x}| d\tau - \\
& - D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \int_0^t R_1(\tau, t) \frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} d\tau \right] - \beta_0 \left[ w - \int_0^t R_2(\tau, t) w(x, \tau) d\tau \right] - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\
& - \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t} - \beta_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad x \in (0, a). \tag{5.5}
\end{aligned}$$

## 6. Сведение задачи к системе интегро-дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина

Для численного решения уравнения (5.5) применим метод Бубнова-Галёркина [13]. Будем считать, что концы вязкоупругой вставки закреплены шарнирно, тогда

$$w(0, t) = w(a, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Пусть, кроме того, выполняются начальные условия:

$$w(x, 0) = h_1(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = h_2(x).$$

Отметим, что функция  $h_2(x)$  для обеспечения выполнения условия несжимаемости должна обладать некоторым свойством. Поскольку

$$\int_0^a (w_t(x, t) + v^\pm w_x(x, t)) dx = \int_0^a w_t(x, t) dx + v^\pm (w(a, t) - w(0, t)) = 0,$$

то при любых фиксированных  $\tilde{t}$  площадь, ограниченная графиком  $y = w_t(x, \tilde{t})$ ,  $x \in (0, a)$ , равна нулю, т. е.  $\int_0^a h_2(x) dx = 0$ .

Кроме того,  $\frac{d}{dt} \int_0^a w(x, t) dx = 0$ , а значит, при любых фиксированных  $\tilde{t}$  площадь, ограниченная графиком  $y = w(x, \tilde{t})$ ,  $x \in (0, a)$ , остается неизменной, а именно равной площади, ограниченной графиком  $y = h_1(x)$ .

Согласно методу Бубнова-Галёркина, решение задачи будем искать в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}. \tag{6.1}$$

Подставим разложение (6.1) в уравнение (5.5), умножим полученную невязку уравнения на  $\sin \frac{\pi n x}{a}$  и проинтегрируем по отрезку  $[0, a]$ . В результате получим систему  $N$

интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{nk} y_k''(t) + \sum_{k=1}^N \tilde{b}_{nk} y_k'(t) + \sum_{k=1}^N \tilde{d}_{nk} y_k(t) = \\ & = \tilde{m}_n^{(1)} \int_0^t R_1(\tau, t) y_n(\tau) d\tau + \tilde{m}_n^{(2)} \int_0^t R_2(\tau, t) y_n(\tau) d\tau + \tilde{c}_n, \end{aligned} \tag{6.2}$$

в которой

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{nk} &= \frac{a\rho_1}{\pi^2 k} \int_0^a dx \int_0^a \frac{(\cos \frac{\pi k \tau}{a} - 1) \sin \frac{\pi n x}{a}}{\tau - x} d\tau + \\ &+ \frac{\rho_2}{\pi} \int_0^a dx \int_0^a \sin \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a} \ln |e^{-\frac{\pi}{h} \tau} - e^{-\frac{\pi}{h} x}| d\tau - \\ &\quad - \frac{a}{2} m \cdot \delta_{kn}; \\ \tilde{b}_{nk} &= -\frac{2v^+ \rho_1}{\pi} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{\tau - x} d\tau + \frac{\rho_2 v^-}{h} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}} d\tau + \\ &+ \frac{k\rho_2 v^-}{a} \int_0^a dx \int_0^a \cos \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a} \ln |e^{-\frac{\pi}{h} \tau} - e^{-\frac{\pi}{h} x}| d\tau - \frac{a}{2} \left( \beta_2 \left( \frac{\pi k}{a} \right)^4 + \beta_1 \right) \delta_{kn}; \\ \tilde{d}_{nk} &= -\frac{kv^+ \rho_1}{a} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\cos \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{\tau - x} d\tau + \frac{\rho_2 v^- \pi k}{ah} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\cos \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}} d\tau - \\ &\quad - \frac{a}{2} \left( D \left( \frac{\pi k}{a} \right)^4 - P \left( \frac{\pi k}{a} \right)^2 + \beta_0 \right) \delta_{kn}; \\ \tilde{m}_n^{(1)} &= -\frac{aD}{2} \left( \frac{\pi n}{a} \right)^4; \quad \tilde{m}_n^{(2)} = -\frac{a}{2} \beta_0; \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k, \\ 0, & \text{если } n \neq k, \end{cases} \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

