DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429

УДК 517.956.3

О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения

© **П. Н. Бураго[1], А. И. Эгамов[2]**

Аннотация. Рассматривается вторая начально-краевая задача для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и интегральным оператором. Показана связь ее решения с решением стандартной второй линейной начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Таким образом, нелинейная задача сводится к стандартной линейной задаче, численное решение которой можно получить, например, методом разделения переменных. Для лучшего понимания рассматриваемой задачи, в качестве частных представителей изучаемого класса интегро-дифференциальных уравнений, в статье приведены примеры пяти интегро-дифференциальных уравнений для различных интегральных операторов. Показано применение к ним основной теоремы. Вследствие наложения на интегральный оператор несложного естественного требования в четырех из пяти примерах решение задачи удовлетворяет некоторому фазовому ограничению. Вид каждого из них представляет определенный интерес для дальнейших исследований.

Ключевые слова: вторая начально краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, гиперболическое уравнение.

Введение

Многие математические модели описываются интегро-дифферециальными уравнениями, методы решения которых нетривиальны и, зачастую, индивидуальны [1–9]. В последнее время метод разделения переменных, ранее считавшийся применимым исключительно к линейным уравнениям, с успехом применяется и к некоторым видам нелинейных уравнений в частных производных [10, с. 23-31]. Однако, чаще всего исследователи пытаются найти закономерность между нелинейной задачей и соответствующей ей линейной. Сведение нелинейной задачи к линейной считается существенным шагом на пути к ее решению, так как решение линейной задачи, как правило, известно [11]. Этот подход применен и в настоящей статье. Теорема о связи решений приведена для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений. Затем, в качестве пояснения, представлены пять примеров, в которых рассмотрены частные случаи этого класса. В данной работе использован метод, аналогичный [12–13], сводящий нелинейную задачу к линейному гиперболическому уравнению 2-го порядка с начальными и краевыми условиями.

[1]**Бураго Павел Николаевич,** аспирант кафедры дифференциальных уравнений и математического и численного анализа, ИИТММ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8010-906X, burago.pasha@yandex.ru

[2]**Эгамов Альберт Исмаилович,** старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений и математического и численного анализа, ИИТММ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3630-7237, albert810@yandex.ru

1. Вспомогательные утверждения

Известно [11, 14], что для произвольного $T > 0$ на множестве $\Omega_T = [0,l] \times [0,T]$ существует дважды непрерывно дифференцируемая по своим переменным функция $z(x,t)$ – решение гиперболического уравнения 2-го порядка

$$z''_{tt}(x,t) = z''_{xx}(x,t) + b(x)z(x,t), \tag{1.1}$$

со вторыми краевыми

$$z'_x(0,t) = z'_x(l,t) = 0, \tag{1.2}$$

и начальными условиями

$$z(x,0) = \varphi(x), z'_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.3}$$

где $b(x)$ – непрерывная функция, функции $\varphi(x), \psi(x)$ – достаточно гладкие, см. [14, с. 95], удовлетворяющие условиям связи (1.2). Решение этой задачи единственно и может быть получено, например, методом Фурье.

Обозначим через $P[w]$ – интегральный оператор вида

$$P[w] = \int_0^l F_1(w(x,t), w'_t(x,t), w'_x(x,t))\, dx, \tag{1.4}$$

где F_1 – функция, дважды непрерывно дифференцируемая относительно своих переменных, такая что интеграл существует для любой функции $w(x,t)$, имеющей непрерывные вторые производные по обеим переменным. Введем обозначение $P_w(t) \equiv P[w(x,t)]$ (если имеется в виду производная по переменной t, то будем ставить штрих над оператором, например, $P'_t[w]$).

В случае, если в качестве $w(x,t)$ в (1.4) используется функция $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3), то соответствующую $P[z]$ функцию переменной t будем записывать без индекса: $P(t) \equiv P_z(t)$ или просто P для простоты и удобства записи. В частности, $P(0) = P[z(x,0)] = P[\varphi(x)]$.

Обозначим через $R[w]$ – интегральный оператор вида

$$R[w] = \int_0^l F_2(w(x,t), w'_t(x,t), w'_x(x,t))\, dx, \tag{1.5}$$

где F_2 – функция непрерывная относительно своих аргументов, такая, что интеграл существует для любой функции $w(x,t)$, имеющей непрерывные вторые производные по обеим переменным. Аналогично, введем обозначение $R_w(t) \equiv R[w(x,t)]$.

