

УДК 681.5.075

Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений

© А. Н. Кувшинова¹

Аннотация. В статье рассматривается задача динамической идентификации смешанных граничных условий для одномерной модели конвективно-диффузионного переноса по данным зашумленных измерений искомой функции. С помощью метода конечных разностей осуществляется переход от исходной модели с уравнением в частных производных к дискретной линейной динамической системе с зашумленными мультисенсорными измерениями, в которую граничные условия входят в качестве неизвестного вектора входных воздействий. Для решения поставленной задачи применяется алгоритм одновременного оптимального оценивания векторов состояния и входных воздействий. Приводятся результаты численных экспериментов, показывающие практическую применимость предложенного подхода.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, граничные задачи, дискретная линейная стохастическая система, параметрическая идентификация, оптимальное оценивание

1. Введение и постановка задачи

В последние десятилетия в различных областях науки и техники наблюдается возросший интерес к обратным задачам для уравнений в частных производных, связанный с необходимостью разработки новых методов решения прикладных проблем, требующих обработки и интерпретации экспериментальных данных [1]. Среди различных типов обратных задач важную роль в приложениях играют граничные обратные задачи, связанные с определением поведения искомой функции на границе рассматриваемой области.

Одним из важных классов моделей, широко используемых при описании природных и техногенных процессов и явлений, являются модели конвективно-диффузионного переноса [2–3]. В простейшем одномерном случае модель конвективно-диффузионного переноса со смешанными граничными условиями первого и третьего рода может быть описана уравнениями (1.1)–(1.4):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad a < x < b, 0 < t < +\infty, \quad (1.1)$$

$$c(x, 0) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.2)$$

$$c(a, t) = f(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(b, t) = -\lambda[c(b, t) - g(t)], \quad 0 < t < +\infty, \quad (1.4)$$

¹Кувшинова Анастасия Николаевна, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова» (430071, Россия, г. Ульяновск, пл. Ленина, д. 4/5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, KUVANulspu@yandex.ru

где $c(x, t)$ — искомая функция; x — пространственная координата; t — время; a, b — границы рассматриваемого отрезка.

Пусть функция $\varphi(x)$ в начальном условии (1.2) задана скорость конвекции v , коэффициент диффузии α в уравнении (1.1) и коэффициент λ в граничном условии (1.4) известны. Рассмотрим задачу динамического (в реальном времени) оценивания значений функций $f(t)$ и $g(t)$, входящих в граничные условия (1.3)–(1.4) по результатам зашумленных измерений значений функции $c(x, t)$ в нескольких точках рассматриваемого отрезка в последовательные моменты времени. Подобные задачи могут возникать на практике, когда измерения значений искомой функции на отдельных участках границы объекта или за ее пределами недоступны или сопряжены с высокими затратами. В отличие от классических постановок нас интересуют не аналитические выражения для функций $f(t)$ и $g(t)$, а оценки их численных значений в дискретные моменты времени.

2. Дискретная линейная динамическая модель

Для решения поставленной задачи перейдем от исходной модели (1.1)–(1.4) к дискретной линейной динамической системе в пространстве состояний с зашумленными измерениями, которая в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_k = F_{k-1}c_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}, \\ z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных воздействий; $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений; шумы $w_k \in \mathbb{R}^q$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ образуют независимые нормально распределенные последовательности с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами $Q \geq 0$ и $R > 0$.

Рассмотрим в плоскости Oxt регулярную сетку с пространственным шагом Δx , временным шагом Δt и узлами (x_i, t_k) :

$$x_i = a + i\Delta x, t_k = k\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots$$

Обозначим $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$ и запишем конечно-разностную схему для (1.1)–(1.4):

$$\frac{c_i^k - c_i^{k-1}}{\Delta t} + v \frac{c_{i+1}^{k-1} - c_{i-1}^{k-1}}{2\Delta x} = \alpha \frac{c_{i+1}^{k-1} - 2c_i^{k-1} + c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2}, \quad (2.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, k = 1, 2, \dots,$$

$$c_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$c_0^k = f^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

$$\frac{c_N^k - c_{N-1}^k}{\Delta x} = -\lambda[c_N^k - g^k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.1) следует, что значение функции $c(x, t)$ в узловой точке k -го временного ряда определяется ее значениями в трех точках $(k-1)$ -го временного ряда:

$$c_i^k = (r_1 + r_2)c_{i-1}^{k-1} + (1 - 2r_2)c_i^{k-1} + (r_2 - r_1)c_{i+1}^{k-1}, \quad (2.5)$$