### 7. Приведение системы интегро-дифференциальных уравнений к векторному уравнению Вольтера II рода

Пусть

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_N(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \dots \\ y_N'(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3(t) = \begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ \dots \\ y_N''(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \dots \\ \tilde{c}_N \end{pmatrix}, \\ \tilde{A} &= \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1N} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{N1} & \tilde{a}_{N2} & \dots & \tilde{a}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1N} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{b}_{N1} & \tilde{b}_{N2} & \dots & \tilde{b}_{NN} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \dots & \tilde{d}_{1N} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \dots & \tilde{d}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{d}_{N1} & \tilde{d}_{N2} & \dots & \tilde{d}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_i = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2^{(i)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{m}_N^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$P = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}, \quad Z = \tilde{A}^{-1}\tilde{D}, \quad \vec{c}_3 = \tilde{A}^{-1}\vec{c}, \quad G_i = \tilde{A}^{-1}\tilde{M}_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда система (6.2) приводится к матричному уравнению

$$\vec{v}_3(t) + P \cdot \vec{v}_2(t) + Z \cdot \vec{v}_1(t) = G_1 \int_0^t R_1(\tau, t) \vec{v}_1(\tau) d\tau + G_2 \int_0^t R_2(\tau, t) \vec{v}_1(\tau) d\tau + \vec{c}_3,$$

которое, в свою очередь, можно записать в виде интегральной системы

$$\begin{cases} \vec{v}_1(t) = \int_0^t \vec{v}_2(\tau) d\tau + \vec{c}_1, \\ \vec{v}_2(t) = \int_0^t \vec{v}_3(\tau) d\tau + \vec{c}_2, \\ \vec{v}_3(t) = \int_0^t [(G_1 R_1(\tau, t) + G_2 R_2(\tau, t)) \vec{v}_1(\tau) - P \vec{v}_3(\tau) - Z \vec{v}_2(\tau)] d\tau + \vec{c}_3. \end{cases},$$

$$\vec{c}_i = \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ \dots \\ c_N^{(i)} \end{pmatrix}, \quad c_k^{(i)} = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi kx}{a} h_i(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

После введения обозначений:

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{v}_2(t) \\ \vec{v}_3(t) \end{pmatrix}, \quad R(\tau, t) = \begin{pmatrix} O & E & O \\ O & O & E \\ G_1 R_1(\tau, t) + G_2 R_2(\tau, t) & -Z & -P \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{pmatrix},$$

где  $O$  и  $E$  – нулевая и единичная квадратные матрицы порядка  $N$ , приходим к векторному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\vec{V}(t) = \int_0^t R(\tau, t) \vec{V}(\tau) d\tau + \vec{C}. \tag{7.1}$$

Применение подобного метода решения можно найти в работах [14], [15].

### 8. Решение уравнения Вольтерра II рода методом итераций

В качестве метода численного решения уравнения Вольтерра II рода выберем метод итераций [16].

Для организации итерационного процесса нулевое приближения примем равным нулевому вектору:

$$\vec{V}^0 = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^0 \\ \vec{v}_2^0 \\ \vec{v}_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

а каждое следующее приближение  $\vec{V}^{k+1} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{k+1} \\ \vec{v}_2^{k+1} \\ \vec{v}_3^{k+1} \end{pmatrix}$  будем находить по формулам

$$\begin{cases} \vec{v}_1^{k+1}(t) = \int_0^t \vec{v}_2^k(\tau) d\tau + \vec{c}_1, \\ \vec{v}_2^{k+1}(t) = \int_0^t \vec{v}_3^k(\tau) d\tau + \vec{c}_2, \\ \vec{v}_3^{k+1}(t) = \int_0^t [(G_1 R_1(\tau, t) + G_2 R_2(\tau, t)) \vec{v}_1^k(\tau) - P \vec{v}_3^k(\tau) - Z \vec{v}_2^k(\tau)] d\tau - Z \vec{c}_1 - P \vec{c}_2 + \vec{c}_3. \end{cases}$$