Пусть функция $\widetilde{q}(t), t \in [0,T]$ – решение задачи Коши для уравнения Риккати

$$\widetilde{q}_t{}'(t) + \widetilde{q}^2(t) = R_w(t),\ \widetilde{q}(0) = 0. \tag{1.6}$$

Фактически, для любой непрерывной функции $R_w(t)$ функция $\widetilde{q}(t)$ существует в некоторой окрестности нуля. В зависимости от функции $R_w(t)$ функция $\widetilde{q}(t)$ может быть как ограниченной на отрезке $[0,T]$, так и неограниченной, различные типы ее поведения рассмотрены в [15, с. 193-204]. Если задана функция F_2 оператора (1.5) правая часть уравнения (1.6) будет представлять некоторую вычисляемую функцию, соответствующую F_2. Нетрудно видеть, что если функции F_2 и $w(x,t)$ заданы, то всегда можно выбрать и зафиксировать $T > 0$ так, чтобы функция $\widetilde{q}(t)$ была ограничена на отрезке $t \in [0,T]$.

2. Теорема о связи решений начально-краевых задач

В статье рассматривается класс интегро-дифференциальных уравнений вида

$$y''_{tt}(x,t) = y''_{xx}(x,t) + b(x)y(x,t) - 2q(t)y'_t(x,t) - R[y]y(x,t), \tag{2.1}$$

с краевыми и начальными условиями

$$y'_x(0,t) = y'_x(l,t) = 0, \tag{2.2}$$

$$y(x,0) = \varphi(x),\ y'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2.3}$$

где непрерывно дифференцируемая функция $q(t)$ – является решением задачи Коши (1.6) при $w(x,t) \equiv y(x,t)$.

Теорема 2.1 *Пусть на отрезке* $[0,T]$ *функция*

$$p(t) = \exp\left(\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau\right) \tag{2.4}$$

существует и удовлетворяет неравенству

$$p(t) \neq 0. \tag{2.5}$$

Тогда на множестве Ω_T *существует единственное решение задачи (2.1)–(2.3), представимое в виде*

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{p(t)}, \tag{2.6}$$

где $z(x,t)$ *является решением задачи (1.1)–(1.3).*

Доказательство. Будем считать, что для данного T функция $q(t)$ существует и непрерывна на отрезке $t \in [0,T]$, тогда вследствие (2.4) $p(t)$ существует, дифференцируема и $p(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Верно и обратное утверждение.

Покажем, что функция $y(x,t)$, удовлетворяющая равенству (2.6) с учетом выражения (2.4), является решением уравнения (2.1). Продифференцируем равенство (2.6):

$$y'_t(x,t) = \left(\frac{z(x,t)}{p(t)}\right)'_t = \frac{z'_t}{p} - \frac{z}{p}\frac{p'_t}{p}.$$

Дифференцируя далее, получим, что

$$y''_{tt}(x,t) = \left(\frac{z'_t}{p} - \frac{z}{p}\frac{p'_t}{p}\right)'_t = \frac{z''_{tt}}{p} - 2\frac{z'_t}{p}\frac{p'_t}{p} - \frac{z}{p}\left(\frac{p''_{tt}}{p} - 2\frac{p'^2_t}{p^2}\right) =$$
$$= \frac{z''_{xx} + b(x)z}{p} - 2\frac{p'_t}{p}\left(\frac{z'_t}{p} - \frac{z}{p}\frac{p'_t}{p}\right) - \frac{z}{p}\frac{p''_{tt}}{p} =$$
$$= y''_{xx}(x,t) + b(x)y(x,t) - 2q(t)y'_t(x,t) - \frac{p''_{tt}}{p}y(x,t).$$

Следовательно, $q(t)$ выражается в виде

$$q(t) = \frac{p'_t(t)}{p(t)}. \tag{2.7}$$

Заметим, что тогда $p_t(0) = q(0) = 0$ и, решая дифференциальное уравнение (2.7), с учетом $p(0) = 1$ – равенства, необходимого для удовлетворения тождества (2.6) при начальных условиях, получим формулу (2.4). Из (2.7) следует, что

$$q'_t(t) + q^2(t) = \frac{p''_{tt}}{p} - \frac{p'^2_t}{p^2} + q^2(t) = \frac{p''_{tt}}{p} - q^2(t) + q^2(t) = \frac{p''_{tt}}{p}.$$

Поэтому, согласно (1.6), если верно равенство

$$R[y] = \frac{p''_{tt}}{p}, \tag{2.8}$$

то функция $y(x,t)$, удовлетворяющая условию (2.6), является решением уравнения (2.1).

Кроме того, выполняются граничные (2.2) условия:

$$y'_x(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z(0,t)}{p(t)}\right) = \frac{z'_x(0,t)}{p(t)} = 0,$$

аналогично $y'_x(l,t) = 0$; и начальные (2.3) условия:

$$y(x,0) = \frac{z(x,0)}{p(0)} = \varphi(x),\ y'_t(x,0) = \frac{z'_t(x,0)}{p(0)} = \psi(x).$$

что и требовалось доказать.