где $r_1 = \frac{v\Delta t}{2\Delta x}$, $r_2 = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$. Перепишем (2.5) в виде

$$c_i^k = a_1 c_{i-1}^{k-1} + a_2 c_i^{k-1} + a_3 c_{i+1}^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

где $a_1 = r_1 + r_2$, $a_2 = 1 - 2r_2$, $a_3 = r_2 - r_1$.

Положим $a_4 = \frac{1}{1 + \lambda\Delta x}$, $a_5 = \frac{\lambda\Delta x}{1 + \lambda\Delta x}$. Тогда из (2.4) получим:

$$\begin{aligned} c_N^k &= \frac{c_{N-1}^k + \lambda\Delta x g^k}{1 + \lambda\Delta x} = a_4 c_{N-1}^k + a_5 g^k = a_4 (a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_3 c_N^{k-1}) + a_5 g^k = \\ &= a_4 a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_4 a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_4 a_3 c_N^{k-1} + a_5 g^k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Искомая дискретная линейная система может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{array} \right]_{c_k} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccccc} a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 \end{array} \right]}_{F_{k-1}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{array} \right]}_{c_{k-1}} + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_5 \end{array} \right]}_{B_{k-1}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} f^{k-1} \\ g^k \end{array} \right]}_{u_{k-1}}, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left[\begin{array}{c} z_1^k \\ z_2^k \\ \vdots \\ z_m^k \end{array} \right] = H_k \left[\begin{array}{c} c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_n^k \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \zeta_1^k \\ \zeta_2^k \\ \vdots \\ \zeta_m^k \end{array} \right], \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $n = N$ (вектор состояния c_k состоит из всех внутренних узлов пространственной сетки и правой границы); $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица наблюдения; m — количество измеряемых компонент вектора состояния.

Модель (2.8) является детерминированной (шум w_k в объекте отсутствует) дискретной линейной динамической системой с зашумленными измерениями, в которой неизвестные граничные условия входят в двумерный вектор входных воздействий ($r = 2$). Матрица системы $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и матрица входных воздействий $B_k \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ являются постоянными.

Для идентификации неизвестных параметров полученной модели могут быть использованы различные подходы, основанные на методах оптимального оценивания. Например, в работе [4] был использован алгоритм одновременного оптимального оценивания вектора состояния и входных воздействий для оценивания значений искомой функции и коэффициентов разложения граничных условий первого рода по базисным функциям в двумерной задаче теплопроводности.

В работе [5] для определения скорости конвекции в уравнении (1.1) при известных граничных условиях применялись метаэвристические алгоритмы оптимизации критерия идентификации. В работе [6] алгоритм [7] применялся для решения задачи динамической идентификации граничных условий первого рода в модели конвективно-диффузионного переноса. В данной статье предлагается использовать этот алгоритм для динамической идентификации смешанных граничных условий.

3. Алгоритм одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий

Один из первых подходов к оценке вектора входных воздействий в дискретных динамических системах заключался во включении неизвестных входных воздействий в вектор состояния, что предполагает наличие априорной информации о динамике входных воздействий. Работа [7] является развитием результатов, полученных в [8–9], но отличается тем, что в ней предложен рекуррентный фильтр с отдельной оценкой векторов состояния и входных воздействий.

Пусть для любого k выполняется условие

$$\text{rank } H_k B_{k-1} = \text{rank } B_{k-1} = r. \quad (3.1)$$

Обозначим через I_n , I_m , I_p единичные матрицы порядка n , m и p соответственно ($p = m - r$).

Пусть идентификация проводится на отрезке времени $[0, T]$ с шагом дискретизации $\Delta t = \frac{T}{K}$, где K – достаточно большое целое неотрицательное число.

АЛГОРИТМ 1. (С.Джиллинс, Б. Мур [7]).

