DOI 10.15507/2079-6900.21.201903.317-328

*УДК 517.9*

# Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами

© **М. В. Донцова**[1]

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами. Исследование разрешимости задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами в исходных координатах основано на методе дополнительного аргумента. Доказано существование локального решения задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий. Определены достаточные условия существования нелокального решения задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами опирается на оригинальные глобальные оценки.

**Ключевые слова:** метод дополнительного аргумента, глобальные оценки, задача Коши, уравнения с частными производными первого порядка

## 1. Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции; $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{1.2}$$

Задача (1.1)– (1.2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Системы вида (1.1) встречаются в самых различных прикладных задачах из области естественных наук. В работе [1] с помощью метода характеристик проводится анализ разрешимости систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. При исследовании разрешимости задачи Коши для системы нелинейных и квазилинейных уравнений методом характеристик в большинстве случаев трудно перейти от характеристических переменных к исходным переменным.

[1]**Донцова Марина Владимировна**, ассистент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2915-0881, dontsowa.marina2011@yandex.ru

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем нелинейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [2–12]. В работе [2] с помощью данного метода определены условия локальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных уравнений, при которых решение имеет меньшую гладкость, чем начальные функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$, и указаны границы интервала разрешимости. В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), при которых решение имеет такую же гладкость по $x$, как и начальные функции задачи Коши, и достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1.1)–(1.2).

## 2. Существование локального решения

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (1.1)–(1.2) расширенную характеристическую систему [2–12]:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = S_1(w_1(s,t,x), w_3(s,t,x)), \tag{2.1}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = S_2(w_4(s,t,x), w_2(s,t,x)), \tag{2.2}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = f_1(s,\eta_1), \tag{2.3}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = f_2(s,\eta_2), \tag{2.4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ \ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2), \tag{2.5}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ \ w_2(0,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)),\ \ \eta_i(t,t,x) = x,\ \ i = 1,2. \tag{2.6}$$

Неизвестные функции $\eta_i,\ w_j,\ i = 1,2,\ j = \overline{1,4}$ зависят не только $t$ и $x$, но и от дополнительного аргумента $s$. Интегрируя уравнения (2.1)–(2.4) по аргументу $s$ и учитывая условия (2.5)–(2.6), получим эквивалентную систему интегральных уравнений

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_1(w_1, w_3)d\nu, \tag{2.7}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_2(w_4, w_2)d\nu, \tag{2.8}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_1(\nu,\eta_1)d\nu, \tag{2.9}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_2(\nu,\eta_2)d\nu, \tag{2.10}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ \ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{2.11}$$

Подставим (2.7)–(2.8) в (2.9)–(2.11), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1\left(x - \int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu\right) + \int\limits_0^s f_1\left(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau\right)d\nu, \qquad (2.12)$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2\left(x - \int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu\right) + \int\limits_0^s f_2\left(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau\right)d\nu, \qquad (2.13)$$

$$w_3(s,t,x) = w_2\left(s,s,x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu\right), \qquad (2.14)$$

$$w_4(s,t,x) = w_1\left(s,s,x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu\right). \qquad (2.15)$$

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)|\, 0 \le s \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T > 0\}$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\},\ C_f = \max\{\sup_{\Omega_T}|f_1|, \sup_{\Omega_T}|f_2|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_1|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_2|\},$$

$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}$, где $K$ – произвольно зафиксированное положительное число; $l = \max\left\{\sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_2|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_2|\right\}$, $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной $t$; дважды дифференцируемых по переменной $x$, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на $\Omega_T$; $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка $\alpha_m$ по $m$-му аргументу, $m = \overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2.....$

Для произвольной функции $U$ введем норму $\|U\| = \sup\limits_{\Gamma_T}|U(s,t,x)|$ без указания в символе$\|\|$ области, по которой норма вычисляется, так как каждый раз это будет понятно из контекста.

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), которое имеет такую же гладкость по $x$, как и начальные функции задачи Коши.

**Теорема 2.1** *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, где $T \leqslant \min\left\{\dfrac{C_\varphi}{4C_f}, \dfrac{3}{40C_\varphi l}\right\}$, $K = 2C_\varphi$ и выполняются условия*

$$\partial_u S_1 < 0,\ \partial_v S_1 > 0,\ \partial_u S_2 < 0,\ \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \le 0,\ \varphi_2'(x) \ge 0 \text{ на } R,\ \partial_x f_1 \le 0,\ \partial_x f_2 \ge 0 \text{ на } \Omega_T.$$

*Тогда для любого $T \leqslant \min\left\{\dfrac{C_\varphi}{4C_f}, \dfrac{3}{40C_\varphi l}\right\}$ задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).*

Теорема 2.1 следует из выполнения условий трех лемм.