Остается только заметить, согласно (2.8), что функция $p(t)$ – решение задачи Коши

$$p''_{tt} = p(t)\,R[y],\ p(0) = 1,\ p_t(0) = 0. \tag{2.9}$$

Отсюда и из (2.7) следует, что если известна одна из трех функций $p(t)$, $q(t)$ и $R[y]$, то две другие определяются однозначно.

Доказательство завершено.

Следствие 2.1 *Предположим, что для некоторого оператора $R[y]$ существует функция $F_1(w(x,t), w'_t(x,t), w'_x(x,t))$ такая, что оператор $P[z]$, заданный выражением (1.4), удовлетворяет тождеству $P[z] \equiv p(t)$ при $t \in [0,T]$, где $z(x,t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3). Для выполнения начальных условий задачи Коши (2.9), на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ наложены ограничения так, чтобы выполнялись условия*

$$P(0) = 1,\ P'_t(0) = 0. \tag{2.10}$$

Причем, при любом $t \in [0,T]$,

$$P[z] \neq 0. \tag{2.11}$$

Тогда справедлива теорема 2.1 при $P[z] \equiv p(t)$, а выражение (2.6) перепишется в виде

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{P[z]}. \tag{2.12}$$

Доказательство.

Условия (2.10) необходимы, чтоб выполнялись равенства $p(0) = 1$ и $p_t(0) = 0$ (и, соответственно, $q(0) = 0$, см. (2.7)). Неравенство (2.11) при данных предположениях эквивалентно неравенству (2.5).

Доказательство завершено.

Следствие 2.2 *Пусть оператор $P[w]$ является однородным оператором относительно функций переменной t, то есть*

$$P[s(t)w(x,t)] = s(t)P[w(x,t)] \tag{2.13}$$

для любой непрерывной на [0,T] функции $s(t)$ и любой, определенной в Ω_T, непрерывной по своим компонентам функции $w(x,t)$. Выполнены условия следствия 2.1. Функция $y(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с некоторым оператором $R[y]$, соответствующим подобранному оператору $P[z]$, тогда при любом $t \in [0,T]$ выполняется фазовое ограничение:

$$P[y] = 1.$$

Доказательство.

Учитывая, указанные в начальный момент времени условия (2.10), наложенные на начальные функции, согласно формуле (2.6):

$$P[y(x,0)] = P\left[\frac{z(x,0)}{p(0)}\right] = P[z(x,0)] = P(0) = 1.$$

Аналогично, учитывая (2.13), при любом $t \in (0,T]$ выполняется фазовое ограничение:

$$P[y] = P\left[\frac{z}{p}\right] = \frac{1}{P[z]}P[z] = 1.$$

Доказательство завершено.

3. Примеры

Приведем примеры, описанного выше класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида (2.1).

Пример 3.1

Пусть выполнены начальные условия:

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\,dx = 1, \int\limits_0^l \psi(x)\,dx = 0, \tag{3.1}$$

и верно условие

$$\int\limits_0^l z(x,t)\,dx \neq 0, \tag{3.2}$$

при любом $t \in [0,T]$, где $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3).

Пусть

$$R[y] = \int\limits_0^l b(x)y(x,t)\,dx, \tag{3.3}$$

где $y(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3), (3.3). Это решение существует, хотя бы на каком-то отрезке $[0,T_0]$. Непосредственной подстановкой в уравнение Риккати (1.6) с оператором $R[y]$, заданным (3.3), убеждаемся, что решением (1.6) является функция

$$q(t)=\frac{\int_0^l z'_t(x,t)\,dx}{\int_0^l z(x,t)\,dx}, \tag{3.4}$$

где $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3).

Далее, подставляя (3.4) в формулу (2.4), находим

$$p(t)\equiv P[z]=\int_0^l z(x,t)\,dx. \tag{3.5}$$

Из этого равенства понятна формула (3.4), так как $q(t)$ записывается в виде (2.7). Условия (3.1) гарантируют выполнение условий (2.10), а условие (3.2) – эквивалентно неравенству (2.11). Выполнены условия следствия 2.1, поэтому из тождеств (2.6) и (3.5) получим, что на отрезке $[0,T]$ существует единственное решение задачи (2.1)–(2.3), (3.3), которое представляется в виде

$$y(x,t)=\frac{z(x,t)}{\int_0^l z(x,t)\,dx}.$$

Оператор $P[z]$ обладает свойством (2.13), поэтому при любом $t\in[0,T]$ верно равенство:

$$P[y]=\int_0^l y(x,t)\,dx=\int_0^l \frac{z(x,t)}{\int_0^l z(x,t)\,dx}\,dx=1. \tag{3.6}$$