### 9. Примеры численного расчета задачи

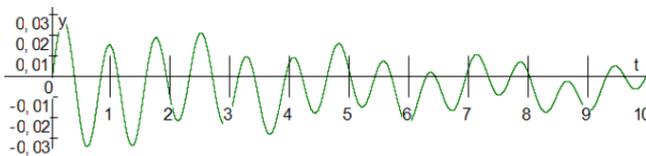
Получим на основе описанного метода численное решение задачи при фиксированных исходных данных.

Пусть высота прямоугольного резервуара  $h = 1$ , вязкоупругая вставка изготовлена из алюминия, имеет длину  $a = 1$  и толщину  $h_* = 0,001$  (все величины приведены в СИ [кг, м, с]). Плотность алюминия  $\rho_* = 2700$ , модуль Юнга  $E = 7 \cdot 10^{10}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,35$ , следовательно, погонная масса вставки и коэффициент её изгибной жесткости равны  $m = h_* \rho_* = 2,7$  и  $D = EJ = \frac{E h_*^3}{12(1 - \nu^2)} = 6,648$  соответственно.

Сверху вставку обтекает поток воздуха ( $\rho_1 = 1,3$ ), скорость которого в бесконечно удалённой точке  $v^+ = 1,0$ , а снизу на вставку воздействует поток воды ( $\rho_2 = 998$ ) со скоростью на бесконечности  $v^- = 0,05$ , при этом давления потоков в состоянии покоя равны соответственно  $P_1 = 100000$ ,  $P_2 = 101100$ .

Другие параметры задачи примем равными  $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, P = -9000, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$ .

На рисунке 9.1 изображен график второго галёркинского приближения  $w_2(x_0, t) = \sum_{k=1}^2 y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}$ , при фиксированном  $x_0 = 0,1a$ .



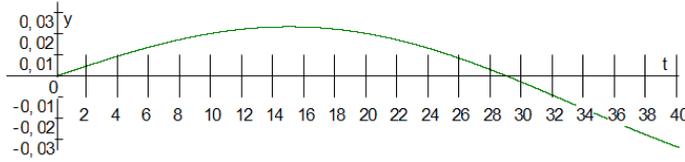
**Рис. 9.1.** График  $w_2(0, 1a; t)$  при  $a = 1, h = 1, D = 6,648, P = -9000, \rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 1, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 101100, \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$

Пусть теперь высота прямоугольного резервуара  $h = 50$ , вязкоупругая вставка изготовлена из льда, имеет длину  $a = 50$  и толщину  $h_* = 0,02$ . Плотность льда  $\rho_* = 948$ , модуль Юнга  $E = 5 \cdot 10^8$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,45$ , тогда погонная масса вставки равна  $m = h_* \rho_* = 18,98$ , а коэффициент изгибной жёсткости  $D = 606,06$ .

На вставку воздействуют те же потоки воздуха и воды, для которых  $v^+ = 1,0, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 100500$ .

Другие коэффициенты примем равными  $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, P = -20000, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$ .

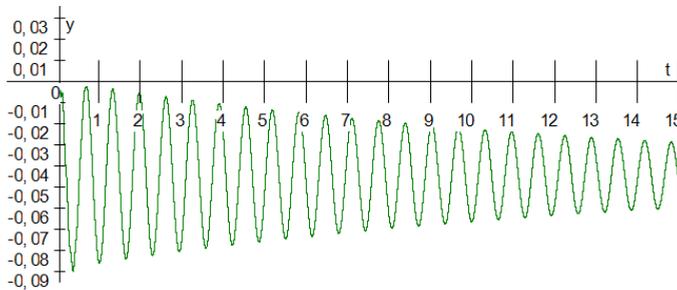
На Рис. 9.2 изображен график второго галёркинського приближения  $w_2(x_0, t) = \sum_{k=1}^2 y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}$ , при фиксированном  $x_0 = 0,05a$ .



