

УДК 519.7

## О классификации гомоклинических аттракторов трехмерных потоков

© А. О. Казаков<sup>1</sup>, Е. Ю. Каратецкая<sup>2</sup>, А. Д. Козлов<sup>3</sup>, К. А. Сафонов<sup>4</sup>

**Аннотация.** Для трехмерных динамических систем с непрерывным временем (потоков) построена классификация странных гомоклинических аттракторов, содержащих единственное седловое состояние равновесия. Структура и свойства таких аттракторов определяются тройкой собственных чисел состояния равновесия. Для классификации гомоклинических аттракторов применяется метод карт седел, суть которого состоит в построении для широкого класса трехмерных потоков (матрица линеаризации которых записывается в форме Фробениуса) расширенной бифуркационной диаграммы, на которой выделены области, отвечающие различным конфигурациям собственных чисел. В пространстве параметров, задающих линейную часть рассматриваемого класса трехмерных потоков, построены бифуркационные поверхности, ограничивающие область устойчивости состояния равновесия и 6 областей, отвечающих различным гомоклиническим аттракторам следующих типов: аттрактор Шильникова, 2 типа спиральных восьмерочный аттракторов, аттрактор лоренцевского типа, седловой аттрактор Шильникова и аттрактор Любимова-Закса-Ровеллы. Также в работе обсуждаются вопросы, связанные с псевдогиперболичностью гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. Доказано, что псевдогиперболическими могут быть только лишь гомоклинические аттракторы двух типов: лоренцевские аттракторы, содержащие седловое состояние равновесия с двумерным устойчивым многообразием, седловая величина которого положительна; а также седловые аттракторы Шильникова, содержащие седловое состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием.

**Ключевые слова:** странный аттрактор, гомоклиническая траектория, псевдогиперболичность, аттрактор Лоренца, спиральный хаос

### 1. Введение

В настоящей работе приводится классификация странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков – динамических систем с непрерывным временем. Напомним, что гомоклиническим называется странный аттрактор, содержащий седловое состояние равновесия, вместе с его неустойчивым многообразием.

К гомоклиническим аттракторам относятся многие известные странные аттракторы, например, аттрактор Лоренца, спиральный аттрактор, возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусному состоянию равновесия с одномерным неустойчивым

<sup>1</sup>Казаков Алексей Олегович, ведущий научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0002-6553>, [kazakovdz@yandex.ru](mailto:kazakovdz@yandex.ru)

<sup>2</sup>Каратецкая Ефросиния Юрьевна, стажер-исследователь, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3932-9447>, [eyukaratetskaya@gmail.com](mailto:eyukaratetskaya@gmail.com)

<sup>3</sup>Козлов Александр Дмитриевич, младший научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, [kozozloff@list.ru](mailto:kozozloff@list.ru)

<sup>4</sup>Сафонов Клим Андреевич, аспирант, институт информационных технологий, математики и механики, ННГУ им. Н.И. Лобачевского (603950, Россия, г. Н.Новгород, проспект Гагарина, 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8623-4294>, [safonov.klim@yandex.ru](mailto:safonov.klim@yandex.ru)

многообразием [1] (такой, например, как в цепи Чуа [2]), аттрактор Шильникова [3], возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусу с двумерным неустойчивым многообразием и многие другие.

В основе классификации гомоклинических аттракторов лежат свойства состояния равновесия, входящего в аттрактор, определяемые его собственными числами. В зависимости от знаков действительных частей собственных чисел седловые состояния равновесия трехмерных потоков бывают только двух типов:  $(2,1)$  – с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантным многообразием, и  $(1,2)$  – с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Если седловое состояние равновесия обладает парой комплексно сопряженных собственных чисел, то оно называется седло-фокусным. С топологической точки зрения седло-фокусное состояние равновесия локально не отличается от седлового (с действительными собственными числами). Однако, как показано в знаменитой работе Шильникова о счетном числе седловых предельных циклов в любой окрестности петли седло-фокуса [1], с точки зрения динамики седло-фокус принципиально отличается от седла. Другой важной характеристикой седловых состояний равновесия является сумма действительных частей собственных чисел, ближайших к мнимой оси, но лежащих от нее по разную сторону. Такая характеристика, называемая седловой величиной состояния равновесия, определяет сжимаются или растягиваются двумерные площади в окрестности седла. В зависимости от описанных характеристик странные гомоклинические аттракторы могут быть шести различных типов: аттрактор Шильникова – содержит седло-фокус  $(1,2)$ ; восьмерочный спиральный аттрактор, содержит седло-фокус  $(2,1)$  с шильниковской петлей седло-фокуса (когда седловая величина положительна); восьмерочный спиральный аттрактор с петлей седло-фокуса  $(2,1)$ , седловая величина которого отрицательная; аттрактор лоренцевского типа – содержит седло  $(2,1)$  с положительной седловой величиной; аттрактор Любимова-Закса-Ровеллы – содержит седло  $(2,1)$  с отрицательной седловой величиной; и седловой аттрактор Шильникова – содержит седловое состояние равновесия  $(1,2)$ .

Идея классификации гомоклинических аттракторов по типу состояния равновесия была предложена в [4]. В работе [5] эта идея была оформлена в виде метода карт седел и применена для поиска и классификации гомоклинических аттракторов, содержащих неподвижную точку  $O(0, 0, 0)$  трехмерных отображений Эно вида  $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z)$ . Суть метода карт седел заключается в построении в пространстве параметров  $A, B, C$  разбиения на области, отвечающие различным возможным наборам мультипликаторов (собственных чисел) неподвижной точки  $O(0, 0, 0)$ , определяющих различные типы гомоклинических аттракторов. Таким образом, тип гомоклинического аттрактора определяется только лишь значениями параметров  $A, B$  и  $C$ , а их реализация в классе рассматриваемых систем достигается за счет подходящего выбора нелинейной функции  $g(y, z)$ . В работе [6] метод карт седел был также успешно применен для поиска и классификации гомоклинических аттракторов меняющих ориентацию трехмерных отображениях Эно.

