DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.430-442

УДК 517.926, 517.986

Об обратимости решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых алгебрах

© **О. Е. Галкин[1], С. Ю. Галкина[2]**

Аннотация. Работа посвящена изучению некоторых свойств линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых алгебрах. В ней найдено (для некоторых типов банаховых алгебр), при какой правой части такого уравнения из обратимости начального условия следует обратимость его решения в любой момент времени. Рассматриваются (ассоциативные) банаховы алгебры над полем действительных или комплексных чисел. Правые части изучаемых уравнений имеют вид $\big[F(t)\big]\big(x(t)\big)$, где $\{F(t)\}$ — непрерывное относительно $t \in \mathbb{R}$ семейство ограниченных операторов на алгебре. Задача состоит в том, чтобы для заданной банаховой алгебры найти все непрерывные семейства ограниченных операторов на ней, сохраняющие обратимость элементов из алгебры. В данной статье эта задача решена лишь для трех случаев. В первом случае алгебра состоит из всех квадратных матриц заданного порядка. Для этой алгебры показано, что все непрерывные семейства операторов, сохраняющие обратимость элементов из алгебры в нуле, должны иметь вид $[F(t)](y) = a(t) \cdot y + y \cdot b(t)$, где семейства $\{a(t)\}$ и $\{b(t)\}$ также непрерывны. Во втором случае алгебра состоит из всех непрерывных функций на отрезке. Для этого случая показано, что все семейства операторов, сохраняющие обратимость элементов из алгебры в любой момент, должны иметь вид $[F(t)](y) = a(t) \cdot y$, где семейство $\{a(t)\}$ также непрерывно. К третьему случаю относятся те банаховы алгебры, в которых обратимы все ненулевые элементы. Например, этим свойством обладают алгебра комплексных чисел и алгебра кватернионов. В этом случае обратимость элементов из алгебры в любой момент сохраняют любые непрерывные семейства ограниченных операторов. Предлагаемое исследование соприкасается с исследованиями основ квантовой механики. Динамика квантовых наблюдаемых описывается уравнением Гейзенберга. Полученные результаты являются косвенным аргументом в пользу того, что известная форма уравнения Гейзенберга — единственно правильная.

Ключевые слова: линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка в банаховых алгебрах, сохранение обратимости решений

1. Введение

Статья посвящена изучению некоторых свойств линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых алгебрах.

Всюду далее $\mathbb{K}$ — это поле вещественных или комплексных чисел; B — (ассоциативная) банахова алгебра над полем $\mathbb{K}$ с единицей E (определение банаховой алгебры

[1]**Галкин Олег Евгеньевич**, доцент кафедры прикладной математики, ФГАОУ ВО « Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); лаборатория топологических методов в динамике, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1634-7792, olegegalkin@ya.ru

[2]**Галкина Светлана Юрьевна**, доцент кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru

можно найти, например, в [1–2]). Операция умножения в B будет обозначаться знаком «$\cdot$». Элемент $y \in B$ называется *обратимым*, если он имеет обратный элемент $y^{-1} \in B$ (см. [2]).

В работе найдено (для некоторых типов банаховых алгебр), при какой правой части линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка из обратимости начального условия следует обратимость решения в любой момент времени.

Для более точной формулировки постановки задачи и полученных результатов далее в разделах 1.1.–1.3. напоминаются некоторые известные факты относительно линейных дифференциальных уравнений в банаховых алгебрах (см., например, [3–4]).

1.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка с правой частью вида $a(t) \cdot x(t)$ или $x(t) \cdot b(t)$

Пусть задано семейство $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ элементов из B, непрерывное относительно t. Тогда можно задать новое двухпараметрическое семейство $\{L_a(t,s)\}_{t,s\in\mathbb{R}}$ элементов из B с помощью следующего ряда:

$$L_a(t,s) = E+\sum_{n=1}^{\infty}\int_s^t a(t_n)\cdot\Big(\int_s^{t_n} a(t_{n-1})\cdot\ldots\cdot\Big(\int_s^{t_3} a(t_2)\cdot\Big(\int_s^{t_2} a(t_1)dt_1\Big)dt_2\Big)\ldots dt_{n-1}\Big)dt_n. \quad (1.1)$$

Непосредственная проверка показывает, что при любом $s \in \mathbb{R}$ семейство $x(t) = L_a(t,s)$, где $t \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = a(t)\cdot x(t)$$

с начальным условием $x(s) = E$. Такое решение единственно (см., например, [3–4]).

Аналогично, если задано семейство $\{b(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ элементов из B, также непрерывное относительно t, то по нему можно построить двухпараметрическое семейство $\{R_a(t,s)\}_{t,s\in\mathbb{R}}$ элементов из B с помощью ряда

$$R_b(t,s) = E+\sum_{n=1}^{\infty}\int_s^t\Big(\int_s^{t_n}\ldots\Big(\int_s^{t_3}\Big(\int_s^{t_2} b(t_1)dt_1\Big)\cdot b(t_2)dt_2\Big)\cdot\ldots\cdot b(t_{n-1})dt_{n-1}\Big)\cdot b(t_n)dt_n.$$

При любом $s \in \mathbb{R}$ семейство $x(t) = R_b(t,s)$, где $t \in \mathbb{R}$, является единственным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t)\cdot b(t)$$

с начальным условием $x(s) = E$.