Для $k = 1, 2, \dots, K$ ВЫПОЛНЯТЬ

НАЧАЛО

1) прогноз c_k и P_k без учета оценки вектора входных воздействий

$$\hat{c}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{c}_{k-1|k-1},$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1},$$

2) оценка вектора входных воздействий u_{k-1}

$$\tilde{R}_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k,$$

$$D_k = H_k B_{k-1},$$

$$M_k = (D_k^T \tilde{R}_k^{-1} D_k)^{-1} D_k^T \tilde{R}_k^{-1},$$

$$\hat{u}_{k-1} = M_k (z_k - H_k \hat{c}_{k|k-1}), \quad (3.2)$$

3) прогноз c_k и P_k с учетом оценки вектора входных воздействий

$$\hat{c}_{k|k}^* = \hat{c}_{k|k-1} + B_{k-1} \hat{u}_{k-1},$$

$$P_{k|k}^* = (I_n - B_{k-1} M_k H_k) P_{k|k-1} (I_n - B_{k-1} M_k H_k)^T + B_{k-1} M_k R_k M_k^T B_{k-1}^T,$$

4) коррекция c_k и P_k

$$\tilde{R}_k^* = (I_m - H_k B_{k-1} M_k) \tilde{R}_k (I_m - H_k B_{k-1} M_k)^T,$$

$$S_k^* = -B_{k-1} M_k R_k,$$

$$\alpha_k = [0 \ I_p] U_k^T \tilde{S}_k^{-1}, \quad (3.3)$$

$$K_k = (P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*) \alpha_k^T (\alpha_k \tilde{R}_k^* \alpha_k^T)^{-1} \alpha_k,$$

$$\hat{c}_{k|k} = \hat{c}_{k|k}^* + K_k (z_k - H_k \hat{c}_{k|k}^*), \quad (3.4)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k}^* - K_k (P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*)^T.$$

КОНЕЦ

В формуле (3.3) матрица \tilde{S}_k такова, что $\tilde{S}_k \tilde{S}_k^T = \tilde{R}_k$, а U_k – ортогональная матрица, составленная из левых сингулярных векторов матрицы $\tilde{S}_k^{-1} H_k B_{k-1}$.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + 2 \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < +\infty, \quad (4.1)$$

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.2)$$

$$c(0, t) = f(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(1, t) = -[c(1, t) - g(t)], \quad 0 < t < +\infty, \quad (4.4)$$

где $c(x, t)$ — концентрация загрязняющего вещества в одномерном потоке, текущем слева направо,

$$f(t) = 4 |2t - [2t + 0.5]|, \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0.25, \\ 2t - 0.5, & 0.25 < t < 0.75, \\ 1, & t \geq 0.75. \end{cases}$$

Условие (4.2) означает, что начальная концентрация вещества равна нулю на всем отрезке, граничное условие (4.3) соответствует периодическому изменению концентрации на левом конце отрезка по закону треугольной волны с периодом 0.5, а граничное условие (4.4) — кусочно-линейному изменению концентрации в окружающей среде на правом конце.

Зададим пространственную сетку с шагом $\Delta x = 0.2$, состоящую из четырех внутренних ($x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8$) и двух граничных ($x_0 = 0, x_5 = 1$) узлов. Шаг Δt с учетом условия сходимости конечно-разностной схемы выберем равным $\frac{\Delta x^2}{4\alpha} = 0.01$.

На рис. 4.1 приведен график решения задачи (4.1)–(4.3) методом конечных разностей для $t \in [0; 1]$ ($k = 1, 2, \dots, 100$).

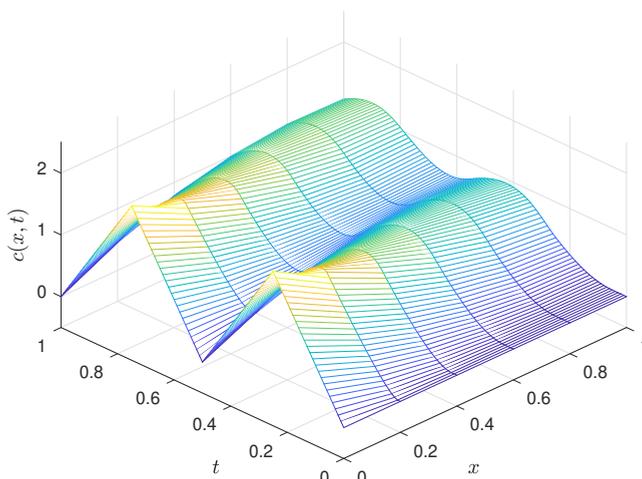


Рис. 4.1. Решение задачи методом конечных разностей

Рассмотрим модель измерений с двумя сенсорами ($m = 2$) в узлах x_1 и x_5 . Заметим, что при такой модели измерений условие (3.1) выполняется. Система (2.8) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \\ c_5^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.4167 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ c_4^{k-1} \\ c_5^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^k \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \\ c_5^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \end{bmatrix}, \\ &k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \tag{4.5}$$