**Лемма 2.1** *Если функции $w_j$, $j = \overline{1,4}$, удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12)–(2.15) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции*

$$u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$$

*будут решением задачи Коши (1.1)–(1.2) на $\Omega_{T_0}$, $T_0 \le T$, где $T_0$ – константа, определяемая через исходные данные.*

Лемма 2.1 доказывается аналогично утверждению из работ [2–3], [5], [7–8], [10–11].

**Л е м м а 2.2** *При выполнении условий*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ K = 2C_\varphi,$$

$$T \leqslant \min\left\{\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\right\} \tag{2.16}$$

*система интегральных уравнений (2.12)–(2.15) имеет единственное решение*

$$w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в работе [2]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15) зададим равенствами $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x),\ w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.12)–(2.15) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, \ldots)$

$$w_{1n} = \varphi_1\left(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\nu\right) + \int\limits_0^s f_1\left(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\tau\right)d\nu, \tag{2.17}$$

$$w_{2n} = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\tau)d\nu, \tag{2.18}$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}\left(s, s, x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\nu\right), \tag{2.19}$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}\left(s, s, x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\nu\right). \tag{2.20}$$

Теперь при каждом $n$ систему (2.17)–(2.20) решим (докажим существование решения) с помощью своего процесса последовательных приближений.

Для системы уравнений (2.17)–(2.20) нулевое приближение определим равенствами $w_{jn}^0 = w_{j(n-1)},\ j = \overline{1,4}$. Для системы уравнений (2.17)–(2.20) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1} = \varphi_1\left(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\nu\right) + \int\limits_0^s f_1\left(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\tau\right)d\nu, \tag{2.21}$$

$$w_{2n}^{k+1} = \varphi_2\left(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\nu\right) + \int\limits_0^s f_2\left(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\tau\right)d\nu, \tag{2.22}$$

$$w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)}\left(s, s, x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\nu\right), \tag{2.23}$$

$$w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)}\left(s, s, x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\nu\right). \tag{2.24}$$

Так же, как в [2], [7–8], [10] устанавливается, что при выполнении условия

$$T \leqslant \min\left\{\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}\right\} \tag{2.25}$$

последовательные приближения (2.21)–(2.24) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.17)–(2.20), для которого справедливы оценки $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi,\ j = \overline{1,4}$.

При выполнении условия (2.25) справедливы оценки

$$||w_{1nx}^{k+1}|| \leq 4C_\varphi, ||w_{2nx}^{k+1}|| \leq 4C_\varphi,\ ||w_{3nx}^{k+1}|| \leq 8C_\varphi,\ ||w_{4nx}^{k+1}|| \leq 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения $w_{jnx}^k,\ j = \overline{1,4}$ сходятся при $k \to \infty$, а значит, существуют производные $w_{jnx},\ j = \overline{1,4}$, и справедливы оценки

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leq 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\| \leq 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\| \leq 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\| \leq 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения, определяемые из системы (2.17)–(2.20), сходятся к непрерывному решению системы (2.12)–(2.15), для которого справедливы оценки $\|w_j\| \leq 2C_\varphi,\ j = \overline{1,4}$.

При выполнении условия (2.16) $w_{jnx} \to w_{jx} = \partial_x w_j,\ j = \overline{1,4}$, где функции $\partial_x w_j$ являются непрерывными по всем своим аргументам на $\Gamma_T$, справедливы оценки

$$\|\partial_x w_i\| \leq 4C_\varphi,\ i = 1,2,\ \|\partial_x w_3\| \leq 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_4\| \leq 8C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что $w_j,\ j = \overline{1,4}$, имеет непрерывные и ограниченные производные по переменной $t$ на $\Gamma_T$. Единственность решения доказывается так же, как в статье [2].

В нижеследующей лемме утверждается, что при выполнении следующих условий

$$\begin{gathered} \partial_u S_1 < 0,\ \partial_v S_1 > 0,\ \partial_u S_2 < 0,\ \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K, \\ \varphi_1'(x) \leq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R,\ \partial_x f_1 \leq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T, \end{gathered} \tag{2.26}$$

решение имеет такую же гладкость по $x$, как и начальные функции. Этот результат имеет определяющее значение для возможности продолжения решения.