1.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка в пространстве операторов

Пространство всех линейных ограниченных операторов на B, наделенное равномерной операторной нормой, будет обозначаться через $\mathcal{L}(B,B)$. Это пространство тоже является банаховой алгеброй (см. [2]). Тождественный оператор на B будет обозначаться символом I, а композиция операторов P и Q из $\mathcal{L}(B,B)$ — через $P\circ Q$.

Пусть $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — непрерывное семейство операторов на B из класса $\mathcal{L}(B,B)$. Тогда, в силу сказанного в разделе 1.1., при любом $s \in \mathbb{R}$ единственным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}X(t) = F(t)\circ X(t), \quad t\in\mathbb{R}, \quad (1.2)$$

с начальным условием $X(s) = I$ является семейство операторов $X(t) = L_F(t,s)$, где $t \in \mathbb{R}$, определяемое следующим рядом, аналогичным (1.1):

$$L_F(t,s) = I+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t F(t_n) \circ \left(\int_s^{t_n} F(t_{n-1}) \circ \ldots \circ \left(\int_s^{t_3} F(t_2) \circ \left(\int_s^{t_2} F(t_1) dt_1 \right) dt_2 \right) \ldots dt_{n-1} \right) dt_n.$$

Отсюда вытекает, что для любого начального условия $x^s \in B$ единственным решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt} x(t) = \big[F(t)\big]\big(x(t)\big), \qquad x(s) = x^s, \tag{1.3}$$

является семейство $x(t) = [L_F(t,s)](x^s)$, где $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [3–4]).

1.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка с правой частью вида $a(t) \cdot x(t) + x(t) \cdot b(t)$

Здесь будет рассмотрен важный частный случай, когда в (1.3) операторы $F(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ имеют вид

$$[F(t)](y) = a(t) \cdot y + y \cdot b(t), \quad y \in B, \tag{1.4}$$

где $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — непрерывные семейства элементов из B. В этом случае задача Коши (1.3) примет вид

$$\frac{d}{dt} x(t) = a(t) \cdot x(t) + x(t) \cdot b(t), \qquad x(s) = x^s. \tag{1.5}$$

Как отмечено в разделе 1.2., данная задача при любых $s \in \mathbb{R}$ и $x^s \in B$ имеет единственное решение. Непосредственная проверка показывает, что это решение можно записать в виде

$$x(t) = L_a(t,s) \cdot x^s \cdot R_b(t,s), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Отсюда вытекает, в частности, что единственным решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt} x(t) = a(t) \cdot x(t) - x(t) \cdot a(t), \qquad x(s) = E, \tag{1.7}$$

является семейство $x(t) = L_a(t,s) \cdot R_{-a}(t,s)$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку, очевидно, семейство $x(t) \equiv E$ также является решением задачи (1.7), то $L_a(t,s) \cdot R_{-a}(t,s) = E$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$. Следовательно, при всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполняются равенства $[L_a(t,s)]^{-1} = R_{-a}(t,s)$ и $[R_b(t,s)]^{-1} = L_{-b}(t,s)$. Отсюда и из (1.6) вытекает, что если элемент x^s имеет обратный в B, то при любом $t \in \mathbb{R}$ решение $x(t)$ задачи Коши (1.5) также обратимо. При этом обратный к $x(t)$ элемент имеет вид

$$[x(t)]^{-1} = [R_b(t,s)]^{-1} \cdot (x^s)^{-1} \cdot [L_a(t,s)]^{-1} = L_{-b}(t,s) \cdot (x^s)^{-1} \cdot R_{-a}(t,s).$$

1.4. О семействах операторов, сохраняющих обратимость элементов банаховой алгебры

Определение 1.1 *Пусть B — банахова алгебра, $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — непрерывное семейство операторов из класса $\mathcal{L}(B,B)$.*

1. Говорят, что семейство $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ сохраняет обратимость элементов из B в любой момент, если при любом $s \in \mathbb{R}$ для всякого обратимого элемента $x^s \in B$

решение $\{x(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *задачи Коши* (1.3) *обратимо в* B *(то есть элемент* $x(t)\in B$ *имеет обратный элемент в* B*) при всех* $t\in\mathbb{R}$.

2. Говорят, что семейство $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *сохраняет обратимость элементов из* B *в нуле, если при* $s=0$ *для всякого обратимого элемента* $x^0\in B$ *решение* $x(t)$ *задача Коши* (1.3) *обратимо в* B *при всех* $t\in\mathbb{R}$.

Из этого определения вытекает, что если семейство $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, лежащее в $\mathcal{L}(B,B)$, сохраняет обратимость элементов из B в любой момент, то оно сохраняет обратимость элементов из B и в нуле.

Из сказанного в разделе 1.3. и из определения 1.1 сразу следует предложение:

Предложение 1.1 *Все семейства операторов вида* (1.4)*, где* $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *и* $\{b(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *— непрерывные семейства элементов из* B*, сохраняют обратимость элементов из* B *в любой момент.*

1.5. Актуальность темы

В настоящее время линейные дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах по-прежнему привлекают внимание ученых (см., например, [5–7]).