На рис. 4.2 приведены графики зашумленных измерений, на рис. 4.3 – 4.4 – результаты оценивания значений функций $f(t)$ и $g(t)$, а на рис. 4.5 – график оценки решения, полученного алгоритмом 1 с ковариацией шума $R = \text{diag}\{0.02^2, 0.02^2\}$. Заметим, что для рассматриваемой нами модели на каждой итерации алгоритма по формуле (3.2) вычисляется оценка вектора входных воздействий u_{k-1} , состоящего из значения функции $f(t)$ в предыдущий момент времени и значения функции $g(t)$ в текущий момент времени, а по формуле (3.4) получается оценка вектора состояния для текущего момента времени. Таким образом, оценка значений функции $f(t)$ производится с запаздыванием на один такт и на последней итерации алгоритма ее значение оказывается не определено.

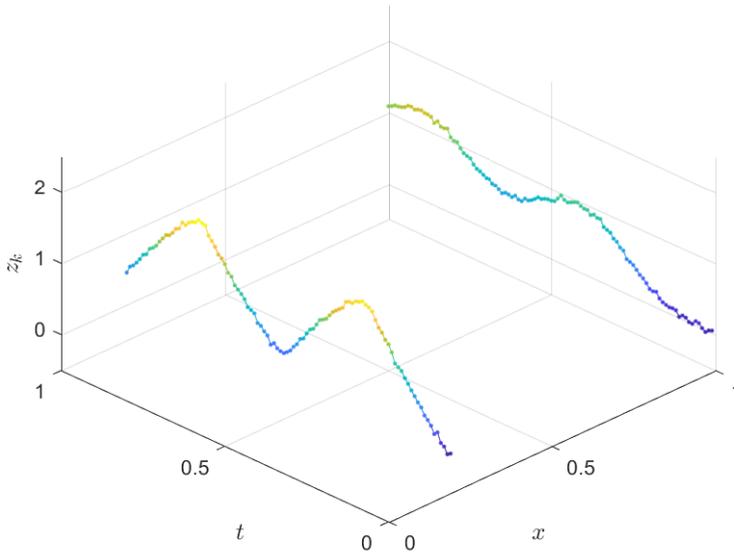
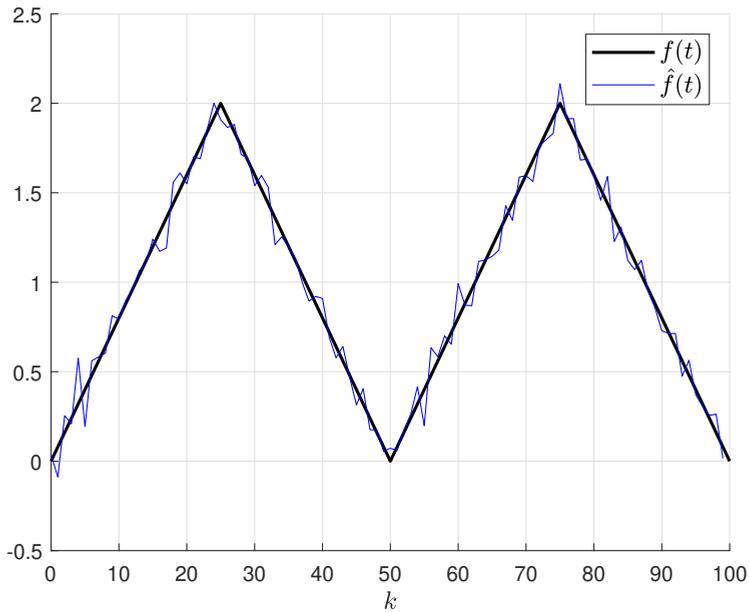
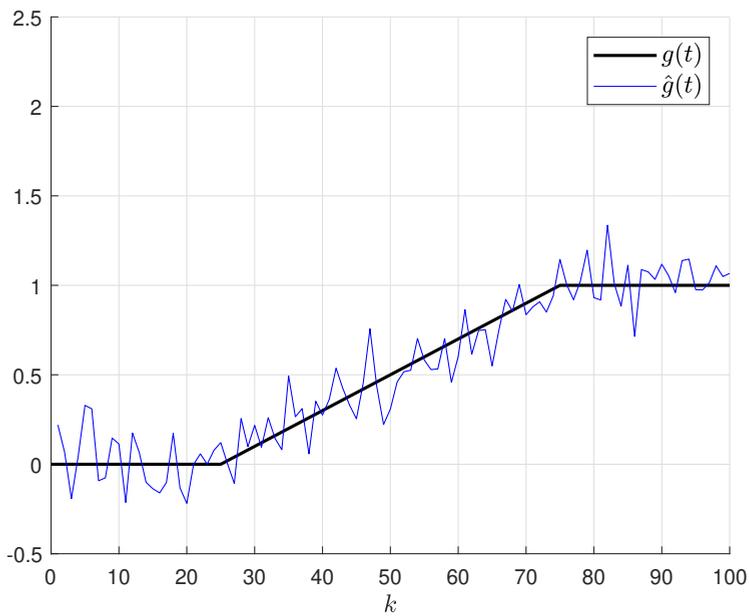