З а м е ч а н и е 3.1

Проверку условия (3.2) в примере 3.1 можно осуществлять следующим образом: решать линейную задачу методом Галеркина [16, с. 59], аналогично [17] посредством разложения функции $z(x,t)$ по системе косинусов [18, с. 474]: $v_k(x)=\cos(\frac{\pi k}{l}x), k=0,1,2....$ Нетрудно видеть, что они удовлетворяют краевым условиям (1.2) линейной задачи и, кроме того, $\int_0^l v_k(x)\,dx=0,\ k=1,2,...$, поэтому

$$\int_0^l z(x,t)\,dx=\int_0^l \sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k(t)v_k(x)\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k(t)\int_0^l v_k(x)=l\xi_0(t),$$

где $\xi_k(t)$ – коэффициенты Галеркина функции $z(x,t)$. Интеграл и сумму можно менять местами в силу [18, с. 635-637], следовательно неравенство (3.2) эквивалентно неравенству $\xi_0(t)\neq 0$ при любом $t\in(0,T]$. Эта проверка представляется менее трудоемкой, чем проверка неравенства (3.2).

Понятно, что для практического применения теоремы 2.1 нахождение функции $p(t)$ является наиболее важной частью решаемой проблемы. Одним из вариантов ее решения является представление функции $p(t)$ в виде оператора $P[z]$ (см. следствие 2.1), так как после нахождения функции $z(x,t)$, задача "вычисления интеграла при известной функции F_1" является менее сложной, стандартной вычислительной задачей. Подбор функции $F_1(z(x,t), z'_t(x,t), z'_x(x,t))$ при произвольной функции $F_2(y(x,t), y'_t(x,t), y'_x(x,t))$ оператора $R[y]$ является нетривиальной задачей, решение которой в общем виде не представляется осуществимым.

Для исследования возможного вида оператора $R[y]$, для задачи (1.6), (2.1)–(2.3), по которому можно найти функцию F_1 и построить соответствующий оператор $P[z]$, легче сначала определить оператор $P[z]$, а затем подобрать функцию $F_2(y(x,t), y'_t(x,t), y'_x(x,t))$ для представления оператора $R[y]$ в виде (1.5). Ниже показывается применение этого метода.

П р и м е р 3.2

Предположим, что для некоторого оператора $R[y]$ удалось подобрать оператор $P[z] \equiv p(t)$ (см. следствие 2.1), причем оператор $P[z]$ задан в виде

$$P[z] = \left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.7}$$

где $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3). Для выполнения условий (2.10) необходимо потребовать, чтобы начальные функции удовлетворяли равенствам

$$\int\limits_0^l \varphi^2(x)\,dx = 1, \int\limits_0^l \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Найдем оператор $R[y]$. Дифференцируя (3.7), получим

$$P'_t[z] = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}} \times \int\limits_0^l 2z(x,t)z'_t(x,t)\,dx = \frac{\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

и, следовательно, согласно (2.7),

$$q(t) = \frac{\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx};$$

из равенства (2.8) оператор

$$R[y] = \frac{P''_{tt}[z]}{P[z]},$$

где функция $y(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с оператором $R[y]$, соответствующим заданному тождеством (3.7) оператору $P[z]$:

$$R[y] = \frac{P''_{tt}[z]}{P[z]} = \frac{1}{P}\frac{d}{dt}\left(\frac{\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{\int\limits_0^l (z(x,t)z''_{tt}(x,t) + z'^2_t(x,t))\,dx}{\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx} - \frac{\left(\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx\right)^2}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^2}. \tag{3.8}$$

Для приведения оператора $R[y]$ к виду (1.5), сделаем следующие преобразования. Заметим, что

$$\int\limits_0^l z(x,t)z''_{tt}(x,t)\,dx = \int\limits_0^l (z(x,t)z''_{xx}(x,t) + b(x)z^2(x,t)\,dx. \tag{3.9}$$

Интегрируя по частям (3.9) и учитывая краевые условия (1.2), получим

$$\int\limits_0^l z(x,t)z''_{xx}(x,t)\,dx = z(x,t)z'_x(x,t)\Big|_0^l - \int\limits_0^l z'^2_x(x,t)\,dx = -\int\limits_0^l z'^2_x(x,t)\,dx. \tag{3.10}$$

Продифференцируем равенство (2.6) при условии (3.7):

$$y_t(x,t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{z(x,t)}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{z'_t(x,t)}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z(x,t)\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{3}{2}}},$$

возведем в квадрат:

$$y_t^2(x,t) = \frac{z'^2_t(x,t)}{\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx} - 2\frac{z(x,t)z'_t(x,t)\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^2} + \frac{z^2(x,t)\left(\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx\right)^2}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^3},$$

далее, интегрируя по переменной x от 0 до l,

$$\int\limits_0^l y_t^2(x,t)\,dx = \frac{\int\limits_0^l z'^2_t(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx} - \frac{\left(\int\limits_0^l z(x,t)z'_t(x,t)\,dx\right)^2}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^2}.$$