В настоящей работе мы применяем метод карт седел для классификации гомоклинических аттракторов, содержащих состояние равновесие  $O(0, 0, 0)$  трехмерных потоков вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y + g_1(x, y, z), \\ \dot{y} = z + g_2(x, y, z), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $A, B$  и  $C$  – параметры системы, а  $g_i, i = 1, 2, 3$  – нелинейные функции, удовлетво-

ряющие соотношениям

$$g_i(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

В разделе 2 в пространстве параметров  $A, B$  и  $C$ , определяющих тип состояния равновесия  $O$ , построена расширенная бифуркационная диаграмма для систем вида (1.1), которая состоит из семи областей, в шести из которых могут возникать гомоклинические аттракторы.

Вторая часть работы (раздел 3) посвящена вопросам псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. Напомним, что к псевдогиперболическим относится широкий класс настоящих хаотических аттракторов, любая траектория которых обладает положительным показателем Ляпунова, и это свойство сохраняется при малых возмущениях (изменении параметров). Определение псевдогиперболичности было введено Тураевым и Шильниковым в [7]. В разделе 3 мы приводим это определение в виде эффективно проверяемых условий, а также описываем численный метод проверки псевдогиперболичности, предложенный нами ранее в работах [8], [9].

Согласно PQ-гипотезе (pseudohyperbolic or quasiattractor), сформулированной в работе [8], все странные аттракторы могут быть разделены на псевдогиперболические и квазиаттракторы. В отличие от псевдогиперболических аттракторов, хаотическая динамика квазиаттракторов не является устойчивой к малым возмущениям (изменению параметров). Такие аттракторы либо содержат устойчивые периодические траектории высоких периодов с малыми бассейнами притяжения, не уловимые при проведении экспериментов (в т.ч. численных), либо такие траектории появляются при сколь угодно малых возмущениях [10].

В настоящей работе мы показываем, что в трехмерных потоках псевдогиперболическими могут быть лишь аттракторы лоренцевского типа и седловые аттракторы Шильникова. Кроме того, с помощью численных методов мы демонстрируем псевдогиперболичность несимметричного аттрактора лоренцевского типа, а также подтверждаем тот хорошо известный факт [11], что восьмерочный спиральный аттрактора в системе Арнеодо-Калле-Трессе [12] является квазиаттрактором. Отметим, что существует целый ряд систем, демонстрирующих псевдогиперболические аттракторы лоренцевского типа. Однако какие-нибудь примеры псевдогиперболических седловых аттракторов Шильникова на данный момент нам не известны.

## 2. Метод карты седел и возможные типы гомоклинических аттракторов

Заметим, что матрица линеаризации системы (1.1) в состоянии равновесия  $O(0, 0, 0)$  записывается в форме Фробениуса

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Важно отметить, что с помощью линейной замены к виду (2.1) можно свести довольно широкий класс трехмерных потоков. Для более точной формулировки этого утверждения воспользуемся следующим алгебраическим фактом. Напомним, что минимальным многочленом матрицы  $M$  называется многочлен  $p(x) = x^m + p_{m-1}x^{m-1} \dots + p_1x + p_0$  наименьшей возможной степени, удовлетворяющий тождеству

$$p(M) = M^m + p_{m-1}M^{m-1} \dots + p_1M + p_0E = 0.$$

Из линейной алгебры известен следующий критерий приводимости матрицы к форме Фробениуса.

**Предложение 2.1** (критерий Гантмахера, [13]) *Квадратная матрица  $M$  размера  $n \times n$  приводится к форме Фробениуса*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

тогда и только тогда, когда степень  $t$  минимального многочлена  $p(x)$  матрицы  $M$  совпадает с размерностью  $n$  этой матрицы.

В частности, данному критерию удовлетворяют матрицы, собственные значения которых различны, так как в этом случае минимальный многочлен совпадает с характеристическим многочленом.

Несложно проверить, что характеристический полином матрицы вида (2.2) равен

$$\chi(\lambda) = \lambda^n - A_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - A_1\lambda - A_0.$$

В частности, для системы (1.1) характеристическое уравнение матрицы линеаризации состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  имеет вид:

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A. \quad (2.3)$$

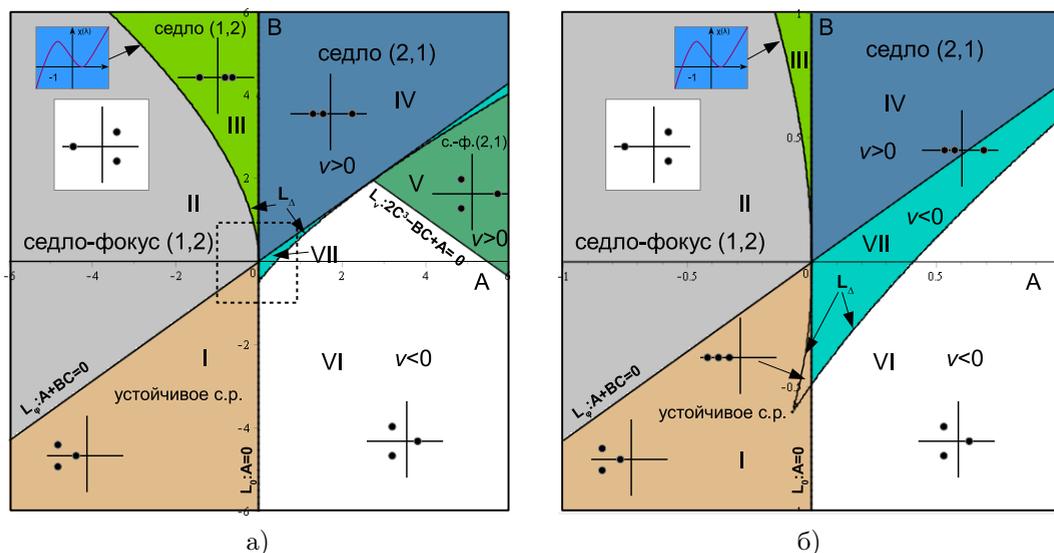
Значительную роль при описании и классификации гомоклинических аттракторов играет тип состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. В связи с этим классификация странных аттракторов, предлагаемая в настоящей работе, основана на типе состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$ , который в свою очередь определяется корнями характеристического уравнения (2.3). При записи матрицы линеаризации в форме Фробениуса связь между параметрами системы и типом состояния равновесия получается наиболее простой, что позволяет эффективно применять метод карты седел и определять тип гомоклинического аттрактора.