Предложенное исследование соприкасается с исследованиями основ квантовой механики. Ее основные положения были сформулированы еще в начале XX-го века. Тем не менее, специалисты продолжают изучение вопроса о том, насколько современная форма квантовой механики является единственно возможной или необходимой (см., например, [8–9]). Рассматриваемое в работе свойство сохранения обратимости важно, например, при изучении динамики физических величин в квантовой механике.

Известно (см., например, [10]), что в квантовой механике каждой физической величине (называемой также наблюдаемой) в каждый момент времени t соответствует самосопряженный оператор $X(t)$ на некотором гильбертовом пространстве. В частности, энергии квантовой системы соответствует оператор $\widehat{H}(t)$, называемый квантовым гамильтонианом. Динамика квантовых наблюдаемых $X(t)$ описывается уравнением Гейзенберга, имеющим следующий вид, аналогичный (1.5) (см., например, [10]):

$$\frac{d}{dt}X(t)=\Big(\frac{i}{h}\widehat{H}(t)\Big)\cdot X(t)-X(t)\cdot\Big(\frac{i}{h}\widehat{H}(t)\Big), \tag{1.8}$$

где h — постоянная Планка. Если существует оператор $[X(0)]^{-1}$, то он тоже соответствует некоторой квантовой наблюдаемой. Поэтому важно, чтобы из существования $[X(0)]^{-1}$ следовало существование $[X(t)]^{-1}$ в любой момент времени t. Иначе получится, что физическая величина $[X(t)]^{-1}$ существует в момент $t=0$, но не существует при некотором $t\neq 0$. Опираясь на это требование, можно попробовать обосновать вид уравнения Гейзенберга (1.8), предположив, что динамика квантовых наблюдаемых $X(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}X(t)=\big[F(t)\big]\big(X(t)\big), \tag{1.9}$$

где $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — некоторое семейство линейных операторов, действующих в пространстве квантовых наблюдаемых. При этом из обратимости наблюдаемой $X(0)$ должна следовать обратимость наблюдаемых $X(t)$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Как, в таком случае, должны выглядеть операторы $F(t)$? Теоремы 2.1 и 3.1 являются косвенным аргументом в пользу того, что операторы $F(t)$ должны выглядеть именно так, как в уравнении Гейзенберга (1.8).

1.6. Постановка задачи

Задача состоит в том, чтобы для заданной банаховой алгебры B найти в классе $\mathcal{L}(B,B)$ все непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, сохраняющие обратимость элементов из B (в нуле или в любой момент).

Ввиду предложения 1.1, эта задача эквивалентна следующему вопросу: какие непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B,B)$, кроме семейств вида (1.4), сохраняют обратимость элементов из B (в нуле или в любой момент)?

1.7. Краткая формулировка результатов и перспективы исследований

В данной статье решение задачи, поставленной в предыдущем разделе, найдено лишь для трех случаев.

В первом случае B — это алгебра $M_n(\mathbb{K})$ всех квадратных матриц заданного порядка $n \in \mathbb{N}$ с элементами из $\mathbb{K}$. Для этой алгебры показано (теорема 2.1), что все непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, сохраняющие обратимость элементов из B в нуле, обязательно должны иметь вид (1.4), где семейства $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ тоже непрерывны.

Во втором из рассмотренных случаев B — это банахова алгебра $C([0;1],\mathbb{K})$ всех $\mathbb{K}$-значных непрерывных функций на отрезке $[0;1]$, наделенная равномерной нормой $\|x\|_\infty = \max_{\alpha\in[0;1]} |x(\alpha)|$ (см. [2]). Эта алгебра коммутативна, и в ней обратимы все функции, не обращающиеся в ноль на $[0;1]$. Для этого случая удалось исследовать лишь непрерывные семейства операторов, сохраняющие обратимость элементов из B в любой момент. Показано (теорема 3.1), что все такие семейства должны иметь вид $[F(t)](y) = a(t)\cdot y$, $y \in B$, где семейство $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ элементов из B также непрерывно. Ввиду коммутативности алгебры $C([0;1],\mathbb{K})$ это равносильно тому, что семейства $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ имеют вид (1.4).

К третьему случаю были отнесены те банаховы алгебры, в которых обратимы все ненулевые элементы. Например, такими алгебрами являются алгебра $\mathbb{C}$ комплексных чисел и алгебра $\mathbb{H}$ кватернионов (см., например, [11]). В этом случае обратимость элементов из B в любой момент сохраняют все непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B,B)$, а не только те, которые имеют вид (1.4) (теорема 4.1).

Операторы, соответствующие квантово-механическим наблюдаемым, обычно неограничены. Поэтому для строгого доказательства того, что вид (1.8) уравнений Гейзенберга является единственно правильным, необходимо расширить полученные результаты на случай неограниченных операторов. Помимо этого, видимо, нужно будет ответить на вопрос, как должны выглядеть операторы $F(t)$ в (1.9), чтобы из самосопряженности $X(0)$ следовала самосопряженность $X(t)$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Кроме того, было бы интересно распространить результат теоремы 3.1 на семейства операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, сохраняющие обратимость в нуле.