**Л е м м а 2.3** *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, $K = 2C_\varphi$, тогда при выполнении условий (2.16), (2.26) функции $w_j,\ j = \overline{1,4}$, представляющие собой решение системы уравнений (2.12)–(2.15), имеют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$, $j = \overline{1,4}$, на $\Gamma_T$, где $T \leqslant \min\left\{\dfrac{C_\varphi}{4C_f}, \dfrac{3}{40C_\varphi l}\right\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дважды продифференцируем последовательные приближения (2.17)–(2.20) по $x$. Обозначим $\omega_j^n = w_{jnxx},\ j = \overline{1,4}$, получим систему уравнений

$$\omega_1^n(s,t,x) = -\varphi_1'\left(x - \int_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\nu\right)\int_0^t(\partial_u S_1\omega_1^n + \partial_v S_1\omega_3^n)d\nu -$$

$$- \int_0^s \partial_x f_1 \int_\nu^t (\partial_u S_1\omega_1^n + \partial_v S_1\omega_3^n)d\tau d\nu + G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}), \tag{2.27}$$

$$\omega_2^n\,(s,t,x) = -\varphi_2'\left(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu\right)\int\limits_0^t (\partial_u S_2\omega_4^n + \partial_v S_2\omega_2^n)d\nu -$$

$$-\int\limits_0^s \partial_x f_2 \int\limits_\nu^t (\partial_u S_2\omega_4^n + \partial_v S_2\omega_2^n)d\tau d\nu + G_2(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}), \quad (2.28)$$

$$\omega_3^n\,(s,t,x) = \omega_2^{n-1}\cdot\left(1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\nu\right)^2 -$$

$$- w_{2(n-1)x}\int\limits_s^t (\partial_u S_1\omega_1^n + \partial_v S_1\omega_3^n)d\nu + G_3(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}), \quad (2.29)$$

$$\omega_4^n\,(s,t,x) = \omega_1^{n-1}\cdot\left(1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\nu\right)^2 -$$

$$- w_{1(n-1)x}\int\limits_s^t (\partial_u S_2\omega_4^n + \partial_v S_2\omega_2^n)d\nu + G_4(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}), \quad (2.30)$$

где $G_j, j = 1,2,3,4,$ – известные функции.

При выполнении условия (2.16) с учетом установленных выше оценок $\|w_{jn}\| \le 2C_\varphi$, $j = \overline{1,4}$, получим

$$\left|\int\limits_s^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu\right| \le S_K T, \quad \left|\int\limits_s^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu\right| \le S_K T,$$

$$S_K = \max\left\{\sup_{Z_K}|S_1|, \sup_{Z_K}|S_2|\right\}, \; K = 2C_\varphi.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in R^1$. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x\,|x_0 - S_K T \le x \le x_0 + S_K T\}, \; K = 2C_\varphi.$$

Возьмем $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$.

При выполнении условий (2.16), (2.26) установлено, что справедливы неравенства

$$|\eta_{1n}(s,t,x_1) - \eta_{1n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|,$$
$$|\eta_{2n}(s,t,x_1) - \eta_{2n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|,$$

где $\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu$, $\eta_{2n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu$.

Таким образом, установлена равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по $x$ при $x \in \Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по $x$ в выбранной произвольной точке $x_0 \in R$. Равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по $x$ используется для доказательства сходимости последовательных приближений $\omega_j^n,\ j = \overline{1,4}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\omega}_1^n = -\varphi_1'\left(x - \int\limits_0^t S_1(w_1, w_3)d\nu\right)\int\limits_0^t (\partial_u S_1 \tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1 \tilde{\omega}_3^n)d\nu -$$

$$-\int\limits_0^s \partial_x f_1 \int\limits_\nu^t (\partial_u S_1 \tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1 \tilde{\omega}_3^n)d\tau d\nu + G_1(s, t, x, w_1, w_3, w_{1x}, w_{3x}), \quad (2.31)$$

$$\tilde{\omega}_2^n = -\varphi_2'\left(x - \int\limits_0^t S_2(w_4, w_2)d\nu\right)\int\limits_0^t (\partial_u S_2 \tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2 \tilde{\omega}_2^n)d\nu -$$

$$-\int\limits_0^s \partial_x f_2 \int\limits_\nu^t (\partial_u S_2 \tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2 \tilde{\omega}_2^n)d\tau d\nu + G_2(s, t, x, w_2, w_4, w_{2x}, w_{4x}), \quad (2.32)$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot \left(1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_1 w_{1x} + \partial_v S_1 w_{3x})d\nu\right)^2 - w_{2x}\int\limits_s^t (\partial_u S_1 \tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1 \tilde{\omega}_3^n)d\nu +$$

$$+ G_3(s, t, x, w_1, w_3, w_{1x}, w_{3x}), \quad (2.33)$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot \left(1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_2 w_{4x} + \partial_v S_2 w_{2x})d\nu\right)^2 - w_{1x}\int\limits_s^t (\partial_u S_2 \tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2 \tilde{\omega}_2^n)d\nu +$$

$$+ G_4(s, t, x, w_2, w_4, w_{2x}, w_{4x}), \quad (2.34)$$

где $G_j, j = 1, 2, 3, 4,$ – известные функции.