Идея метода карты седел заключается в построении расширенной бифуркационной диаграммы в области параметров  $(A, B, C)$  для состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$ . На бифуркационной диаграмме выделяются области, соответствующие различным наборам наборам корней характеристического уравнения (2.3), а именно, учитываются следующие условия:

- V1) Расположение собственных значений относительно мнимой оси: является ли точка  $O$  устойчивой или седловой типа (2,1) или (1,2) (первый индекс соответствует размерности устойчивого многообразия, а второй - неустойчивого).
- V2) Являются ли собственные значения вещественными или комплексными, тем самым различаются седла и седло-фокусы.
- V3) В случае седловой точки типа (2,1) важен также знак его седловой величины  $\nu$ , равной сумме действительных частей устойчивого и неустойчивого собственных значений, ближайших к мнимой оси.

Далее мы найдем условия для параметров  $(A, B, C)$ , определяющие границы областей с различными наборами характеристических корней, и построим двумерные

расширенные бифуркационные диаграммы на плоскости  $(A, B)$  при фиксированном значении  $C$ . Отметим, что параметр  $C$  равен значению дивергенции векторного поля (1.1) в точке  $O(0, 0, 0)$ . Поэтому всюду далее мы будем полагать  $C < 0$ , что является необходимым условием для того, чтобы состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$  принадлежало аттрактору. Стоит отметить, что расширенная бифуркационная диаграмма не зависит от выбора нелинейных функций  $g_i(x, y, z)$ , поэтому полученные нами результаты являются универсальными для систем вида (1.1). Данную расширенную бифуркационную диаграммы мы будем называть *картой седел* и в следующем параграфе опишем принцип ее построения.



**Рис. 2.1.** Карты седел при  $C = -1.4$ : а) карта седла для состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  системы (1.1); б) увеличенный фрагмент карты седла в окрестности точки  $(0, 0)$  на плоскости параметров  $(A, B)$

### 2.1. Построение карты седел

Для начала найдем соотношения на коэффициенты  $(A, B, C)$ , соответствующие границам областей карты седел. Обозначим  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  корни характеристического уравнения (2.3). Нас интересуют следующие граничные условия:

- существование характеристического корня, лежащего на мнимой оси:  $Re \lambda_i = 0$ ;
- существование пары кратных корней:  $\lambda_i = \lambda_j$ ;
- обнуление седловой величины:  $\nu = 0$ .

Соответствующие аналитические соотношения на коэффициенты  $(A, B, C)$  представлены в следующей лемме.

**Л е м м а 2.1** *Условия (2.4) разбивают пространство параметров  $(A, B, C)$  на несколько областей, границы которых определяются поверхностями:*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & L_{\Delta} : -4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 = 0 \quad (\lambda_1 = \lambda_2), \\
 (b) \quad & L_0 : A = 0 \quad (\lambda = 0), \\
 (c) \quad & L_{\phi} : A + BC = 0 \quad (\lambda_{1,2} = \pm i\omega \text{ при } A < 0, \lambda_1 = -\lambda_2 \text{ при } A > 0) \\
 (d) \quad & L_{\nu} : 2C^3 - BC + A = 0, A > -C^3 \quad (\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega, \lambda_3 = \gamma, \\
 & \text{где } \gamma > 0, \omega > 0)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

**Доказательство.** Первое уравнение представляет собой дискриминантную поверхность, которая разделяет пространство параметров на области, в которых характеристическое уравнение (2.3) имеет один действительный и два комплексных корня, и область, в которой все корни являются действительными. На границе между этими областями уравнение (2.3) имеет кратный корень, т.е. существует число  $\lambda_*$ , для которого выполняются равенства

$$\begin{aligned}
 \chi(\lambda_*) &= \lambda_*^3 - C\lambda_*^2 - B\lambda_* - A = 0 \\
 \chi'(\lambda_*) &= 3\lambda_*^2 - 2C\lambda_* - B = 0.
 \end{aligned}$$

Вычислив из второго уравнение возможные значения  $\lambda_{\pm}$

$$\lambda_{\pm} = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 3B}}{3}$$

и подставив в первое уравнение, получим поверхность 2.4а.

При условии 2.4б  $A = 0$  одним из корней характеристического уравнения (2.3) является  $\lambda = 0$ . Учитывая, что система (1.1) при любых значения параметров имеет состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$ , то этот момент соответствует так называемой бифуркации трансляции, при котором равновесие сохраняется, но меняет свой тип за счет перехода собственного значения через ноль.

Третья поверхность 2.4с отвечает условию  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ . Действительно, в этом случае последний корень характеристического полинома равен  $\lambda_3 = C$ , что эквивалентно равенству

$$\chi(C) = -BC - A = 0.$$

Отметим, что при  $A < 0$  условие (с), соответствует наличию у состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  пары чисто мнимых собственных значений  $\pm i\omega$ . Последнее означает, что при переходе через эту кривую (с) происходит бифуркация Андронова-Хопфа (в общем случае из этого состояния равновесия рождается предельный цикл, устойчивый или седловой, это зависит от нелинейностей). При этом само состояние равновесия меняет свой тип с асимптотически устойчивого в обл. I на седло-фокус типа (1,2) в обл. II. Поверхность  $A = -BC$  соответствует седловому состоянию равновесия  $O(0, 0, 0)$  с набором собственных значений  $\lambda_3, -\lambda_1, \lambda_1$ , где  $\lambda_3 < -\lambda_1 < 0 < \lambda_1$ . В этом случае условие 2.4с задает поверхность обнуления седловой величины  $\nu = 0$ .

Последнее уравнение 2.4d является условием равенства седловой величины нулю для состояния равновесия типа седло-фокус. В этом случае состояние равновесия  $O$  имеет собственные значения  $\lambda_{1,2} = C \pm i\omega$  и  $\lambda_3 = -C$  (т.е.  $O$  – это седло-фокус типа (2,1)). Таким образом, должны выполняться условия

$$\chi(-C) = 2C^3 - BC + A = 0, A > C^3.$$

Последнее неравенство гарантирует то, что собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  являются комплексными.

Доказательство завершено.