**Рис. 9.2.** График  $w_2(0,05a; t)$  при  $a = 50, h = 50, D = 606,06, P = -20000, \rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 1, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 100500, \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$

Одним из наиболее важных вопросов, возникающих при исследовании динамики деформируемых элементов конструкций, является вопрос устойчивости ([17–20]). Численное моделирование позволяет оценивать характер колебаний вязкоупругого элемента, а именно выяснять, являются ли колебания затухающими, или амплитуда неограниченно возрастает.

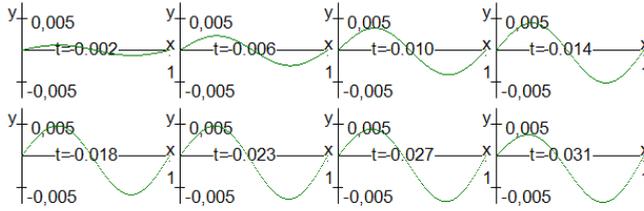
На Рис. 9.3 изображен график второго галёркинського приближения  $w_2(x_0, t) = \sum_{k=1}^2 y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}$ , при фиксированном  $x_0 = 0,7a$  и следующих значениях коэффициентов:  $h = \pi, m = 18,96, \rho_* = 948, D = 606,06, \rho_1 = 1,3, v^+ = 0,5, \rho_2 = 998, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 102500, \beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, P = 100, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$ .



**Рис. 9.3.** График  $w_2(0,7a; t)$  при  $a = 1, h = \pi, D = 606,06, P = 100, \rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 0,5, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 102500, \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$

Заметим, что амплитуда колебаний на этом графике уменьшается, то есть колебания имеют устойчивый характер.

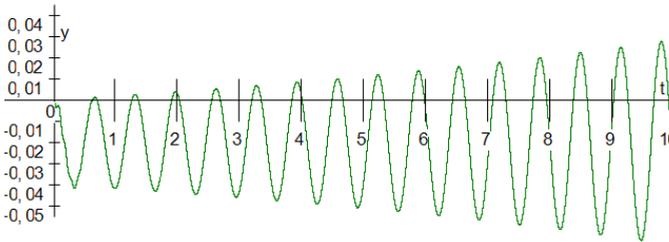
На Рис. 9.4 представлены графики рассматриваемого галёркинського приближения при фиксированных  $t_n$ , полученные при тех же значениях коэффициентов.



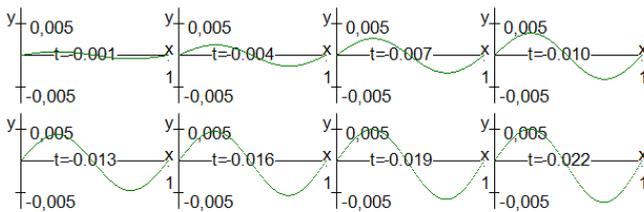
**Рис. 9.4.** График  $w_2(x, t_n)$  при  $a = 1, h = \pi, D = 606,06, P = 100,$   
 $\rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 0,5, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 102500,$   
 $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, h_1(x) = 0,$   
 $h_2(x) = 0,05 \sin 2\pi x$

Изменим в условиях предыдущей задачи скорости потоков  $a$  на  $v^- = 0,8, v^+ = 2$ . График соответствующего второго галеркинського приближения изображен на Рис.

9.5. На Рис. 9.6 показаны соответствующие графики  $w_2(x, t_n) = \sum_{k=1}^2 y_k(t_n) \sin \frac{\pi k x}{a}$  при фиксированных  $t_n$ .