Доказывается, что при выполнении условий (2.16), (2.26) система рекуррентных уравнений (2.31)–(2.34) при каждом $n$ имеет решение, причем $\tilde{\omega}_j^n \to \tilde{\omega}_j,\ j = \overline{1, 4}$, справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_2\| \le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_3\| \le 4C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_4\| \le 4C_\varphi.$$

Далее доказывается, что последовательные приближения $\omega_j^n$ сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j$, $j = \overline{1, 4}$, при $n \to \infty$.

Получим, что $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2},\ j = \overline{1, 4}$, непрерывны и ограничены на $\Gamma_T$ при выполнении условий (2.16), (2.26).

Аналогично устанавим, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t},\ j = \overline{1, 4}$ на $\Gamma_T$ при выполнении условий (2.16), (2.26).

Доказательство закончено.

## 3. Существование нелокального решения

**Теорема 3.1** *Пусть*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ K = C_\varphi + TC_f$$

*и выполняются условия (2.26). Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1.1)– (1.2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем систему уравнений (1.1) по $x$. Обозначим $p(t,x) = \partial_x u(t,x), \quad q(t,x) = \partial_x v(t,x)$, получим

$$\begin{cases} \partial_t p + S_1(u,v)\partial_x p = -\partial_u S_1 p^2 - \partial_v S_1 pq + \partial_x f_1, \\ \partial_t q + S_2(u,v)\partial_x q = -\partial_v S_2 q^2 - \partial_u S_2 pq + \partial_x f_2, \\ p(0,x) = \varphi_1'(x), \quad q(0,x) = \varphi_2'(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Добавим к системе уравнений (2.7)–(2.11) два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -\partial_u S_1 \gamma_1^2(s,t,x) - \partial_v S_1 \gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1) + \partial_x f_1(s,\eta_1), \\ \dfrac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -\partial_v S_2 \gamma_2^2(s,t,x) - \partial_u S_2 \gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x) + \partial_x f_2(s,\eta_2), \end{cases} \tag{3.2}$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1), \quad \gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2). \tag{3.3}$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1) + \int\limits_0^s [-\partial_u S_1 \gamma_1^2 - \partial_v S_1 \gamma_1 \gamma_2(\nu,\nu,\eta_1) + \partial_x f_1] d\nu, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-\partial_v S_2 \gamma_2^2 - \partial_u S_2 \gamma_2 \gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + \partial_x f_2] d\nu. \end{cases} \tag{3.4}$$

Аналогично тому, как это выполнено в [5], [7–8], [10–11] доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для вывода глобальных оценок отметим, что из (2.7)–(2.11) следуют оценки

$$\|w_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \ i = 1,2.$$

Следовательно,

$$\|u\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \ \|v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{3.5}$$

Далее из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1) \exp\left(-\int\limits_0^s (\partial_u S_1 \gamma_1 + \partial_v S_1 \gamma_2)\, d\nu\right) + \\ + \int\limits_0^s \partial_x f_1 \exp\left(-\int\limits_\tau^s (\partial_u S_1 \gamma_1 + \partial_v S_1 \gamma_2)\, d\nu\right) d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) \exp\left(-\int\limits_0^s (\partial_u S_2 \gamma_1 + \partial_v S_2 \gamma_2)\, d\nu\right) + \\ + \int\limits_0^s \partial_x f_2 \exp\left(-\int\limits_\tau^s (\partial_u S_2 \gamma_1 + \partial_v S_2 \gamma_2)\, d\nu\right) d\tau. \end{cases} \tag{3.6}$$

Из (3.6) при выполнении условий

$$\partial_u S_1 < 0, \ \partial_v S_1 > 0, \ \partial_u S_2 < 0, \ \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \leq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R,\ \partial_x f_1 \leq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T,$$