На рис. 2.1 на плоскости  $(A, B)$  построены кривые, представленные в лемме 2.1, при фиксированном значении  $C = -1.4$ . Данными кривыми плоскость параметров разбивается на следующие 7 областей:

1. **Область I.** Данная область определяется неравенствами:  $A < 0, CB + A > 0$ . Здесь точка  $O$  является асимптотически устойчивым состоянием равновесия.
2. **Область II.** Данная область определяется неравенствами:  $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 < 0, A < 0, CB + A < 0$ . Здесь точка  $O$  является седло-фокусом  $(1,2)$ . Соответственно, ожидаемый здесь странный гомоклинический аттрактор – это аттрактор Шильникова, сценарий возникновения которого хорошо известен, см. [3].
3. **Область III.** Определяется неравенствами:  $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 > 0, A < 0$ . В данной области точка  $O$  является седлом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Существование странных гомоклинических аттракторов в данной области также возможно. Однако, поскольку у седла имеется неведущее неустойчивое собственное значение, то вдоль соответствующего направления траектории могут легко покинуть окрестность седла. Поэтому существование странного гомоклинического аттрактора, который можно назвать седловым аттрактором Шильникова, можно ожидать лишь для значений параметров вблизи границы между областями II и III.
4. **Область IV.** Данная область задается неравенствами:  $0 < A < -CB$ . В этой области точка  $O$  является седлом типа  $(2,1)$  с седловой величиной  $\nu > 0$ . Возникновение гомоклинического аттрактора здесь связано с образованием гомоклинических восьмерок седла. Однако, если неустойчивые сепаратрисы седла входят в него, касаясь ведущего устойчивого направления с разных сторон (обычная гомоклиническая восьмерка), то аттрактора нет, поскольку каждая из гомоклинических петель является неустойчивой на соответствующем  $C^1$ -гладком глобальном центральном инвариантном многообразии (в силу того, что  $\nu > 0$ ). Существование аттрактора можно ожидать только в случае, когда у седла появляется гомоклиническая восьмерка-бабочка, то есть когда аттрактор является аттрактором лоренцевского типа. При этом такой аттрактор в случае системы (1.1) не является, вообще говоря, симметричным, так как сама система не обладает симметрией вида  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ , характерной для системы Лоренца.<sup>5</sup>
5. **Область V.** Определяется следующими неравенствами:  $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 < 0, A > 0, 2C^3 - CB + A > 0$ . В этой области точка  $O$  является седло-фокусом типа  $(2,1)$  с  $\nu > 0$ . Соответственно, здесь можно ожидать существование *спирального аттрактора*, даже симметричного, поскольку система (1.1) может допускать центральную симметрию (в случае когда нелинейности являются нечетными функциями координат).
6. **Область VI.** Задается неравенствами:  $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 < 0, A > 0, 2C^3 - CB + A < 0$ . Здесь точка  $O$  является также седло-фокусом  $(2,1)$ , но

<sup>5</sup>Однако, интересно, что саму систему Лоренца можно привести к виду (1.1), но соответствующая линейная замена координат разрушает ее симметрию. Соответственно, область IV следует рассматривать как область (потенциального) существования *несимметричного аттрактора Лоренца*, содержащего состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$ .

уже с  $\nu < 0$ . Как показано в [14], здесь из петли сепаратрисы седло-фокуса рождается устойчивая периодическая орбита. Тем не менее в этой области также могут возникать странные гомоклинические аттракторы, сложная хаотическая динамика которых, по всей видимости, образуется за счет существования отделенного от петли седло-фокуса нетривиального гиперболического множества (счетного числа седловых периодических орбит), сохраняющегося в аттракторе при переходе от  $\nu > 0$  к  $\nu < 0$ .

7. **Область VII.** Данная область задается неравенствами:  $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 > 0$ ,  $A > 0$ ,  $A + CB > 0$ . В этой области точка  $O$  является седлом типа (2,1) с  $\nu < 0$ . Здесь можно ожидать, например, появление гомоклинических аттракторов Любимова-Закса-Ровеллы [15], [16], то есть гомоклинических аттракторов похожих на аттрактор Лоренца, но содержащих седловое состояние равновесия с отрицательной седловой величиной.

Дальше мы покажем, что данное разбиение на области качественно не меняется и при изменении параметра  $C < 0$ , то есть справедлив следующий результат.

**Теорема 2.1** *Для системы дифференциальных уравнений вида (1.1) расширенная бифуркационная диаграмма (карта седел) состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  на плоскости параметров  $(A, B)$  при любом фиксированном  $C < 0$  состоит из 7 областей, соответствующих различным наборам собственных значений точки  $O$ , выделенных на основе условий  $B1)$ – $B3)$ .*

**Доказательство.** На рис. 2.1 показано, что при  $C = -1.4$  карта седел состоит из 7 областей. Докажем, что данное разбиение сохраняется при изменении параметра  $C < 0$ . Основная идея заключается в том, что в системе (1.1) заменой координат и времени коэффициент  $C$  можно сделать равным  $-1$ .

Действительно, проведем следующую замену

$$x_{new} = |C|^2 \cdot x, \quad y_{new} = |C| \cdot y, \quad z_{new} = z, \quad \tau = |C| \cdot t.$$

В новых координатах, полагая  $C < 0$ , система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_{new} = y_{new} + |C| \cdot g_1(x, y, z), \\ \dot{y}_{new} = z_{new} + g_2(x, y, z), \\ \dot{z}_{new} = A \cdot |C|^{-3} x_{new} + B \cdot |C|^{-2} y_{new} - z_{new} + |C|^{-1} \cdot g_3(x, y, z), \end{cases}$$

Несложно заметить, что при данной замене координат тип состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  не меняется и преобразование вида

$$\tilde{A} = A \cdot |C|^{-3}, \quad \tilde{B} = B \cdot |C|^{-2}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между расширенной бифуркационной диаграммой на плоскости  $(A, B)$  для произвольного значения  $C$  и бифуркационной диаграммой на плоскости  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  при  $C = -1$ . Таким образом, показана эквивалентность карт седел для различных значений параметра  $C < 0$ , что и завершает доказательство теоремы 2.1.

**Доказательство завершено.**

### 3. О методах проверки псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков

В данном разделе мы дадим определение псевдогиперболического аттрактора, а также покажем, что в классе систем вида (1.1) псевдогиперболические гомоклинические аттракторы, содержащие точку  $O$ , могут существовать только в областях IV и V расширенной бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 2.1 Гомоклинические аттракторы в областях II, III, VI и VII относятся к классу квазиаттракторов.

Определение псевдогиперболического аттракторов было дано в работе [7]. Далее приведем это определение в виде эффективно проверяемых условий, см. также [8], [9].