2. Семейства операторов в пространстве матриц, сохраняющие их обратимость в нуле

Пусть n есть некоторое натуральное число, $\mathbb{K}$ — поле вещественных либо комплексных чисел. Через $M_n(\mathbb{K})$ будет обозначаться банахова алгебра всех квадратных матриц порядка n с обычным матричным умножением и операторной нормой, задаваемой формулой $\|x\| = \sup_{\varkappa\in\mathbb{K}^n, \|\varkappa\|_2=1} \|x\cdot\varkappa\|_2$, где $\|\varkappa\|_2$ — это евклидова норма элемента $\varkappa\in\mathbb{K}^n$.

Теорема 2.1 *Любое непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, сохраняющее обратимость элементов из $M_n(\mathbb{K})$ в нуле, обязательно имеет вид (1.4), где $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — некоторые непрерывные семейства матриц из $M_n(\mathbb{K})$.*

Доказательство. 1) Сначала будет доказано, что если семейство операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ сохраняет обратимость матриц в нуле, то оно сохраняет их обратимость в любой момент. Для этого достаточно показать, что для любого $s\in\mathbb{R}$ и любой обратимой матрицы x^s матрица $[L_F(0,s)](x^s)$ также обратима.

Так как семейство $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ сохраняет обратимость в нуле, то из обратимости матрицы $x^0=[L_F(0,s)](x^s)$ следует обратимость матрицы $x^s=[L_F(s,0)](x^0)$. Отсюда вытекает, что если $\det x^s$ равен нулю, то и $\det x^0=\det[L_F(0,s)](x^s)$ также есть ноль. Величины $\det x^s$ и $\det[L_F(0,s)](x^s)$, как функции от матрицы x^s, являются однородными полиномами степени n от ее элементов x^s_{ij}, где $i,j=1,\ldots,n$. Если взять произвольные индексы $k,m\in\{1,\ldots,n\}$ и поделить $\det[L_F(0,s)](x^s)$ с остатком на $\det x^s$ как полиномы от x^s_{km}, то получится равенство:

$$\det[L_F(0,s)](x^s)=Q_{km}(s,x^s)\cdot\det x^s+P_{km}(s,x^s). \tag{2.1}$$

При каждом $s\in\mathbb{R}$ здесь $Q_{km}(s,x^s)$ — однородная степени 0 рациональная функция от элементов матрицы x^s со знаменателем, не зависящим от x^s_{km}, а $P_{km}(s,x^s)$ — однородная степени n рациональная функция от элементов матрицы x^s, не зависящая от x^s_{km}. Пусть $M_{ij}(x^s)$ означает минор элемента x^s_{ij} при любых $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Определитель $\det x^s$ можно разложить по строке с номером k:

$$\det x^s=(-1)^{k+1}x^s_{k1}M_{k1}(x^s)+\ldots+(-1)^{k+m}x_{km}M_{km}(x^s)+\ldots+(-1)^{k+n}x_{kn}M_{kn}(x^s).$$

Отсюда видно, что при отличном от нуля миноре $M_{km}(x^s)$ можно так подобрать значение x^s_{km}, что $\det x^s$ обратится в ноль. При таком выборе, в силу вышесказанного, станет равным нулю $\det[L_F(0,s)](x^s)$, а также, согласно равенству (2.1), величина $P_{km}(s,x^s)$. Поэтому произведение $M_{km}(x^s)\cdot P_{km}(s,x^s)$ однородных рациональных функций от x^s есть тождественный ноль. Значит, $P_{km}(s,x^s)\equiv 0$, поскольку $M_{k1}(x^s)$ не равно нулю тождественно (это можно доказать по индукции). Теперь из (2.1) следует равенство $\det[L_F(0,s)](x^s)/\det x^s=Q_{km}(s,x^s)$.

Итак, получается, что при любых индексах $k,m\in\{1,\ldots,n\}$ знаменатель отношения $\det[L_F(0,s)](x^s)/\det x^s$ не зависит от x^s_{km}. Следовательно, это отношение вообще не зависит от x^s. Таким образом, верно равенство $\det[L_F(0,s)](x^s)=Q(s)\cdot\det x^s$, в котором $Q(s)\in\mathbb{K}$ при каждом $s\in\mathbb{R}$. Поскольку оператор $L_F(0,s)$ является взаимнооднозначным (см. раздел 1.3.), то $Q(s)$ отлично от нуля. Поэтому если матрица x^s обратима, то матрица $[L_F(0,s)](x^s)$ также обратима.

2) Теперь будет показано, что любое семейство, сохраняющее обратимость элементов из $M_n(\mathbb{K})$ в любой момент, имеет вид (1.4). Для этого будет применен метод от противного. Пусть непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ не представляется в виде (1.4) при каком-либо $s\in\mathbb{R}$. Нужно доказать, что тогда найдутся такая обратимая матрица x^s и такое $t\in\mathbb{R}$, что в момент t решение $x(t)=[L_F(t,s)](x^s)$ задачи Коши (1.3) будет необратимо.