Отсюда и из равенств (3.8)–(3.10) получим, что

$$R[y] = \int\limits_0^l (b(x)y^2(x,t) - y'^2_x(x,t) + y'^2_t(x,t))\,dx. \tag{3.11}$$

Из формулы (3.7) и равенства (2.6) следует, что решение исходной нелинейной задачи (2.1)–(2.3), (3.11) связано с решением линейной задачи (1.1)–(1.3) равенством:

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\left(\int\limits_0^l z^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Нетрудно видеть, что оператор $P[z]$, заданный формулой (3.7) обладает свойством (2.13), поэтому при любом $t \in [0,T]$ имеет место фазовое ограничение $P[y] = 1$, равносильное выражению

$$\int\limits_0^l y^2(x,t)\,dx = 1. \tag{3.12}$$

Пример 3.3

Пусть $\beta(x)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,l]$ функция, оператор

$$P[z] = \int\limits_0^l \beta(x)z(x,t)\,dx, \tag{3.13}$$

где $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3); выполняется неравенство (2.11); на начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ наложены условия $\int\limits_0^l \beta(x)\varphi(x)\,dx = 1$, $\int\limits_0^l \beta(x)\psi(x)\,dx = 0$, чтобы выполнялись условия (2.10). Тогда

$$P'_t[z] = \int\limits_0^l \beta(x)z'_t(x,t)\,dx;$$

$$P''_{tt}[z] = \int\limits_0^l \beta(x)z''_{tt}(x,t)\,dx = \int\limits_0^l \beta(x)z''_{xx}(x,t) + \beta(x)b(x)z(x,t)\,dx =$$

$$= (\beta(l)z'_x(l,t) - \beta(0)z'_x(0,t)) - \int\limits_0^l \beta'_x(x)z'_x(x,t)t\,dx + \int\limits_0^l b(x)\beta(x)z(x,t))\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l \beta(x)b(x)z(x,t) - \beta'_x(x)z'_x(x,t)\,dx,$$

согласно краевым условиям (1.2). Таким образом, из (2.8) следует

$$R[y] = \frac{P''_{tt}}{P} = \frac{\int\limits_0^l \beta(x)b(x)z(x,t) - \beta'_x(x)z'_x(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l \beta(x)z(x,t)\,dx} =$$

$$= \int\limits_0^l \beta(x)b(x)y(x,t) - \beta'_x(x)y'_x(x,t)\,dx. \tag{3.14}$$

В этом случае тождество (2.6) запишется в виде:

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\int\limits_0^l \beta(x)z(x,t)\,dx},$$

где $y(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3), (3.14). Оператор (3.13) обладает свойством (2.13), поэтому при любом $t \in [0,T]$ имеет место фазовое ограничение:

$$P[y] = \int\limits_0^l \beta(x)y(x,t)\,dx = 1. \tag{3.15}$$

Пример 3.1 – частный случай примера 3.3 при $\beta(x) \equiv 1$.

Пример 3.4

Приведем пример оператора $P[z]$, не удовлетворяющего условию (2.13). Пусть

$$P[z] = \int\limits_0^l z'_t(x,t)\,dx, \tag{3.16}$$

где $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3). В данном примере положим $b(x) \equiv b$ – константа, пусть к тому же выполнено условие (2.11).

Дифференцируем равенство (3.16)

$$P'_t[z] = \int\limits_0^l z''_{tt}(x,t)\,dx = \int\limits_0^l z''_{xx}(x,t) + bz(x,t)\,dx = z_x(l,t) - z_x(0,t) +$$

$$+ \int\limits_0^l bz(x,t)\,dx = \int\limits_0^l bz(x,t)\,dx; \tag{3.17}$$

$$P''_{tt}[z] = \int\limits_0^l bz'_t(x,t)\,dx. \tag{3.18}$$

Поэтому, из (2.7)–(2.8), (3.16)–(3.18) имеем:

$$q(t) = \frac{P_t'[z]}{P[z]} = \int_0^l by(x,t)\,dx,$$

$$R[y] = \frac{P_{tt}''[z]}{P[z]} = b. \tag{3.19}$$

Допустим, для начальных функций выполнены равенства:

$$P(0) = \int_0^l \psi(x)\,dx = 1;\;\; P_t(0) = \int_0^l \varphi(x)\,dx = 0.$$

Это необходимо для выполнения условий (2.10).

Формула (2.6) запишется в виде:

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\int_0^l z_t'(x,t)\,dx},$$

где $y(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3), (3.19). Уравнение (2.1) перепишется в виде

$$y_{tt}''(x,t) = y_{xx}''(x,t) - 2by_t'(x,t)\int_0^l y(x,t)\,dx.$$

Данный случай интересен тем, что функция $q(t)$ выражается в явном виде, а не задается как решение задачи Коши.