**О п р е д е л е н и е 3.1** *Аттрактор  $A$   $n$ -мерного  $C^r$  гладкого потока  $F$ ,  $r \geq 1$ , называется псевдогиперболическим если для него выполняются следующие условия.*

- 1) *Для каждой точки  $x$  аттрактора  $A$  существует разложение касательного пространства  $T_x$  на прямую сумму двух линейных подпространств,  $T_x = E^{cu}(x) \oplus E^{ss}(x)$  ( $\dim E^{cu} = k$ ,  $\dim E^{ss} = n - k$ ), инвариантных относительно дифференциала  $DF$  потока:*

$$DF_t E^{cu}(x) = E^{cu}(F_t(x)), \quad DF_t E^{ss}(x) = E^{ss}(F_t(x)),$$

для любого  $t \geq 0$  и любой точки  $x \in A$ .

- 2) *Подпространства  $E^{cu}(x)$  и  $E^{ss}(x)$  зависят непрерывно от точки  $x \in A$ .*
- 3) *Разложение на подпространства  $E^{cu}$  и  $E^{ss}$  является доминантным, т.е., существуют такие константы  $C > 0$  и  $\beta > 0$  что*

$$\|DF_t(x)|_{E^{ss}}\| \cdot \|(DF_t(x)|_{E^{cu}})^{-1}\| \leq C e^{-\beta t}$$

для любого  $t \geq 0$  и любого  $x \in A$ . (Это означает, что любое возможное сжатие в  $E^{cu}(x)$  слабее любого сжатия в  $E^{ss}(x)$ , а любое возможное растяжение в  $E^{cu}$  сильнее любого растяжения в  $E^{ss}$ ).

- 4) *Дифференциал потока  $DF$  в ограничении на  $E^{cu}$  экспоненциально растягивает  $k$ -мерные объемы, т.е., существуют константы  $C > 0$  и  $\sigma > 0$ , такие что*

$$\det(DF_t(x)|_{E^{cu}}) \geq C e^{\sigma t}$$

для любого  $t \geq 0$  и любой точки  $x \in A$ .

Условия 1, 3 и 4 данного определения проверяются с помощью расчета спектра показателей Ляпунова  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$  аттрактора. При этом условия 1 и 3 означают, что  $\Lambda_k > \Lambda_{k+1}$ , условие растяжение объемов 4 равносильно соотношению  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_k > 0$ . Для проверки условия 2 требуется расчет ляпуновских векторов.

Для любого хаотического аттрактора трехмерного потока выполняются следующие условия на показатели Ляпунова:

- $\Lambda_1 > 0$  – аттрактор является хаотическим;
- $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$  – сжимаются трехмерные объемы.

Таким образом, условия 1 и 3 выполняются автоматически.

В трехмерных потоковых системах для псевдогиперболических аттракторов удобно полагать, что  $E^{ss}$  отвечает подпространству экспоненциально сильного сжатия. Тогда подпространство  $E^{ss}$  является одномерным ( $\dim E^{ss} = 1$ ), а подпространство растяжения объемов  $E^{cu}$  – двумерным ( $\dim E^{cu} = 2$ ).

Из условия 2 непрерывности разложения на подпространства  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  следует, что в окрестности седлового состояния равновесия  $O$  двумерные площади должны растягиваться, т.е.  $\Lambda_1(O) + \Lambda_2(O) > 0$ . Это означает, что либо седловая величина состояния равновесия должна быть положительной, либо у состояния равновесия должны быть два корня с положительными действительными частями. Таким образом, псевдогиперболические аттракторы не могут возникать в областях I, V, VI, VII. Спиральные аттракторы Шильникова трехмерных потоков (когда у состояния равновесия  $O$  имеется пара комплексно сопряженных собственных чисел с положительной действительной частью) также не могут быть псевдогиперболическими, так как вблизи петли седло-фокуса в этом случае неизбежно возникают устойчивые периодические траектории [11].

**Т е о р е м а 3.1** Пусть трехмерный поток вида (1.1) имеет странный псевдогиперболический аттрактор, содержащий состояние равновесия  $O$  при некотором  $C < 0$ . Тогда параметры  $A$  и  $B$  должны принадлежать только одной из областей III или IV.

Проверка условий 2 непрерывности подпространств  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  выполняется с помощью расчета ляпуновских векторов, отвечающих сильному сжатию и, соответственно, растяжению объемов [8], см. также [9], [17]. Для непрерывности  $E^{ss}$  подпространства необходимо, чтобы угол  $d\varphi$  между любыми парами векторов в  $E^{ss}$  был малым для любых близких точек  $x$  и  $y$ , лежащих на аттракторе (теоретически,  $d\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow y$ ). Вместо проверки непрерывности  $E^{cu}$  удобно проверять непрерывность вектора  $v^{cu}$ , ортогонального к  $E^{cu}$ , используя тот же подход, что для проверки непрерывности  $E^{ss}$  [8]. Далее подробнее опишем эти процедуры.

Работа метода проверки непрерывности  $E^{ss}$  состоит из двух этапов. Первый этап стандартный: производится расчет набора показателей Ляпунова  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  для проверки условий 1, 3 и 4 определения псевдогиперболическости. В процессе расчета набора показателей Ляпунова мы сохраняем набор точек  $\{x_n\}$ , где  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 1, \dots, k$ , вдоль траектории аттрактора. На втором этапе мы рассчитываем максимальный показатель Ляпунова для системы в обратном времени, двигаясь вдоль траектории  $\{x_n\}$ , полученной на первом этапе. Отметим, что использование набора точек  $\{x_n\}$  является необходимым условием работы алгоритма, так как очевидно, что если мы возьмем любую точку на аттракторе и начнем итерировать, то ее обратные итерации рано или поздно покинут его окрестность, и мы можем потерять информацию об аттракторе.

Заметим, что максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций исходной системы совпадает с минимальным показателем Ляпунова  $\Lambda_3$ , взятым со знаком минус. В свою очередь минимальный показатель Ляпунова  $\Lambda_3$  отвечает за сильное сжатие на аттракторе. На втором этапе работы алгоритма, помимо расчета  $\Lambda_3$ , мы находим и запоминаем направление векторов  $E^{ss}(x_n)$ , отвечающих этому сжатию.