Для любой матрицы $x^s\in M_n(\mathbb{K})$ элементы матрицы $[F(t)](x^s)$ будут обозначаться через $[F(t)](x^s)_{ij}$, где $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Если оператор $F(t)$ имеет вид (1.4), то

$$[F(t)](x^s)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)x^s_{kj}+\sum_{l=1}^{n}x^s_{il}b_{lj}(t).$$

Следовательно, $F(t)$ можно задать формулой (1.4) тогда и только тогда, когда элементы $[F(t)](x^s)_{ij}$, как функции от матрицы x^s, являются линейными комбинациями элементов строки с номером i и столбца с номером j при всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и любом $t \in \mathbb{R}$. Если это не так, то при некоторых $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ и $s \in \mathbb{R}$ в выражение для $[F(s)](x^s)_{pq}$ обязательно войдет линейный член, содержащий элемент x^s_{kl} с индексами $k \neq p$ и $l \neq q$. Без ограничения общности можно считать, что $p = q = 1$ и $k = l = 2$. Таким образом, будет верно равенство:

$$[F(s)](x^s)_{11} = C \cdot x^s_{22} + \theta_{22}(x^s), \tag{2.2}$$

где $C \neq 0$ — некоторая константа из $\mathbb{K}$, а $\theta_{22}(x^s)$ — линейный функционал на $M(\mathbb{K}, n)$, не зависящий от x^s_{22}. Тогда из уравнения (1.3) ввиду непрерывности $F(t)$ получим:

$$x(t) = [L_F(t,s)](x^s) = x^s + \Delta t \cdot \Big([F(s)](x^s) + [\varphi \Delta t)](x^s) \Big), \tag{2.3}$$

где $\Delta t = t - s$ и нормы операторов $\varphi(\Delta t)$ стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$.

Пусть матрица x^s состоит из четырех блоков:

$$x^s = \begin{pmatrix} A_{2\times 2} & 0_{2\times(n-2)} \\ 0_{(n-2)\times 2} & E_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \alpha \Delta t & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Здесь $0_{2\times(n-2)}$ и $0_{(n-2)\times 2}$ — нулевые матрицы соответствующих размеров, E_{n-2} — единичная матрица порядка $(n-2)$, α и β — некоторые числа из $\mathbb{K}$. Тогда, в силу формул (2.2), (2.3) и (2.4), верны равенства

$$x_{22}(t) = \beta + \Delta t \cdot [\psi_{22}(\Delta t)](\alpha, \beta);$$

$$x_{ii}(t) = 1 + \Delta t \cdot [\psi_{ii}(\Delta t)](\alpha, \beta) \quad \text{при} \quad i = 3, \ldots, n;$$

$$x_{ij}(t) = \Delta t \cdot [\psi_{ij}(\Delta t)](\alpha, \beta) \quad \text{при} \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j;$$

$$x_{11}(t) = \Delta t \cdot \Big(\alpha + C \cdot \beta + C_1 + [\psi_{11}(\Delta t)](\alpha, \beta) \Big);$$

где $C \neq 0$ и C_1 — некоторые константы из $\mathbb{K}$, а функции $[\psi_{ij}(\Delta t)](\alpha, \beta)$, линейно зависящие от α и β, стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$ равномерно по α и β из любого ограниченного множества в $\mathbb{K}$. Из последних формул получим, что

$$\det x(s + \Delta t) = \Delta t \cdot \Big(\alpha + C \cdot \beta + C_1 + [\psi(\Delta t)](\beta) \Big),$$

где функция $[\psi(\Delta t)](\beta)$ является аналитической относительно β и при $\Delta t \to 0$ стремится к нулю равномерно по β из любого ограниченного множества в $\mathbb{K}$.

Пусть $\alpha = -C_1 - |C_1| - 2$. Тогда $\alpha \neq 0$, и из предыдущего равенства вытекает:

$$\det x(s + \Delta t) = \Delta t \cdot \Big(C \cdot \beta - |C_1| - 2 + [\psi(\Delta t)](\beta) \Big). \tag{2.5}$$

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то пусть S — окружность радиуса $1/|C|$ с центром в точке $(2 + |C_1|)/C$. Тогда будут иметь место следующие два свойства:

а) для всех $\beta \in S$ выполняется равенство $\big| C \cdot \beta - |C_1| - 2 \big| = 1$;

б) для всех β, находящихся на S или внутри S, верно неравенство $|\beta| \geqslant 1/|C|$.

Число $\Delta t > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы величина $[\psi(\Delta t)](\beta)$ в правой части (2.5) по модулю не превосходила $1/2$ при всех $\beta \in S$. В таком случае из (2.5) в силу теоремы Руше будет следовать, что внутри S найдется такое число β_0, что при $\beta = \beta_0$ величина $\det x(s+\Delta t)$ обратится в ноль. При этом в $\beta_0 \neq 0$ по пункту б).

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ наличие такого числа $\beta_0 \neq 0$ вытекает, в силу выбора числа Δt, из противоположности знаков определителя $\det x(s+\Delta t)$ при $\beta = (2 + |C_1| \pm 1)/C$.

Итак, если взять в качестве x^s обратимую матрицу (2.4), где $\alpha = -C_1 - |C_1| - 2 \neq 0$ и $\beta = \beta_0 \neq 0$, то в момент $t = s + \Delta t$ получится необратимая матрица $x(t)$.

3) Из доказанного в пунктах 1) и 2) вытекает, что любое непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, сохраняющее обратимость элементов из $M_n(\mathbb{K})$ в нуле, должно иметь вид (1.4) для некоторых семейств матриц $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Остается показать, что эти семейства матриц можно выбрать непрерывными.