П р и м е р 3.5

Усилим пример 3.2. Пусть

$$P[z] = \left(\int_0^l z^\alpha(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{3.20}$$

где $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3), α – натуральное число; (в примере 3.2 $\alpha = 2$); выполняются условие (2.13) и неравенство (2.11); ограничения на начальные функции (2.10) имеют вид:

$$P(0) = \int_0^l \varphi^\alpha(x)\,dx = 1,\;\; P_t(0) = \alpha\int_0^l \varphi^{\alpha-1}(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Найдем соответствующий оператор $R[y]$. Дифференцируя равенство (3.20), получим:

$$P_t'[z] = \frac{1}{\alpha}\left(\int_0^l z^\alpha(x,t)\,dx\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \times \alpha\int_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'(x,t)\,dx = \frac{\int_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'(x,t)\,dx}{\left(\int_0^l z^\alpha(x,t)\,dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}$$

и, следовательно, согласно равенству (2.7):

$$q(t)=\frac{\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx};$$

а по формуле (2.8) оператор $R[y]$ имеет вид:

$$R[y]=\frac{P_{tt}''}{P}=\frac{1}{P}\frac{d}{dt}\left(\frac{\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'(x,t)\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\right)=$$

$$=\frac{\int\limits_0^l (\alpha-1)z^{\alpha-2}z_t'^2+z^{\alpha-1}z_{tt}''\,dx}{\int\limits_0^l z^{\alpha}\,dx}-(\alpha-1)\left(\frac{\int\limits_0^l z^{\alpha-1}z_t'\,dx}{\int\limits_0^l z^{\alpha}\,dx}\right)^2. \tag{3.21}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^l z^{\alpha-1}z_{tt}''\,dx=\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(z_{xx}''+b(x)z)\,dx=\int\limits_0^l (b(x)z^{\alpha}+z^{\alpha-1}z_{xx}'')\,dx. \tag{3.22}$$

Интегрируя (3.22) по частям и учитывая краевые условия (1.2), получим:

$$\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_{xx}''(x,t)\,dx=z^{\alpha-1}(x,t)z_x'(x,t)\Big|_{(0,t)}^{(l,t)}-(\alpha-1)\int\limits_0^l z^{\alpha-2}(x,t)z_x'^2(x,t)\,dx=$$

$$=-(\alpha-1)\int\limits_0^l z^{\alpha-2}(x,t)z_x'^2(x,t)\,dx. \tag{3.23}$$

Продифференцируем функцию $y(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с оператором $R[y]$, соответствующим заданному формулой (3.20) оператору $P[z]$:

$$y_t'(x,t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{z(x,t)}{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=\frac{z_t'(x,t)}{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}}-\frac{z(x,t)\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}},$$

возведем в квадрат:

$$y_t'^2(x,t)=\frac{z_t'^2(x,t)}{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx\right)^{\frac{2}{\alpha}}}-2\frac{z\,z_t'\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx\right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}}+\frac{z^2\left(\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'\,dx\right)^2}{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha}(x,t)\,dx\right)^{\frac{2\alpha+2}{\alpha}}}.$$

Умножим на $y^{\alpha-2}(x,t)$ и, далее, интегрируя по переменной x от 0 до l, получим

$$\int\limits_0^l y^{\alpha-2}(x,t)y_t'^2\,dx = \int\limits_0^l \left(\frac{z^{\alpha-2}z_t'^2(x,t)}{\int\limits_0^l z^\alpha(x,t)\,dx} - \frac{2z^{\alpha-1}\,z_t' \int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'\,dx}{\left(\int\limits_0^l z^\alpha(x,t)\,dx\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{z^\alpha \left(\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'\,dx\right)^2}{\left(\int\limits_0^l z^\alpha(x,t)\,dx\right)^3 dx} \right) dx = \frac{\int\limits_0^l z^{\alpha-2}z_t'^2(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l z^\alpha(x,t)\,dx} - \frac{\left(\int\limits_0^l z^{\alpha-1}(x,t)z_t'\,dx\right)^2}{\left(\int\limits_0^l z^\alpha(x,t)\,dx\right)^2}.$$

Отсюда и из равенств (3.21)–(3.23) следует, что

$$R[y] = \int\limits_0^l (b(x)y^\alpha(x,t) + (\alpha-1)y^{\alpha-2}(x,t)(y_t'^2(x,t) - y_x^2(x,t))\,dx. \tag{3.24}$$

Нетрудно убедиться, что выражение (3.24) эквивалентно (3.11) при $\alpha = 2$.