**Рис. 9.5.** График  $w_3(0, 7a; t)$  при  $a = 1, h = \pi, D = 606,06,$   
 $P = 100, \rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 2, v^- = 0,8, P_1 = 100000,$   
 $P_2 = 102500, \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)},$   
 $h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,05 \sin 2\pi x$



**Рис. 9.6.** График  $w_2(x, t_n)$  при  $a = 1, h = \pi, D = 606,06, P = 100,$   
 $\rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 2, v^- = 0,8, P_1 = 100000, P_2 = 102500,$   
 $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, h_1(x) = 0,$   
 $h_2(x) = 0,05 \sin 2\pi x$

Очевидно, что при данном наборе исходных данных динамика упругого элемента является неустойчивой.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научного проекта №18-41-730015

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. В. Агеев, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова, “Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной”, *Тр. МАИ*, **78** (2014), 1–13.
2. Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова, А. В. Христофорова, “Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании”, *Динамика систем, механизмов и машин*, **3:1** (2016), 350–354.
3. E. Askari, K. H. Jeong, M. Amabili, “Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface”, *Journal of Sound and Vibration*, **332:12** (2013), 3064–3085.
4. R. T. Fall, D. Derakhshan, “Flow-induced vibration of pipeline on elastic support”, *Procedia Engineering*, **14:1** (2011), 2986–2993.
5. G. N. Gatica, N. Heuer, S. Meddahi, “Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D”, *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, **30:4** (2014), 1211–1233.
6. K. Kontzialis, K. Moditis, M. P. Paidoussis, “Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions”, *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, **139:3** (2017), 1–8.
7. K. Moditis, M. Paidoussis, J. Ratigan, “Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow”, *Journal of Fluids and Structures*, **63** (2016), 120–139.
8. П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов, “Динамическая устойчивость деформируемых элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки*, **22:1** (2018), 96–115.
9. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УЛГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
10. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УЛГТУ, Ульяновск, 2013, 322 с.
11. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, *Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, СГУ, Саратов, 1994, 176 с.

12. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1987, 688 с.
13. К. Флетчер, *Численные методы на основе метода Галёркина*, Мир, М., 1988, 143 с.
14. N.I. Ereemeeva, P.A. Velmisov, “Numerical method for solving of a problem about oscillations of viscoelastic plates in subsonic stream of gas”, *Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, 2002, 344–355.
15. N.I. Ereemeeva, P.A. Velmisov, “Numerical solution of a problem about oscillations of viscoelastic plates under aerohydrodynamical action”, *Bulletin Scientific University din Pitesti, Romai - Mathematics and Informatics Seria*, **9** (2003), 349–358.
16. Н. К. Калиткин, *Численные методы*, Наука, М., 1978, 512 с.
17. П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов, Е. П. Семенова, “Динамическая устойчивость нелинейных аэроупругих систем”, *Автоматизация процессов управления*, **4(50)** (2017), 48–58.
18. П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов, “О динамической устойчивости нелинейной аэроупругой системы”, *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика.*, **23** (2018), 3–19.
19. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219:1** (2016), 14–26.
20. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Mathematical modelling of dynamics and stability of elastic elements of vibration devices”, *Proceeding of 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems*, **48:11** (2015), 970–975.

Поступила 20.10.2019

MSC2010 76E99

## Dynamics of viscoelastic element of flow channel

© N. I. Eremeeva<sup>1</sup>, P. A. Velmisov<sup>2</sup>

**Abstract.** We consider the plane problem of aerohydroelasticity on small oscillations arising during bilateral flow around a viscoelastic element located on the rectilinear wall of an infinite channel. A mathematical model describing the problem in a linear formulation and corresponding to small perturbations of homogeneous subsonic flows and small deflections of a viscoelastic element is formulated. Using the methods of the theory of functions of a complex variable, the solution of the problem is reduced to the study of the integro-differential equation with partial derivatives with respect to the deflection function of the element. To solve this equation, a numerical method based on the application of the Bubnov-Galerkin method is proposed, followed by the reduction of the resulting system of integro-differential equations to the Volterra vector equation of the second kind. On the basis of the developed numerical method the computer simulation of the dynamics of the deformable element is carried out.