По окончании работы алгоритма строится график на плоскости  $(dx, d\varphi)$ , где  $dx$  – расстояние между любыми двумя точками  $x_i$  и  $x_j$  в наборе  $\{x_n\}$ , а  $d\varphi$  – угол между соответствующими этим точкам векторами  $E^{ss}(x_i)$  и  $E^{ss}(x_j)$ . Если исследуемый аттрактор является псевдогиперболическим, то поле  $E^{ss}(x_n)$  является непрерывным, а огибающая точек на соответствующем графике касается вертикальной оси  $d\varphi$  только в начале координат. Таким образом, если построенный график удовлетворяет такому

свойству, мы делаем вывод, что сильно сжимающее подпространство  $E^{ss}$  непрерывно зависит от точки, а исследуемый аттрактор, с большой вероятностью, является псевдогиперболическим. С другой стороны, если огибающая набора точек на построенной диаграмме пересекает ось  $d\varphi$  в нескольких точках или же между этой огибающей и осью  $d\varphi$  нет видимого промежутка, исследуемый аттрактор определенно является квазиаттрактором. Для проверки непрерывности вектора  $v^{cu}$  применяется аналогичная процедура, только при этом расчет траектории на аттракторе осуществляется только в прямом времени, а ляпуновский вектор, отвечающий максимальному показателю Ляпунова вычисляется для транспонированной матрицы в вариациях в обратном времени, см. [8]. Также в этой работе отмечено, что непрерывность  $E^{ss}$  влечет за собой непрерывность  $E^{cu}$ , поэтому далее мы будем проверять лишь непрерывность подпространства  $E^{ss}$ .

Далее продемонстрируем работу метода проверки непрерывности  $E^{ss}$  на примере восьмерочного спирального квазиаттрактора и несимметричного аттрактора Лоренца.

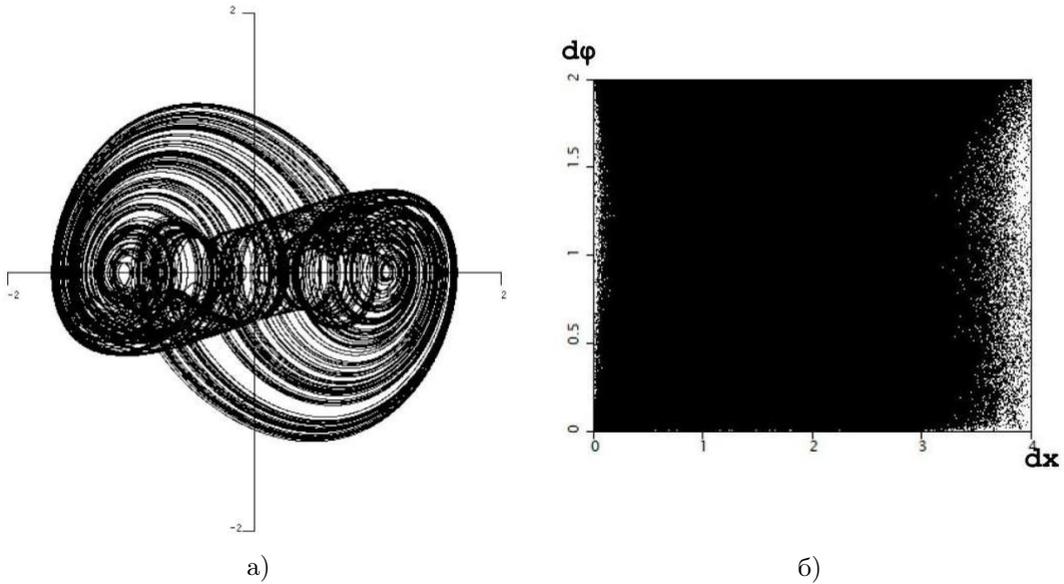
### 3.1. Восьмерочный спиральный аттрактор в системе Арнеодо-Калле-Трессе

В качестве системы, демонстрирующей спиральный аттрактор, содержащей седло-фокусное состояние равновесия типа (2,1), существование которого возможно в области  $V$  карты седел, рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = Ax + By - 0.4z - 0.5x^3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Наличие странных аттракторов в рассматриваемой системе было установлено в работе [12]. В работе Арнеодо-Калле-Трессе [18] было показано, что хаотическая динамика в рассматриваемой системе связана с возникновением шильниковской петли седло-фокуса. По всей видимости именно эти работы обратили внимание ученых на Западе на открытие Шильниковым спирального хаоса [1].

На рисунке 3.1a изображен спиральный аттрактор системы (3.1) при  $(A, B) = (0.612, -1)$ . При выбранных значениях параметров численно установлено, что седло-фокус  $O$  вместе с петлей сепаратрисы принадлежит аттрактору. А значит рассматриваемому аттрактору также принадлежит нетривиальное гиперболическое множество, существующее в любой окрестности петли седло-фокуса. Согласно работе [11], в любой окрестности петли седло-фокуса существуют устойчивые периодические орбиты, а значит рассматриваемый аттрактор относится к классу квазиаттракторов и не может быть псевдогиперболическим, что хорошо согласуется с результатами проверки рассматриваемого аттрактора на непрерывность подпространства  $E^{ss}$ . Соответствующий график изображен на рис. 3.1b. Огибающая точек на этом графике практически не отделена от вертикальной оси  $dx = 0$ , что означает отсутствие непрерывности поля сильно устойчивых направлений  $E^{ss}$ .



**Рис. 3.1.** а) Спиральный аттрактор системы (3.1) при значениях параметров  $A = 0.612$ ,  $B = -1$ ,  $C = -0.4$ ; б) результаты проверки непрерывности подпространства  $E^{ss}$ .