Решение исходной нелинейной задачи (2.1)–(2.3), (3.24) связано с решением линейной задачи (1.1)–(1.3) равенством типа (2.12):

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\left(\int\limits_0^l z^\alpha(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

и, так как в данном примере оператор $P[z]$ обладает свойством однородности (2.13), при любом $t \in [0,T]$ имеет место фазовое ограничение $P[y] = 1$, что равносильно равенству

$$\int\limits_0^l y^\alpha(x,t)\,dx = 1. \tag{3.25}$$

Заключение

Приведенные примеры показывают, что исходное интегро-дифференциальное уравнение (2.1) является перспективным для дальнейшего изучения, а полученные в примерах 3.1–3.3, 3.5 фазовые ограничения (3.6), (3.12), (3.15) и (3.25) несомненно представляют определенный интерес. Например, допустимо их использование в теории управления в задачах, где присутствует фазовое ограничение, аналогичное какому-либо из рассмотреных: его автоматическое выполнение можно гарантировать подбором специального управления с обратной связью. Переход от исходных нелинейных задач к линейным и представление решения нелинейной задачи в виде (2.12) позволяет привлечь к их решению метод Фурье или метод Галеркина, и, тем самым, получить численный метод решения для представленного класса задач.

Список литературы

1. М. М. Вайнберг, “Интегро-дифференциальные уравнения”, *Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. 1962. ВИНИТИ. М.*, 1964, 5–37.
2. С. С. Орлов, *Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах*, Изд-во ИГУ, Иркутск, 2014, 150 с.
3. А. А. Самарский, А. П. Михайлов, *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2005, 320 с.
4. А. В. Калинин, С. Ф, Морозов, “О стабилизации решения нелинейной системы переноса излучения в двухуровневом приближении”, *ДАН СССР*, **331**:2 (1990), 343-346.
5. А. В. Калинин, С. Ф, Морозов, “ Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения”, *ЖВМ и МФ*, **30**:7 (1990), 1071-1080.
6. О. А. Кузенков, А. И. Эгамов, “Обобщенная модель Вольтерра для системы с одним хищником и несколькими жертвами”, *III Международная конференция из серии «Нелинейный мир». «Экология. Экологическое образование. Нелинейное мышление».*, Тезисы докладов (г. Воронеж, 1997), 86.
7. О. А. Кузенков, “О свойствах одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега”, *Нелинейная динамика и управление. Вып. 1. Сб. статей / Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина*, 2001, 347-354.
8. О. А. Кузенков, “Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега”, *Дифференциальные уравнения*, **38**:1 (2002), 134-135.
9. О. А. Кузенков, “Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **40**:1 (2004), 24-32.
10. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Метод разделения переменных в математической физике. Учебное издание*, Санкт-Петербург, 2009, 92 с.
11. А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 576 с.
12. О. А. Кузенков, А. И.Эгамов, “Оптимальное управление для одного класса интегро-дифференциальных уравнений”, *Известия РАЕН. Серия МММИУ*, **1**:2 (1997), 140-145.
13. О. А. Кузенков, А. И. Эгамов, “Оптимальное управление для колебательного процесса”, *Вестник ННГУ. «Математическое моделирование и оптимальное управление»*, 1998, № 2 (19), 174-179.
14. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1979, 685 с.
15. А. И. Егоров, *Уравнения Риккати. Издание второе, дополненное*, СОЛОН-Пресс, М., 2017, 448 с.

16. Э. Митчелл, Р. Уэйт, *Метод конечных элементов для уравнений с частными производными*, Мир, М., 1981, 216 с.

17. П. Н. Бураго, А. И. Эгамов, “Применение метода Галеркина ко второй начально-краевой задаче теплопроводности.”, *Наука сегодня. Проблемы и перспективы развития.* , Материалы международной научно-практической конференции. Часть 1 (г. Вологда, 29 ноября 2017 г.), 125-126.

18. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 662 с.

Поступила 3.07.2019

MSC2010 35L20

On the connection between solutions of initial boundary-value problems for a some class of integro-differential PDE and a linear hyperbolic equation

© **P. N. Burago**[1], **A. I. Egamov**[2]

Abstract. We consider the second initial boundary-value problem for a certain class of second-order integro-differential PDE with integral operator. The connection of its solution with the solution of the standard second linear initial boundary-value problem for the hyperbolic equation is shown. Thus, the nonlinear problem is reduced to a standard linear problem, whose numerical solution can be obtained, for example, by the Fourier method or Galerkin method. The article provides examples of five integro-differential equations for various integral operators as particular representatives of the class of integro-differential equations for a better understanding of the problem. The application of the main theorem to these examples is shown. Some simple natural requirement is imposed on the integral operator; so, in four cases out of five the problem's solution satisfies some phase constraint. The form of these constraints is of particular interest for the further research.

Key Words: the second initial boundary value problem, integro-differential equation with PDE, phase constraint, hyperbolic equation.