Поскольку равенство (1.4) выполняется для семейств $a(t)$ и $b(t)$, то оно будет верным также для семейств $\widetilde{a}(t) = a(t) - a_{11}(t)\cdot I$ и $\widetilde{b}(t) - a_{11}(t)\cdot I$, так как единичная матрица I коммутирует со всеми остальными матрицами. При этом для всех $t \in \mathbb{R}$ будет выполнено условие $\widetilde{a}_{11}(t) = 0$. Теперь достаточно доказать, что из этого условия, непрерывности семейства $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и равенства

$$[F(t)](y) = \widetilde{a}(t)\cdot y + y \cdot \widetilde{b}(t), \quad y \in B, \tag{2.6}$$

следует непрерывность семейств $\{\widetilde{a}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{\widetilde{b}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Из непрерывности семейства $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и равенства (2.6) следует, что элементы матрицы $[F(t)](y)$ при любых $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ непрерывны по t и имеют вид

$$[F(t)](y)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{ik}(t) y_{kj} + \sum_{l=1}^{n} y_{il} \widetilde{b}_{lj}(t). \tag{2.7}$$

Пусть для произвольных индексов $p, q \in \{1,\ldots,n\}$ матрица $y \in M_n(\mathbb{K})$ задана так, что все ее элементы равны нулю, кроме одного элемента $y_{pq} = 1$. Тогда при $i = p$ и $j = q$ из равенства (2.7) получится, что $[F(t)](y)_{pq} = \widetilde{a}(t)_{pp} + \widetilde{b}(t)_{qq}$. Так как $\widetilde{a}(t)_{11} \equiv 0$, то отсюда следует непрерывность элементов $\widetilde{b}(t)_{qq}$ при всех $q = 1,\ldots,n$. Поэтому при всех $p = 1,\ldots,n$ элементы $\widetilde{a}(t)_{pp}$ также непрерывны. Если же взять $i = p$, но $j \neq q$, то из (2.7) вытекает, что $[F(t)](y)_{pj} = \widetilde{b}_{qj}(t)$. Следовательно, элементы $\widetilde{b}(t)_{qj}$ непрерывны при всех различных $q, j \in \{1,\ldots,n\}$. Аналогично, при $i \neq p$ и $j = q$ из равенства (2.7) следует непрерывность элементов $\widetilde{a}(t)_{ip}$ при всех различных $i, p \in \{1,\ldots,n\}$.

Итак, все элементы матриц из семейств $\{\widetilde{a}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{\widetilde{b}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ непрерывны, а значит и сами эти семейства непрерывны.

Доказательство завершено.

3. Семейства операторов в пространстве непрерывных функций на отрезке, сохраняющие их обратимость в любой момент

Теорема 3.1 *Пусть B есть банахова алгебра $C([0,1],\mathbb{K})$ всех функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$ и принимающих значения в $\mathbb{K}$, наделенная равномерной нормой $\|x\|_\infty = \max_{\alpha\in[0;1]} |x(\alpha)|$, с поточечным умножением. Тогда любое непрерывное семейство операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B,B)$, сохраняющее обратимость элементов из B в любой момент, обязательно имеет вид*

$$\big[F(t)\big](y) = a(t)\cdot y, \quad y \in B, \tag{3.1}$$

где $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — некоторое непрерывное семейство функций из B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В доказательстве будет применен метод от противного. Пусть при некотором $t = s \in \mathbb{R}$ оператор $F(t)$ нельзя записать в виде (3.1). Нужно показать, что тогда семейство операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ не может сохранять обратимость в каждой точке. Для этого достаточно найти такую обратимую функцию x^s из $C([0,1],\mathbb{K})$, что при некотором $t \in \mathbb{R}$ решение $x(t)$ задачи Коши (1.3) будет необратимым, то есть будет обращаться в ноль хотя бы в одной точке $\alpha \in [0,1]$.

Согласно тереме Рисса (см., например, [12–13]), любой непрерывный линейный функционал на $C([0,1],\mathbb{R})$ можно записать через интеграл Стилтьеса по некоторой функции с ограниченным изменением (вариацией). В то же время, любая функция с ограниченным изменением является разностью двух неубывающих функций ([12]), каждая из которых порождает счетно-аддитивную меру Лебега-Стилтьеса (см. [12]). Таким образом, любой непрерывный линейный функционал на $C([0,1],\mathbb{K})$ можно представить в виде интеграла по некоторой счетно-аддитивной (возможно, комплексной) борелевской мере. Отсюда следует, что существует такое семейство мер $\mu_{t,\alpha}(d\beta)$ (возможно, комплексных) на $[0,1]$, где $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$, что $[F(t)](y)(\alpha) = \int_0^1 y(\beta)\mu_{t,\alpha}(d\beta)$ при любом $y \in B$.