Рис. 4.2. Зашумленные измерения

Рис. 4.3. Оценка $f(t)$ Рис. 4.4. Оценка $g(t)$

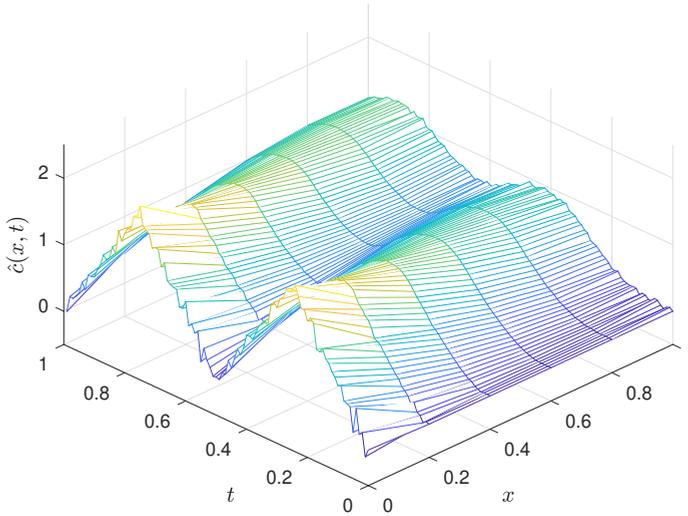


Рис. 4.5. Оценка решения

В таблице 4.1 приведены среднеквадратические ошибки оценивания значений функции $c(x, t)$ в узлах сетки (RMSE_i) и нормализованная среднеквадратическая ошибка (nRMSE_c), а также среднеквадратические ошибки оценивания функции $g(t)$ (RMSE_g) при различных ковариациях шума ($R_1 = \text{diag}\{0.2^2, 0.2^2\}$, $R_2 = \text{diag}\{0.02^2, 0.02^2\}$, $R_3 = \text{diag}\{0.002^2, 0.002^2\}$). Из приведенной таблицы видно, что с уменьшением шума качество идентификации граничных условий возрастает.

Таблица 4.1. Ошибки оценивания

	RMSE_0	RMSE_1	RMSE_2	RMSE_3	RMSE_4	RMSE_5	nRMSE_c	RMSE_g
R_1	0.8187	0.2165	0.0826	0.0481	0.0557	0.2178	0.8814	1.3284
R_2	0.0819	0.0217	0.0083	0.0048	0.0056	0.0218	0.0881	0.1328
R_3	0.0082	0.0022	0.0008	0.0005	0.0006	0.0022	0.0088	0.0133

5. Заключение

В работе предложен новый подход к динамической идентификации смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений, основанный на использовании методов дискретной фильтрации.