References

1. M. M. Vajnberg, “Integro-differential equations”, *Itogi nauki. Ser. Mat. anal. Teor. veroyatn. Regulir. 1962. VINITI. M.*, 1964, 5 — 37 (In Russ.).

2. S. S. Orlov, *Obobshchennye resheniya integro-differencial'nyh uravnenij vysokih poryadkov v banahovyh prostranstvah [Generalized solution integro-differential high order equations in Banach space]*, Izd-vo IGU, Irkutsk, 2014 (In Russ.), 150 p.

[1]**Pavel N. Burago**, Post-graduate student, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhni Novgorod, 603950, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8010-906X, burago.pasha@yandex.ru

[2]**Albert I. Egamov**, Associate Professor, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhni Novgorod, 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3630-7237, albert810@yandex.ru

3. A. A. Samarskij, A. P. Mihajlov, *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery. [Mathematical Modeling: Ideas. Methods. Examples]*, FIZMATLIT, M., 2005 (In Russ.), 320 p.

4. A. V. Kalinin, S. F. Morozov, "On stabilization of the solution of the nonlinear radiation transfer system in the two-level approximation", *DAN SSSR*, **38**:1 (1990), 134–135 (In Russ.).

5. A. V. Kalinin, S. F. Morozov, "On a nonlinear boundary value problem in the theory of radiation transfer", *JVM i MF*, **311**:2 (1990), 343–346 (In Russ.).

6. O. A. Kuzenkov, A. I. Egamov, "The generalized Volterra model for a system with one predator and several prey", *III Mezhdunarodnaya konferenciya iz serii "Nelinejnyj mir: "Ecologiya. Ecologicheskoe obrazovanie. Nelinejnoe myshlenie". [III international conference of the series "Nonlinear world". "Ecology. Environmental education. Nonlinear thinking"]*, Tezisy dokladov [Proceedings] (Voronezh, 1997), 86 (In Russ.).

7. O. A. Kuzenkov, "Properties of a class of integro-differential equations in Lebesgue space", *Nelinejnaya dinamika i upravlenie. Vyp. 1. Sb. statej/Pod red. S.V.Emel'yanova, S.K.Korovina*, 2001, 347 – 354 (In Russ.).

8. O. A. Kuzenkov, "On a class of integro-differential equations in Lebesgue space", *Differencial'nye uravneniya*, **38**: 1 (2002), 134–135 (In Russ.).

9. O. A. Kuzenkov, "The Cauchy problem for a class of nonlinear differential equations in a Banach space", *Differencial'nye uravneniya*, **40**:1 (2004), 24–32 (In Russ.).

10. V. F. Zajcev, A. D. Polyanin, *Metod razdeleniya peremennyh v matematicheskoj fizike. Uchebnoe izdanie. [The method of separation of variables in mathematical physics. Educational edition]*, Sankt-Peterburg, 2009 (In Russ.), 92 p.

11. A. D. Polyanin, *Spravochnik po linejnym uravneniyam matematicheskoj fiziki. [Handbook of linear equations of mathematical physics]*, FIZMATLIT, M., 2001 (In Russ.), 576 p.

12. O. A. Kuzenkov, A. I. Egamov, "Optimal control for one class of integro-differential equations", *Izvestiya RAEN. Seriya MMMIU*, **1**:2 (1997), 140–145 (In Russ.).

13. O. A. Kuzenkov, A. I. Egamov, "Optimal control for the oscillatory process", *Vestnik NNGU. "Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie"*, **2 (19)** (1998), 174–179 (In Russ.).

14. A. N. Tihonov, A. A. Samarskij, *Uravneniya matematicheskoj fiziki. [Equations of mathematical physics]*, Nauka, M., 1979 (In Russ.), 685 p.

15. A. I. Egorov, *Uravneniya Riccati. Izdanie vtoroe, dopolnennoe [Riccati Equations. Second edition, supplemented]*, SOLON-Press, M., 2017 (In Russ.), 448 p.

16. E. Mitchell, R. Uejt, *Metod konechnyh elementov dlya uravnenij s chastnymi proizvodnymi. [The finite element method for partial differential equations]*, Mir, M., 1981 (In Russ.), 216 p.

17. P N. Burago, A. I. Egamov, "Application of the Galerkin method to the second initial-boundary value problem of heat conduction", *Nauka segodnya. Problemy i perspektivy razvitiya. [Science today. Problems and prospects of development.]*, Proceedings of the international scientific and practical conference. Part 1. (Vologda, 29.11.2017), 125-126 (In Russ.).

18. G. M. Fihtengol'c, *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. [Course of differential and integral calculus. T.3]*, FIZMATLIT, M., 2001 (In Russ.), 662 p.

Submitted 3.07.2019