Возможность записать оператор $F(t)$ в виде (3.1) равносильна тому, что семейство мер $\mu_{t,\alpha}(d\beta)$ имеет следующий вид: $\mu_{t,\alpha}(d\beta) = [a(t)](\alpha)\cdot\delta(d\beta-\alpha)$, где $\delta(d\beta-\alpha)$ — это δ-мера на $[0,1]$, сосредоточенная в точке α. В противном случае должны найтись число $s \in \mathbb{R}$, точка $\alpha_0 \in [0,1]$ и подмножество $D \subset [0,1]$, такие что D не содержит точку α_0 и $\mu_{s,\alpha_0}(D) \neq 0$. При этом можно считать, что подмножество D также является отрезком. Тогда, согласно (1.3), будет верно равенство:

$$[x(t)](\alpha_0) = [x^s(t)](\alpha_0) + \Delta t \cdot \Big(\int_0^1 x^s(\beta)\mu_{s,\alpha_0}(d\beta) + [\varphi(\Delta t)](x^s)\Big), \tag{3.2}$$

где $\Delta t = t - s$ и нормы линейных операторов $\varphi(\Delta t)$ стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$.

Для любого $\Delta t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и любого $\gamma \in \mathbb{K}$, такого что $Re(\gamma) > 0$, можно построить непрерывную кусочно-линейную функцию x^s на отрезке $[0;1]$ так, чтобы выполнялись следующие четыре условия:

а) $x^s(\alpha_0) = 2|\Delta t|$;

б) $x^s(\beta) = \gamma$ при $\beta \in D$;

в)$\Big|\int_{\widetilde{D}} x^s(\beta)\mu_{s,\alpha_0}(d\beta)\Big| \leqslant |\Delta t|$, где $\widetilde{D} = [0,1]\setminus(D\cup\{\alpha_0\})$;

г) функция x^s обратима, т. е. не обращается в ноль на $[0,1]$.

Пусть, кроме того, $\operatorname{sign}(\Delta t) = -\operatorname{sign}(\mu_{s,\alpha_0}(D))$. Тогда из (3.2) получим, что

$$[x(s+\Delta t)](\alpha_0) = |\Delta t|\cdot\Big(2 - \gamma\cdot|\mu_{s,\alpha_0}(D)| + [\psi(\Delta t)](\gamma)\Big), \tag{3.3}$$

где функция $[\psi(\Delta t)](\gamma)$ является аналитической относительно γ и при $\Delta t \to 0$ стремится к нулю равномерно по γ из любого ограниченного множества.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то пусть S — окружность радиуса $1/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$ с центром в точке $2/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$. Тогда будут выполняться следующие условия:

а) для всех $\gamma \in S$ имеет место равенство $\big|2 - \gamma\cdot|\mu_{s,\alpha_0}(D)|\big| = 1$;

б) для всех γ, находящихся на S или внутри S, верны неравенства $Re(\gamma) > 0$ и $|\gamma| \geqslant 1/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$.

Число Δt можно выбрать настолько малым по модулю, чтобы величина $\big|[\psi(\Delta t)](\gamma)\big|$ в правой части (3.3) не превосходила $1/2$ при всех $\gamma \in S$. Поскольку внутри S функция $f(\gamma) = 2 - \gamma\cdot|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$ имеет единственный корень, то согласно теореме Руше функция $\Big(2 - \gamma|\mu_{s,\alpha_0}(D)| + [\psi(\Delta t)](\gamma)\Big)$ также имеет внутри S один корень. А это означает, что при некотором значении γ величина $[x(s+\Delta t)](\alpha_0)$ обращается в ноль, то есть функция $x(s + \Delta t)$ необратима.

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ наличие числа $\gamma \in \mathbb{R}$, для которого $[x(s + \Delta t)](\alpha_0) = 0$, следует из противоположности знаков величины $[x(s + \Delta t)](\alpha_0)$ при $\gamma = 1/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$ и при $\gamma = 3/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$.

Непрерывность семейства $\{a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в (3.1) следует из непрерывности семейства $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и равенства $a(t) = [F(t)](1)$, вытекающего из (3.1).
Доказательство завершено.

4. Семейства операторов, сохраняющие обратимость в нуле, в банаховых алгебрах с одним необратимым элементом

В данном параграфе рассматриваются семейства операторов в таких банаховых алгебрах, где единственным необратимым элементом является ноль. К алгебрам такого типа относятся, например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а также алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ с обычной евклидовой нормой.

Теорема 4.1 *Пусть в банаховой алгебре B обратимы все элементы, кроме нулевого. Тогда любое непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B, B)$ сохраняет обратимость элементов из B в любой момент.*

Доказательство. Поскольку все ненулевые элементы из B обратимы, то, с учетом определения 1.1, достаточно при всех $s \in \mathbb{R}$ доказать, что для любого ненулевого элемента $x^s \in B$ решение $x(t) = [L_F(t, s)](x^s)$ задачи Коши (1.3) отлично от нуля при каждом $t \in \mathbb{R}$.

Согласно сказанному в разделе 1.3., при всех $t, s \in \mathbb{R}$ оператор $L_F(t, s)$ имеет обратный оператор $R_{-F}(t, s)$. Поэтому $L_F(t, s)$ переводит в ноль только нулевые элементы. Следовательно, если x^s отлично от нуля, то $x(t) = [L_F(t, s)](x^s)$ также отлично от нуля.
Доказательство завершено.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта ЦФИ в 2019 году и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-07-00782).

Список литературы

1. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Издательство иностранной литературы, М., 1962, 830 с.

2. В. М. Тихомиров, “Банаховы алгебры”, *дополнение в книге: А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976, 513-528.

3. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, М., 1970, 456 с.

4. С. Г. Крейн, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972, 544 с.

5. B. C. Dhage, “A functional integro-differential equation in Banach algebras”, *Functional differential equations*, **11**:3-4 (2004), 321–332.

6. В. П. Деревенский, “ЛОДУ с постоянными коэффициентами над банаховой алгеброй”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 365–380.

7. V. Dragan, T. Morozan, A.-M. Stoica, “Linear differential equations with positive evolution on ordered banach spaces”, *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, Springer, New York, 2013, 39-120.

8. D. Aerts, B. Van Steirteghem, “Quantum axiomatics and a theorem of M. P. Solèr”, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **39**:3 (2000), 497–502.

9. V. Moretti, M. Oppio, “Quantum theory in real Hilbert space: how the complex Hilbert space structure emerges from Poincaré symmetry”, *Rev. Math. Phys.*, **29**:6 (2017), 85 с.

10. Л. Д. Ландау, Л. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989, 768 с.

11. Д. Х. Конвей, Д. А. Смит, *О кватернионах и октавах: об их геометрии, арифметике и симметриях*, МЦНМО, М., 2009, 184 с.

12. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976, 543 с.

13. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982, 272 с.

Поступила 16.10.2019

MSC2010 34G10

On the invertibility of solutions of first order linear homogeneous differential equations in Banach algebras

© **O. E. Galkin**[1], **S. Yu. Galkina**[2]

Abstract. This work is devoted to the study of some properties of linear homogeneous differential equations of the first order in Banach algebras. It is found (for some types of Banach algebras), at what right-hand side of such an equation, from the invertibility of the initial condition it follows the invertibility of its solution at any given time. Associative Banach algebras over the field of real or complex numbers are considered. The right parts of the studied equations have the form $\big[F(t)\big]\big(x(t)\big)$, where $\{F(t)\}$ is a family of bounded operators on the algebra, continuous with respect to $t \in \mathbb{R}$. The problem is to find all continuous families of bounded operators on algebra, preserving the invertibility of elements from it, for a given Banach algebra. In the proposed article, this problem is solved for only three cases. In the first case, the algebra consists of all square matrices of a given order. For this algebra, it is shown that all continuous families of operators, preserving the invertibility of elements from the algebra at zero must be of the form $[F(t)](y) = a(t) \cdot y + y \cdot b(t)$, where the families $\{a(t)\}$ and $\{b(t)\}$ are also continuous. In the second case, the algebra consists of all continuous functions on the segment. For this case, it is shown that all families of operators, preserving the invertibility of elements from the algebra at any time must be of the form $[F(t)](y) = a(t)\cdot y$, where the family $\{a(t)\}$ is also continuous. The third case concerns those Banach algebras in which all nonzero elements are invertible. For example, the algebra of complex numbers and the algebra of quaternions have this property. In this case, any continuous families of bounded operators preserves the invertibility of the elements from the algebra at any time . The proposed study is in contact with the research of the foundations of quantum mechanics. The dynamics of quantum observables is described by the Heisenberg equation. The obtained results are an indirect argument in favor of the fact, that the known form of the Heisenberg equation is the only correct one.

Key Words: first-order linear homogeneous differential equations in Banach algebras, preserving the invertibility of solutions

References

1. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society, Providence, 1957, 830 p.
2. V. M. Tikhomirov, "[Banach algebras]", *[addition to the book: Elements of function theory and functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1976, 513-528 (In Russ.).
3. J. L. Massera, J. J. Schaffer, *Linear differential equations and function spaces*, Academic Press, New York and London, 1966, 404 p.
4. S. G. Krein, *"[Functional analysis]"*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 544 p.
5. B. C. Dhage, "A functional integro-differential equation in Banach algebras", *Functional differential equations*, **11**:3-4 (2004), 321–332.

[1]**Oleg E. Galkin**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia); Senior Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1634-7792, olegegalkin@ya.ru.

[2]**Svetlana Y. Galkina**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru.

6. V. P. Derevenskii, “[Linear ordinary differential equations with constant coefficients over a Banach algebra]”, *Math. Notes*, **84**:3 (2008), 342–355.

7. V. Dragan, T. Morozan, A.-M. Stoica, “Linear differential equations with positive evolution on ordered banach spaces”, *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, Springer, New York, 2013, 39-120.

8. D. Aerts, B. Van Steirteghem, “Quantum axiomatics and a theorem of M. P. Solèr”, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **39**:3 (2000), 497–502.

9. V. Moretti, M. Oppio, “Quantum theory in real Hilbert space: how the complex Hilbert space structure emerges from Poincaré symmetry”, *Rev. Math. Phys.*, **29**:6 (2017), 85 p.

10. L. D. Landau, L. M. Lifshits, *“[Quantum mechanics. Non-relativistic theory]”*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russ.), 768 p.

11. J. H. Conway, D. A. Smith, *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*, A. K. Peters Ltd, Natick, MA, 2004, 184 p.

12. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *“[Elements of function theory and functional analysis]”*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 543 p.

13. L. A. Lyusternik, V. I. Sobolev, *“[Short course of functional analysis]”*, Visshaya shkola Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 272 p.

Submitted 16.10.2019