Новизна предлагаемого подхода заключается в переходе от исходной модели, описываемой уравнением в частных производных, к дискретной линейной динамической системе, в которой граничные условия представлены как неизвестные входные воздействия, для идентификации которых применяется алгоритм [7].

Дальнейшие исследования будут направлены на развитие предложенного подхода и разработку новых методов решения задач идентификации моделей конвективно-

диффузионного переноса по экспериментальным данным.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научного проекта № 19-41-730009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач : учеб. пособие*, Изд-во МГУ, М., 1994, 208 с.
2. А. И. Леонтьев, *Теория теплообмена : учеб. для машиностроит. спец. техн. ун-тов и вузов*, МГТУ, М., 1997, 683 с.
3. С. Фарлоу, *Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров*, Мир, М., 1985, 384 с.
4. S. Gillijns, B.D. Moor, “Joint state and boundary condition estimation in linear data assimilation using basis function expansion”, *Proceedings of the 26th IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control*, 2007, 458–463.
5. A.V. Tsyganov, Yu.V. Tsyganova, A.N. Kuvshinova, H.R. Tapia Garza, “Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model”, *Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference “Fuzzy Technologies in the Industry – FTI 2018”*, 2018, 188–196.
6. А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова Ю. В., А. Н. Кувшинова, “Динамическая идентификация граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений”, *Сб. тр. V междунар. конф. и молодеж. шк. «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019)* (Самара, 21-24 мая 2019), Новая техника, 169–177.
7. S. Gillijns, B.D. Moor, “Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems”, *Automatica*, **43** (2007), 111–116.
8. P.K. Kitanidis, “Unbiased minimum-variance linear state estimation”, *Automatica*, **23:6** (1987), 775–778.
9. M. Darouach, M. Zasadzinski, “Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs”, *Automatica*, **33:4** (1997). 717–719.

Поступила 15.08.2019

MSC2010 93A30

Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements

© A. N. Kuvshinova¹

Abstract. The paper addresses the problem of dynamic identification of mixed boundary conditions for one-dimensional convection-diffusion transport model based on noisy measurements of the function of interest. Using finite difference method the original model with the partial differential equation is replaced with the discrete linear dynamic system with noisy multisensor measurements in which boundary conditions are included as unknown input vector. To solve the problem, the algorithm of simultaneous estimation of the state and input vectors is used. The results of numerical experiments are presented which confirm the practical applicability of the proposed method.

Key Words: partial differential equations, boundary problems, discrete linear stochastic system, parameter identification, optimal estimation

REFERENCES

1. A. M. Denisov, [*Introduction to the theory of inverse problems: Studies. benefit*], Publishing House of Moscow State University, Moscow, 1994 (In Russ.), 208 p.
2. A. I. Leontyev, [*Theory of heat and mass transfer : studies. for machine building. spets. Techn. universities and higher education institutions*], MGTU, Moscow, 1997 (In Russ.), 683 p.
3. S. Farlou, [*Partial differential equations for scientists and engineers*], Mir, Moscow, 1985 (In Russ.), 384 p.
4. S. Gillijns, B. D. Moor, “Joint state and boundary condition estimation in linear data assimilation using basis function expansion”, *Proceedings of the 26th IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control*, 2007, 458–463.
5. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. N. Kuvshinova, H. R. Tapia Garza, “Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model”, *Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference «Fuzzy Technologies in the Industry – FTI 2018»*, 2018, 188–196.
6. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. N. Kuvshinova, “[Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements]”, [*Proceedings of the V International Conference and Youth School «Information Technologies and Nanotechnologies»*], New technique, 2019, 169–177 (In Russ.).
7. S. Gillijns, B. D. Moor, “Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems”, *Automatica*, **43** (2007), 111–116.

¹Anastasia N. Kuvshinova, postgraduate student of the Department of higher mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov (Lenin square, d. 4/5, Ulyanovsk 432071, Ulyanovsk oblast, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, KUVANulspu@yandex.ru

8. P. K. Kitanidis, “Unbiased minimum-variance linear state estimation”, *Automatica*, **23:6** (1987), 775–778.
9. M. Darouach, M. Zasadzinski, “Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs”, *Automatica*, **33:4** (1997), 717–719.

Submitted 15.08.2019