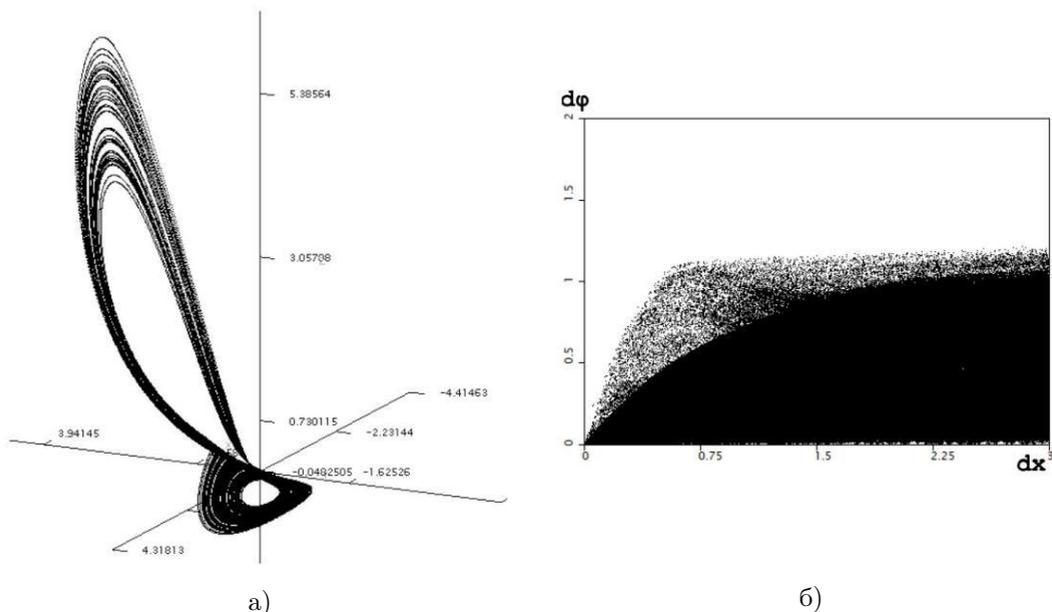
### 3.2. Система с несимметричным аттрактором Лоренца

Заметим, что система вида (2.1) не обладает характерной лоренцевской симметрией  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ . Поэтому, в общем случае, гомоклинические аттракторы, содержащие седловую точку  $O$ , при параметрах из области IV (рис. 1.1), относятся к классу несимметричных аттракторов лоренцевского типа [19].

С помощью перебора нам не удалось подобрать функции  $g_1, g_2, g_3$ , при которых в системе вида (2.1) существует несимметричный аттрактор Лоренца. Для построения соответствующий системы мы воспользовались теоремой 2. и с помощью линейных замен свели классическую систему Шимицу-Мориока к виду (2.1). После чего, в полученной системе, отбросили некоторые члены, разрушив симметрию возникновения петель. В результате преобразований получается система

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (0.2xy + 0.3xz + 0.5y^2 + 1.2yz + 0.7z^2) \\ \dot{y} = z + (-0.1x^2 - 0.6xy - 0.7xz + 0.3y^2 + 0.6yz + 0.4z^2) \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + (0.1x^2 + 0.5xy + 0.6xz - 0.3y^2 - 0.7yz - 0.4z^2). \end{cases} \quad (3.2)$$

Подробнее с результатами исследования полученной системы можно ознакомиться по работе [17]. На рисунке 3.2а изображен портрет аттрактора при параметрах  $(A, B, C) = (0.42, 0.58, -1.4)$ . Собственные числа состояния равновесия  $O$  при этих параметрах:  $\lambda_1 = 0.57, \lambda_2 = -0.32, \lambda_3 = -1.64$ , то есть седловая величина положительная ( $\nu = 0.25 > 0$ ). Таким образом, все необходимые условия псевдогиперболичности аттрактора выполняются. Для проверки условия непрерывности подпространства  $E^{ss}$  воспользуемся описанным выше методом. Соответствующий график изображен на рис. 3.2б. Огибающая точек на представленном графике касается вертикальной оси  $dx = 0$  только лишь в точке  $(0, 0)$ , что говорит о непрерывности подпространства сжатия направлений  $E^{ss}$ , а значит о псевдогиперболичности обнаруженного аттрактора.



**Рис. 3.2.** а) Несимметричный аттрактор Лоренца системы (3.2) при значениях параметров  $A = 0.42, B = 0.58, C = -1.4$ ; б) результаты проверки непрерывности подпространства  $E^{ss}$ .

#### 4. Заключение

В настоящей работе предложена классификация странных гомоклинических аттракторов по типу седлового состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. Показано, что в общем случае, таких аттракторов может быть шесть типов: аттрактор Шильникова, восьмерочный спиральный аттрактор, восьмерочный спиральный аттрактор с отрицательной седловой величиной, седловой аттрактор Шильникова, аттрактор лоренцевского типа, аттрактор Любимова-Закса-Ровеллы. Показано, что к классу настоящих хаотических (псевдогиперболических) аттракторов может относиться только лишь аттрактор Лоренца. Остальные аттракторы обязательно являются квазиаттракторами по Афраймовичу-Шильникову.

Аналогичный подход может быть применен для построения классификации гомоклинических аттракторов четырехмерных потоков. Так как в четырехмерных потоках седловые и седло-фокусные состояния равновесия могут быть трех типов: (3,1), (2,2) и (1,3), здесь будет гораздо больше возможных типов гомоклинических аттракторов. Большое разнообразие возможных гомоклинических аттракторов четырехмерных потоков связано еще с тем, что здесь проявляется еще одна важная характеристика аттрактора – т.н. вторая седловая величина, отвечающая за растяжение трехмерных объемов в окрестности седлового состояния равновесия. Среди новых гомоклинических аттракторов здесь важно отметить возможность возникновения дикого спирального аттрактора Тураева-Шильникова [7], содержащего седло-фокус (3,1) и дикое гиперболическое множество [20] с неустраиваемыми гомоклиническими касаниями.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-11-01041. Результаты численных экспериментов, представленные в разделе 3, выполнены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.П. Шильников, “Об одном случае существования счетного множества периодических движений”, *ДАН СССР*, **160**:3 (1965), 558-561.
2. L.O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, “The double scroll family”, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on.*, **33**(11) (1986), 1072-1118.
3. Л.П. Шильников, *Теория бифуркаций и турбулентность*, Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб./Е. А. Леонтович (отв. ред.) и др., Горький: ГГУ, 1986.
4. Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, **2**, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2009.
5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **337** (2016), 43-57.
6. А.Д. Козлов, “Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:2 (2017), 62-75.
7. Д.В. Тураев, Л.П. Шильников, “Пример дикого странного аттрактора”, *Матем. сб.*, **189** (1998), 137-160.
8. S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev, “Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system”, *arXiv preprint arXiv:1809.07250*, 2018.
9. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, A.D. Kozlov, “Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I Pseudohyperbolic Attractors”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **28**:11 (2018), 291-314.
10. V.S. Aframovich, L.P. Shilnikov, *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph, Boston, Pitmen, 1983.
11. И.М. Овсянников, Л.П. Шильников, “О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса”, *Матем. сб.*, **130**(172):4(8) (1986), 552-570.
12. P. Coulet, C. Tresser, A. Arneodo, “Transition to stochasticity for a class of forced oscillators”, *Physics letters A.*, **72**:4-5 (1979), 268-270.
13. Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Издательство "Наука", Москва, 1966.
14. Л.П. Шильников, “Некоторые случаи рождения периодических движений в  $n$ -мерном пространстве”, *Докл. АН СССР*, **143**:2 (1962), 289-292.
15. D.V. Lyubimov, M.A. Zaks, “Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **9**:1-2 (1983), 52-64.