**Key Words:** Aerohydrodynamic impacts, viscoelastic element, aerohydroelasticity, integro-differential equation, Bubnov-Galerkin method, Volterra vector equation of the second kind, theory of complex variable function

### REFERENCES

1. R. V. Ageev, L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. A. Popova, "Movement of viscous fluid in a flat channel formed by a vibrating die and a hinged plate", *Trudy MAI*, 2014, no. 78, 1–13 (In Russ.).
2. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. A. Popova, A. V. Xristoforova, "Mathematical modeling of the dynamics of interaction of a highly viscous fluid with the walls of a channel mounted on an elastic base", *Dinamika sistem, mexanizmov i mashin*, **3:1** (2016), 350–354 (In Russ.).
3. E. Askari, K. H. Jeong, M. Amabili, "Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface", *Journal of Sound and Vibration*, **332:12** (2013), 3064–3085.
4. R. T. Fall, D. Derakhshan, "Flow-induced vibration of pipeline on elastic support", *Procedia Engineering*, **14:1** (2011), 2986–2993.
5. G. N. Gatica, N. Heuer, S. Meddahi, "Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D", *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, **30:4** (2014), 1211–1233.
6. K. Kontzialis, K. Moditis, M. P. Paidoussis, "Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions", *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, **139:3** (2017), 1–8.

---

<sup>1</sup>**Nina I. Eremeeva**, Associate Professor Department of Higher Mathematics, Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute of the National Research Nuclear University MEPhI (294 Kuibyshev str., Dimitrovgrad, 433351, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6160-2572>, NIEremeeva@mephi.ru

<sup>2</sup>**Petr A. Velmisov**, Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk state technical University (32 North Crown str., Ulyanovsk, 432027, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

7. K. Moditis, M. Paidoussis, J. Ratigan, “Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow”, *Journal of Fluids and Structures*, **63** (2016), 120–139.
8. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, “Dynamic stability of deformable structural elements under supersonic flow regime”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki*, **22**:1 (2018), 96–115.
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, [*Dynamics and stability of elastic plates under Aero-hydrodynamic influence*], Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2009 (In Russ.), 220 p.
10. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachax dinamicheskoy ustojchivosti deformiruemyx elementov konstrukcij pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii [Mathematical modeling in problems of dynamic stability of deformable structural elements under Aerohydrodynamic influence]*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2013 (In Russ.), 322 p.
11. P. A. Velmisov, Yu. A. Reshetnikov, [*Stability of viscoelastic plates under Aerohydrodynamic influence*], Saratov State University, Saratov, 1994 (In Russ.), 176 p.
12. M. A. Lavrent'ev, B. V. Shabat, [*Methods of the theory of functions of a complex variable*], Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 688 p.
13. K. Fletcher, [*Numerical methods based on the Galerkin method*], Mir Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 143 p.
14. N. I. Eremeeva, P. A. Velmisov, “Numerical method for solving of a problem about oscillations of viscoelastic plates in subsonic stream of gas”, *Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, 2002, 344–355.
15. N. I. Eremeeva, P. A. Velmisov, “Numerical solution of a problem about oscillations of viscoelastic plates under aerohydrodynamical action”, *Bulletin Scientific Universitatea din Pitesti, Romai – Seria Matematica si Informatica*, **9** (2003), 349–358.
16. N. K. Kalitkin, [*Numerical methods*], Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 512 p.
17. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, E. P. Semenova, “Dynamic stability of nonlinear aeroelastic systems”, *Avtomatizaciya processov upravleniya*, **4(50)** (2017), 48–58 (In Russ.).
18. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, “On the dynamic stability of a nonlinear aeroelastic system”, *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika*, **23** (2018), 3–19 (In Russ.).
19. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:1 (2016), 14–26.
20. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Mathematical Modelling of Dynamics and Stability of Elastic Elements of Vibration Devices”, *Proceeding of 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems*, **48**:11 (2015), 970–975.

Submitted 20.10.2019