получим, что $\gamma_1 \leq 0,\ \gamma_2 \geqslant 0$ на $\Gamma_T$, значит, $\|\gamma_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ i = 1, 2$. Следовательно,

$$\|\partial_x u\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ \|\partial_x v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{3.7}$$

Далее, так же, как в [5, 7] выводится, что при всех $t$ и $x$ справедливы оценки

$$|\partial^2_{x^2} u| \leq E_{11} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{3.8}$$

$$|\partial^2_{x^2} v| \leq E_{21} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{3.9}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{21},\ C_{23}$ – постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для $u,\ v,\ \partial_x u,\ \partial_x v,\ \partial^2_{x^2} u,\ \partial^2_{x^2} v$ ((3.5), (3.7)–(3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Взяв в качестве начальных значений $u(T_0, x),\ v(T_0, x)$, продлим решение на промежуток $[T_0,\ T_1]$ , а затем, выбирая начальные значения $u(T_1, x),\ v(T_1, x)$, – на промежуток $[T_1,\ T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\|\partial_x u\|$ , $\|\partial_x v\|$ , а эти величины в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значением $C_\varphi + TC_f$ на любом промежутке разрешимости. В частности, начальных значений справедливы оценки:

$$u(T_k, x), v(T_k, x) \in \bar{C}^2(R),\ |u(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ |v(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f.$$

$$|\partial_x u(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ |\partial_x v(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f.$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8)–(3.9), где в качестве $t$ можно взять $T$. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а.

# Список литературы

1. Б. Л. Рождественский, Н. И. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1968, 592 с.

2. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

3. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия: Математика, механика, информатика. Спец. выпуск*, **1** (2006), 60–64.

4. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.

5. С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, **177**:3 (2013), 190–201.

6. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 115–124.

7. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, **4** (2014), 116–130.

8. М. В. Донцова, “Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, **3** (2014), 21–36.

9. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **15** (2013), 52–59.

10. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида”, *Уфимский математический журнал*, **6**:4 (2014), 71–82.

11. М. В. Донцова, “Разрешимость задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$”, *Уфимский математический журнал*, **11**:1 (2019), 26–38.

12. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.


*Поступила 05.07.2019*

*MSC2010 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05*

# The nonlocal solvability conditions for a system of two quasilinear equations of the first order with absolute terms

© **M. V. Dontsova**[1]

**Abstract.** The Cauchy problem for a system of two first-order quasilinear equations with absolute terms is considered. The study of this problem's solvability in original coordinates is based on the method of an additional argument. The existence of the local solution of the problem with smoothness which is not lower than the smoothness of the initial conditions, is proved. Sufficient conditions of existence are determined for the nonlocal solution that is continued by a finite number of steps from the local solution. The proof of the nonlocal resolvability of the Cauchy problem relies on original global estimates.

**Key Words:** method of an additional argument, global estimates, Cauchy problem, first-order partial differential equations

## References

1. B. L. Rozhdestvenskij, N. N. Yanenko, *[Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 592 p.
2. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations", *Doklady RAN*, **379**:1 (2001), 16–21 (In Russ.).
3. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, "Method of an additional argument", *Vestnik KazNU. Series Mathematics, mechanics, informatics. Spec. issue*, **1** (2006), 60–64 (In Russ.).
4. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The investigation of a solvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite.", *Matem. vestnik pedvuzov, universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **14** (2012), 34–41 (In Russ.).
5. S. N. Alekseenko, T. A. Shemyakina, M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations", *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, **177**:3 (2013), 190–201 (In Russ.).
6. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 115–124 (In Russ.).
7. M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides", *Vestnik of VSU. Series: Physics. Mathematics*, **4** (2014), 116–130 (In Russ.).
8. M. V. Dontsova, "The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, **3** (2014), 21–36 (In Russ.).

[1]**Marina V. Dontsova**, Assistant of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2915-0881, dontsowa.marina2011@yandex.ru

9. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, “The local existence of a bounded solution of the system of equations, describing a distribution of electrons in low-pressure plasma in an electric field of sprite”, *Matem. vestnik pedvuzov, universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **15** (2013), 52–59 (In Russ.).

10. M. V. Dontsova, “Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides”, *Ufa Mathematical Journal*, **6**:4 (2014), 71–82 (In Russ.).

11. M. V. Dontsova, “Solvability of Cauchy problem for a system of first order quasilinear equations with right-hand sides $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$, $f_2 = g_2v(t, x)$”, *Ufa Mathematical Journal*, **11**:1 (2019), 26–38 (In Russ.).

12. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.

*Submitted 05.07.2019*