16. A. Rovella, “The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor”, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **24**:2 (1993), 233-259.
17. А.О. Казаков, А.Д. Козлов, “Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах”, *Журнал СВМО*, **20**:2 (2018), 187-198.
18. P. Coulet, C. Tresser, A. Arneodo, “Possible new strange attractors with spiral structure”, *Communications in Mathematical Physics*, **79**:4 (1981), 573-579.
19. A.L. Shilnikov, L.P. Shilnikov, “On the nonsymmetrical Lorenz model”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **1**:4 (1991), 773-776.
20. S.E. Newhouse, “The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms”, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, **50** (1979), 101-151.

*Поступила 12.10.2019*

MSC2010 34C23, 34D45, 65P20

## On the classification of homoclinic attractors of three-dimensional flows

© A. O. Kazakov<sup>1</sup>, E. Yu. Karatetskaia<sup>2</sup>, A. D. Kozlov<sup>3</sup>, K. A. Safonov<sup>4</sup>

**Abstract.** For three-dimensional dynamical systems with continuous time (flows), a classification of strange homoclinic attractors containing an unique saddle equilibrium state is constructed. The structure and properties of such attractors are determined by the triple of eigenvalues of the equilibrium state. The method of a saddle charts is used for the classification of homoclinic attractors. The essence of this method is in the construction of an extended bifurcation diagram for a wide class of three-dimensional flows (whose linearization matrix is written in the Frobenius form). Regions corresponding to different configurations of eigenvalues are marked in this extended bifurcation diagram. In the space of parameters defining the linear part of the considered class of three-dimensional flows bifurcation surfaces bounding 7 regions are constructed. One region corresponds to the stability of the equilibrium states while other 6 regions correspond to various homoclinic attractors of the following types: Shilnikov attractor, 2 types of spiral figure-eight attractors, Lorenz-like attractor, saddle Shilnikov attractor and attractor of Lyubimov-Zaks-Rovella. The paper also discusses questions related to the pseudohyperbolicity of homoclinic attractors of three-dimensional flows. It is proved that only homoclinic attractors of two types can be pseudohyperbolic: Lorenz-like attractors containing a saddle equilibrium with a two-dimensional stable manifold whose saddle value is positive and saddle Shilnikov attractors containing a saddle equilibrium state with a two-dimensional unstable manifold.

**Key Words:** strange attractor, homoclinic trajectory, pseudohyperbolicity, Lorenz attractor, spiral chaos

<sup>1</sup>**Kazakov Alexey Olegovich**, leading researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia); PhD, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0002-6553>, kazakovdz@yandex.ru

<sup>2</sup>**Karatetskaia Efrosiniia Yuryevna**, intern researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia); PhD, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3932-9447>, eyukaratetskaya@gmail.com

<sup>3</sup>**Kozlov Alexander Dmitrievich**, junior researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, kozzzloff@list.ru

<sup>4</sup>**Safonov Klim Andreevich**, PhD student, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (603950, Russia, N.Novgorod, Gagarin Avenue, 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8623-4294>, safonov.klim@yandex.ru

## REFERENCES

1. L.O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, "The double scroll family", *Circuits and Systems, IEEE Transactions on.*, **33(11)** (1986), 1072-1118.
2. L.P. Shilnikov, "On a case of existence of a countable set of periodic motions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **160:3** (1965), 558-561.
3. L.P. Shilnikov, *Teoriya bifurkatsiy i turbulentnost' [The theory of bifurcations and turbulence]*, Metody kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy: Mezhevuz. sb./E.A. Leontovich (otv. red.) i dr. [Methods of qualitative theory of differential equations], Gorkiy: GGU, 1986.
4. L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, **2**, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, Singapore, 2001.
5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, "Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **337** (2016), 43-57.
6. A.S. Gonchenko, A.D. Kozlov, "On scenarios of chaos appearance in three-dimensional nonorientable maps", *J. SVMO*, **18** (2016), 4.
7. A.D. Kozlov, "Examples of strange attractors in three-dimensional nonoriented maps", *J. SVMO*, **19:2** (2017), 62-75.
8. D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, "An example of a wild strange attractor", *Sb. Math.*, **189** (1998), 291314.
9. S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev, "Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system", *arXiv preprint arXiv:1809.07250*, 2018.
10. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, A.D. Kozlov, "Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I Pseudohyperbolic Attractors", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **28:11** (2018), 291-314.
11. V.S. Aframovich, L.P. Shilnikov, *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph, Boston, Pitmen, 1983.
12. I.M. Ovsyannikov, L.P. Shilnikov, "On systems with homoclinic curves of saddle-focus type", *Mat. Sb.*, **130:4** (1986), 552-570.
13. P. Couillet, C. Tresser, A. Arneodo, "Transition to stochasticity for a class of forced oscillators", *Physics letters A.*, **72:4-5** (1979), 268-270.
14. F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Chelsea Pub. Co., New York, 1959.
15. L.P. Shilnikov, "Some instances of generation of periodic motions in n-space", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **143:2** (1962), 289-292.
16. D.V. Lyubimov, M.A. Zaks, "Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **9:1-2** (1983), 52-64.

17. A. Rovella, “The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor”, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **24**:2 (1993), 233-259.
18. A.O. Kazakov , A.D. Kozlov, “The asymmetric Lorenz attractor as an example of a new pseudohyperbolic attractor of three-dimensional systems”, *Zhurnal SVMO*, **20**:2 (2018), 187–198.
19. P. Coullet, C. Tresser, A. Arneodo, “Possible new strange attractors with spiral structure”, *Communications in Mathematical Physics*, **79**:4 (1981), 573-579.
20. A.L. Shilnikov, L.P. Shilnikov, “On the nonsymmetrical Lorenz model”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **1**:4 (1991), 773-776.
21. S.E. Newhouse, “The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms”, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, **50** (1979), 101-151.

*Submitted 12.10.2019*